

뜬침목구간에서 차량/궤도 상호작용 수치해석기법 개발

Development of a Numerical Method of Vertical Train/Track Interaction in the Track Section with Hanging Sleepers

양신추¹ · 이지하^{2*}

Sin-Chu Yang · Jeeha Lee

Abstract Hanging sleepers are frequently observed in the ballasted track with the rail of high rigidity. These hanging sleepers at the high speed line could cause such large dynamic force compared to those at the conventional line. This dynamic force would, in turn, deteriorate train running stability as well as riding comfort, and accelerate irregularity of track and failure of track materials, leading to a sharp increase in track maintenance cost. When the wheel-rail contact spring exhibits nonlinear behavior and some components of the system like hanging sleeper exhibit bi-linear behaviors, an effective analytical method is proposed for train-track interactions. The verification of the present method is carried out comparing numerical results by the present method and those by Ono's method of RTRI.

Keywords : Hanging sleeper, Train/track interaction, Subgrade settlement, Non-linear model, Track irregularity

초 록 고속철도 자갈궤도에서 궤도틀림을 체계적이고 효율적으로 관리하기 위해서는 뜬 침목구간에서 차량이 궤도에 미치는 동하중의 특성을 파악할 필요가 있으며 이를 위해서는 뜬 침목을 고려한 차량과 궤도의 동적 상호작용해석기법의 개발이 필요하다. 본 연구에서는 초기 레일의 처짐이 없는 경우 궤광자중에 의하여 발생한 레일처짐(궤도틀림)과 처진 침목과 자갈도상간의 침목 들뜸량을 계산할 수 있는 해석기법을 개발하였고, 궤도틀림과 침목 들뜸량을 동시에 고려할 수 있는 차량과 궤도의 해석기법을 개발하였다. 본 해석기법의 타당성은 타 문헌에서 제시한 해석결과와 비교를 통하여 검증하였다.

주요어 : 뜬침목, 차량/궤도 상호작용, 노반침하, 비선형 모형, 궤도틀림

1. 서 론

자갈궤도에 있어서 자갈의 불균질성에 의하여 뜬침목 현상이 자주 발생하게 된다. 뜬침목은 기존선에서는 크게 문제되지 않지만 고속철도에서는 기존철도와는 비교할 수 없을 정도로 큰 충격력이 발생하여 궤도가 급격하게 변형됨으로써 열차의 주행안전성과 승차감이 심각하게 저하되고 궤도 구성품의 열화 및 손상이 촉진된다. 현재 경부고속철도의 궤도틀림은 주로 뜬 침목형태로 발생하고 있으며 이를 보수하기 위하여 많은 인력과 비용이 투입되고 있는 실정이다. 따라서 고속철도 자갈궤도에서 궤도틀림을 체계적이고 효율적으로 관리하기 위해서는 뜬침목 구간에서 차량이 궤도에 미치는 동하중의 특성을 파악할 필요가 있으며 이를 위해서는 뜬침목을 고려한 차량과 궤도의 동적 상호작용해석기법의 개발이 필요하다.

시계열 영역에서 차량과 궤도의 상호작용해석기법은 차량과 레일의 비선형 접촉특성과 궤도구성품의 비선형 거동특성 및 곡부적 궤도의 물성치 및 제원의 변화 등을 잘 고려

할 수 있는 장점이 있어 최근까지 많은 연구가 진행되어 오고 있다.

이들 대부분의 연구에서는 차량과 레일의 접촉스프링은 비선형적으로 거동하고 궤도구성품은 선형적으로 거동한다고 가정하여 해석을 수행하였다[1-7]. 그러나 뜬침목 구간에서 차량과 궤도의 상호작용을 정확하게 해석하기 위해서는 차량과 레일간의 비선형 접촉특성은 물론 침목이 자갈도상과 분리 또는 접촉하게 됨으로서 변화되는 침목과 자갈도상간에 비선형 접촉특성을 고려하는 것이 매우 중요하다고 할 수 있다.

Lundqvist 등 [8]은 상용 유한요소해석프로그램 LS-DYNA를 사용하여 차량을 1질점의 이동질량으로 모델링하고 하부의 궤도구성요소를 3차원 솔리드요소(Solid element)로 모델링하여 뜬침목에 따른 침목과 자갈도상의 접촉하중 발생특성에 대한 연구를 수행하였다. 이 밖에 보다 정교한 차량 및 궤도의 해석모델(차량 1량을 3차원으로 모델링하고, 궤도를 레일, 침목, 그리고 도상자갈로 구성된 3층 모델)을 사용하여 뜬 침목구간에서의 궤도의 동적거동 특성에 대한 연구실적[9,10]이 보고된 바 있다. 이들 연구에서는 단순히 침목과 자갈도상의 침목 들뜸량(침목과 자갈도상과의 높이차)을 가정하여 차량과 궤도의 상호작용을 해석한 것으로서 뜬침목이 발생할 경우 궤광자중에 의하여 발생하는 궤도틀림은 고려

*교신저자 : 한국철도기술연구원 신교통연구본부
E-mail : jhlee@krrri.re.kr

¹한국철도기술연구원 고속철도연구본부

²한국철도기술연구원 신교통연구본부

되지 않았다. 한편 Ono 등[11]은 뜬 침목에 따른 궤도틀림과 침목 들뜸량을 동시에 고려할 수 있는 차량과 궤도의 상호작용 해석기법을 개발하였으며, 개발된 해석기법을 사용하여 뜬 침목구간의 궤도틀림의 진전예측을 수행하였다.

본 연구에서는 초기 레일이 처짐이 없는 경우의 레일 레벨과 도상자갈간의 높이차 즉, 침목 들뜸량이 주어질 경우 궤광자중에 의하여 발생한 레일처짐(궤도틀림)과 처진 침목과 자갈도상간의 침목 들뜸량을 계산할 수 있는 해석기법을 통하여 궤도틀림과 침목 들뜸량을 동시에 고려할 수 있는 차량과 궤도의 해석기법을 개발하였다. 본 해석 기법은 양신추[12,16]에 의해 개발된 수직방향 차량/궤도 상호작용 해석기법의 알고리즘을 대부분 동일하게 적용하되 뜬 침목구간의 비선형 접촉스프링을 고려할 수 있도록 해석기법을 수정 보완하였다. 따라서 본 해석기법은 문헌[12]에서 제시한 해석시간의 단축 및 정확도의 향상 등의 장점을 유지한다. 본 해석기법은 궤도틀림과 침목 들뜸량을 동시에 고려할 수 있는 측면에서 Ono 등 [11]의 연구와 비슷하지만 Ono 등은 차량을 반차체로 모델링한 반면 본 연구에서는 차량 1량 전체를 모델링함으로써 넓은 범위에서 뜬침목이 발생할 경우 차량의 피칭모션(Pitching Motion) 이 고려될 수 있도록하여 정확도는 높였다고 할 수 있다. 또한 Ono 등이 궤도를 모드중첩법(Mode superposition)으로 모델링함으로써 고주파 충격진동을 해석하는데 많은 시간이 소요됨에도 정확도가 떨어지는 것에 반하여 본 연구에서는 FE(Finite Element)로 직접모델링함으로써 해석결과를 향상시켰다고 할 수 있다. 본 해석기법의 타당성은 Ono 등 [11]의 연구의 예제해석 결과를 비교함으로써 검증하였다.

2. 수치해석모델

2.1 차량과 궤도의 상호작용 해석모델

Fig. 1은 뜬 침목구간에서의 차량과 궤도의 상호작용해석 모델을 나타낸다. 차량모델은 차체(Car body)와 2개의 대차

(Bogie), 그리고 4개의 윤축(wheelset)으로 구성되며, 이들은 각각 강체운동을 하는 것으로 가정하여 질점(lumped mass)으로 모델링하였다. 또한 차체와 대차를 연결하는 2차 현수장치와 대차와 윤축을 연결하는 1차 현수장치는 스프링과 감쇠 요소(damping element)로 모델링하였다. 차량은 수직운동만 하는 것으로 가정하여 10개의 자유도 시스템으로 나타낸다. 이 경우 차량 시스템의 강성, 감쇠, 그리고 질량 행렬은 문헌[13,14]에서 제시한 것과 같은 방법으로 구성할 수 있다.

궤도 서브모델은 자갈궤도의 레일, 레일체결장치, 침목, 도상자갈(ballast), 그리고 노반 등이 다층(multi layers)으로 배열된 것으로 모형화하였다. 최상부층을 구성하는 레일은 Timoshenko 연속보로 모델링하였다. 하부의 레일체결장치 및 패드는 질점, 선형스프링(linear spring) 및 댐퍼(damper)로, 침목은 질점(mass)으로만 나타낸다. 도상자갈은 상층자갈, 중층자갈, 하층자갈 등 3층으로 분리하여 모델링하였다. 자갈도상 각 층의 질량 및 강성의 평가방법은 다음과 같다.

침목하면 자갈도상의 응력분포는 실험 및 해석에 의하여 Fig. 2와 같이 가정할 수 있다. 즉 침목하면으로부터 15cm까지는 침목하면 응력과 같고, 그 이상의 깊이에서는 45°로 확산된다는 것이다. 이러한 가정을 토대로, 도상을 탄성체로 가정할 경우 각 층의 질량은 식 (1)과 같이, 그리고 강성은 식 (2)와 같이 구할 수 있다.

$$m_3 = \frac{b \times 1}{2} \times (7.5 \times 10^{-2}) \times \rho, \quad m_4 = m_3, \quad m_5 = \frac{h}{12} \times z_2 \times \rho \quad (1)$$

$$k_2 = \frac{E \times b \times 1}{7.5 \times 10^{-2}}, \quad k_3 = \frac{k_2}{2}, \quad k_4 = \frac{d_{k1} \times d_{k2}}{d_{k1} + d_{k2}}, \quad k_5 = \frac{d_{k4} \times d_{k5}}{d_{k4} + d_{k5}} \quad (2)$$

여기서 b , 1 은 각각 침목 폭 및 길이이며, ρ 및 E 는 각각 도상자갈의 단위밀도 및 탄성계수이고, h 는 도상깊이이다.

식 (1), 식 (2)에서 나타나는 변수들은 다음 같이 구할 수 있다.

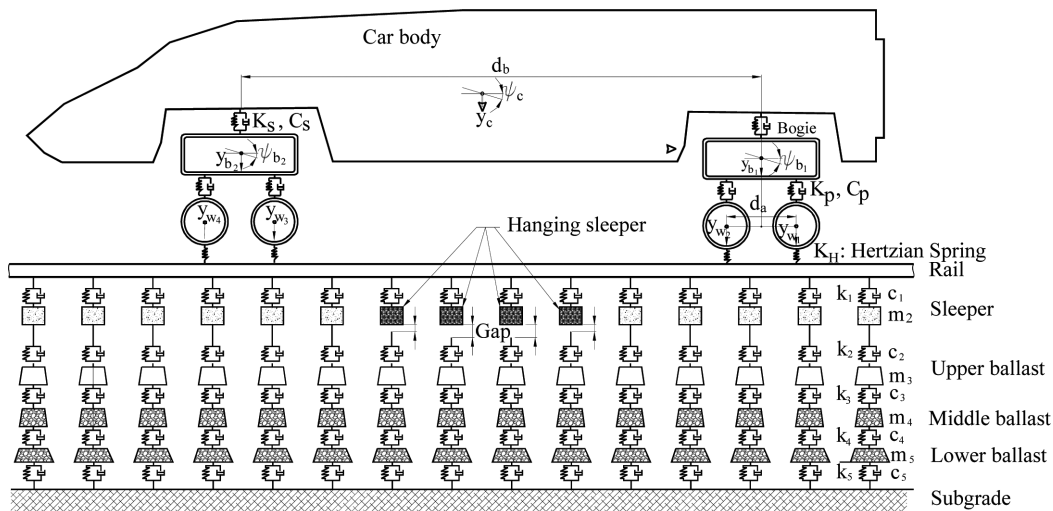


Fig. 1 Numerical model for the vertical train/track interaction

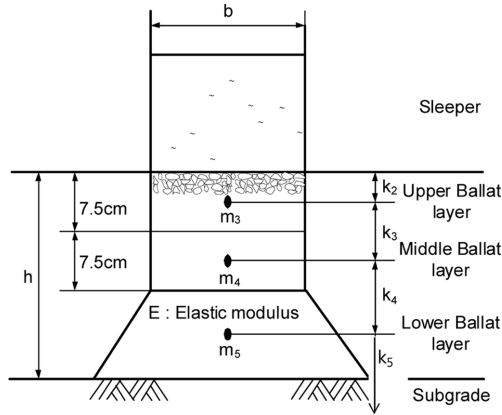


Fig. 2 Stress distribution of a ballasted track

$$h_h = h - 0.15 \quad d_b = b + 2 \times h_h \quad d_1 = 1 + 2 \times h_h \quad (3)$$

$$z_1 = b \times 1 + b \times d_1 + d_b \times 1 + 3 \times d_b \times d_1, \quad (4)$$

$$z_2 = 2 \times b \times 1 + b \times d_1 + d_b \times 1 + 2 \times d_b \times d_1, \quad z_s = \frac{h_h \times z_1}{2 \times z_2}$$

$$g_{11} = \log \frac{(h_h + b/2) \times l}{(h_h + l/2) \times b}, \quad g_{12} = \log \frac{(h_h - z_s + b/2) \times l}{(h_h - z_s + l/2) \times b} \quad (5)$$

$$d_{k1} = k_2, \quad d_{k2} = \frac{k \times (1-b)}{g_{12}}, \quad d_{k4} = \frac{k \times (1-b)}{(g_n - g_{12})}, \quad d_{k5} = \frac{K \times d_b \times d_1}{2} \quad (6)$$

2.2 차륜과 레일의 접촉강성모형

차륜/레일 접촉력은 Fig. 3과 같이 헤르쯔안스프링(Hertzian spring)을 통하여 전달되며 다음과 같이 나타내진다[15].

$$F_H = \begin{cases} c_H(u_w - u_r - u_o)^{3/2} = K_H(u_w - u_r - u_o) & \text{if } (u_w - u_r - u_o) > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

식 (7)에서 u_w 및 u_r 는 각각 접촉위치에서 차륜 및 레일 변위이며, u_o 는 접촉위치에서 차륜/레일 조도(the wheel/rail

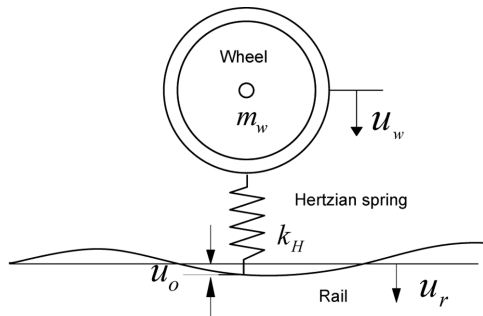


Fig. 3 Hertzian contact stiffness

irregularity). 또한 K_H 는 선형 헤르쯔안스프링강성(the linearized Hertzian spring stiffness)으로 다음과 같이 나타내진다.

$$K_H = c_H(u_w - u_r - u_o)^{1/2} \quad (8)$$

식 (7)에서 c_H 는 레일과 차륜의 곡선반경과 재료의 성질에 좌우되는 헤르쯔안 상수 (Hertzian constant)로서 다음 식과 같이 구해진다.

$$c_H = \left\{ \frac{9}{32} \lambda^2 A \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \right\}^2 \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{32}{9}} \lambda^{3/2} A^{1/2} \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \right\}^{-1} \quad (9)$$

여기서, E ν 는 각각 차륜과 레일의 탄성계수 및 포아송비이며, $A = 1/2(1/R_w + 1/R_r)$ 이고, R_w , R_r 는 각각 차륜반경 및 레일두부의 곡률반경이다. 한편 λ 는 $\theta = \cos^{-1}(B/A)$ 의 함수로서 θ 에 따라서 Table 1과 같이 주어진다. 이때 B 는 다음 식으로 주어진다.

$$B = \sqrt{1/R_1^2 + 1/R_2^2 - 2\cos\phi/R_1R_2} \quad (10)$$

여기서 ϕ 는 주곡률로 $1/R_1$, $1/R_2$ 를 포함하는 면들의 사이 각으로서 차륜이 직선레일에서 직진할 경우에는 $\phi = 0$ 이 된다.

Table 1 λ value for θ

θ	0°	10°	20°	30°	35°	40°	45°	50°
λ	-	0.851	1.220	1.453	1.550	1.637	1.709	1.772

θ	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
λ	1.828	1.875	1.912	1.944	1.967	1.985	1.996	2.000

2.3 뜯침목 모델링

뜯침목과 도상 사이에 간극(u_o)이 있을 경우 두 질점사이 상호작용은 그림 Fig. 4와 같이 모델링 할 수 있으며, 두 질점사이의 작용력은 두 질점의 상대변위로 그림 Fig. 5와 같이 나타내진다. 이때 두 질점사이의 상호작용력은 분리 또는 접촉여부에 따라 다음과 같이 해석 알고리즘 (Algorithm)에 반영한다. 즉, 두 질점이 접촉하지 않을 경우($u=y_2-y_3-u_o$)는 강성 및 감쇠가 없는 것으로 하며, 두 질점이 접촉하는 경우($u=y_2-y_3 \geq u_o$)는 간극이 없는 경우의 일반 강성 및 감쇠요소로서 시스템 강성 및 감쇠행렬에 어셈블링(Assembling) 하되, 시스템 하중 벡터에 다음과 같이 간극에 의하여 발생한 부가하중을 더한다.

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ k_2 u_o \\ -k_2 u_o \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (11)$$

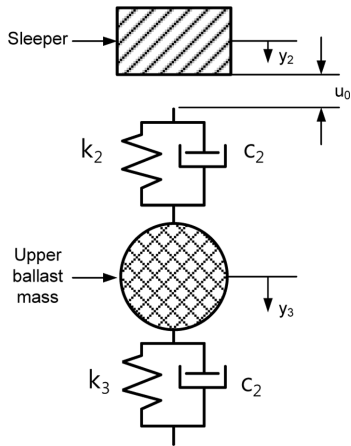


Fig. 4 Model of gap between sleeper and upper ballast layer

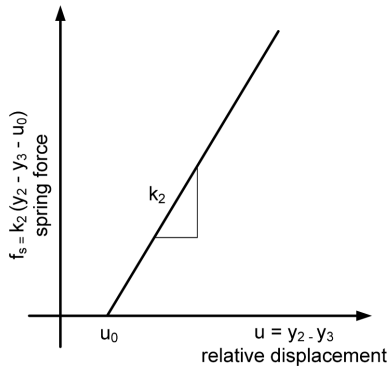


Fig. 5 Spring force between sleeper and upper ballast layer

2.4 노반침하에 의한 궤도틀림 및 침목들뜸량 계산

Fig. 6과 같이 노반이 침하한 경우 궤광은 자중에 의하여 아래로 처짐이 발생한다. 도상의 침하량이 클 경우에는 침목이 도상에 닿지 않는 뜬침목이 발생하지만, 도상의 침하량이 작을 경우에는 침목이 도상과 접촉하게 될 것이다. 따라서 해석시 침목들뜸량은 궤광이 자중에 의하여 하방향으로 처짐이 발생하였을 때 침목과 도상사이의 간극이라 할 수 있다. 또한 궤도틀림량은 궤광의 처짐에 의한 레일의 수직 변위로 볼 수 있다. 이들의 계산은 침목과 도상사이의 강성력이 Fig. 5와 같이 비선형 거동을 보이므로 다음과 같은 과정의 시행착오 방법으로 수행한다.

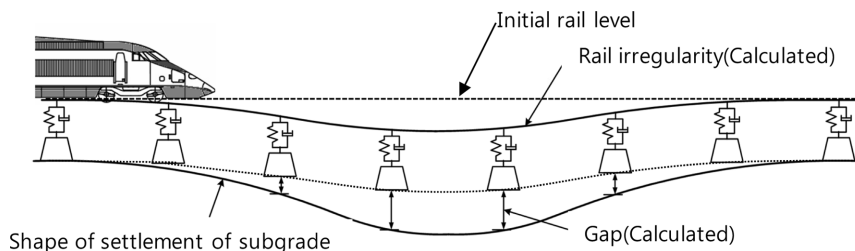


Fig. 6 Deflection of track due the settlement of subgrade

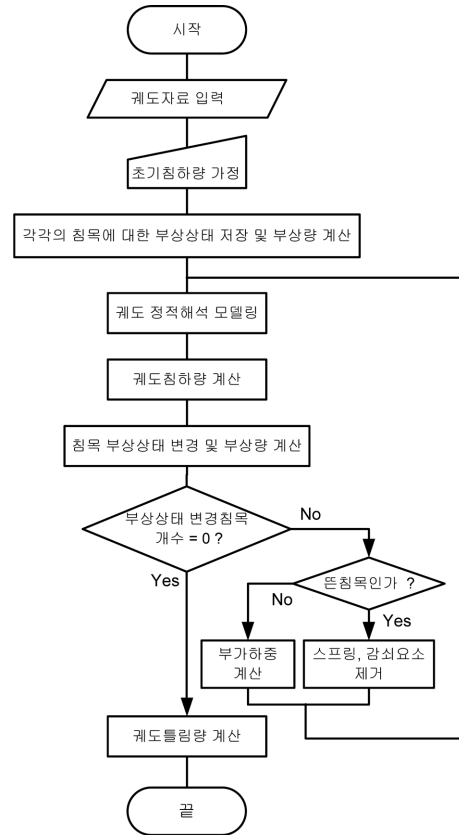


Fig. 7 Flowchart for calculation of gap on hanging sleepers

(i) 초기에 궤광이 직선을 유지한다고(소성처짐이 발생하지 않았다고) 가정하고 초기 노반침하량을 침목들뜸량으로 보아 뜬침목의 강성력을 고려하지 않고 궤광의 자중에 의한 처짐량을 구한다. (ii) 자중에 의하여 처진 궤광의 변위와 초기 노반침하량과 비교하여 침목의 부상여부를 판단한다. 이들의 판단을 통하여 아직도 침목이 뜬 경우 전회 해석처럼 강성력을 고려하지 않으나, 도상과 접촉하게 된 초기의 뜬침목은 식 (11)의 부가하중을 고려하여 재해석한다. (iii) 이러한 해석을 반복해 가면서 각각의 침목이 들뜸 또는 접촉상태를 일정하게 유지하는가를 판단한다. 모든 침목이 일정한 상태에 오면 해석을 종료하고 이때의 침목들뜸량 및 레일변위에 의한 궤도틀림을 구한다. 이상의 알고리즘을 흐름도로 나타내면 Fig. 7과 같다.

Table 2 Dimensions and properties of track

Characteristics	Value
Rail type	50N
Radius of rail crown (mm)	300
Rail mass (kg/m)	50.4
Rail bending stiffness (kN/m ²)	4.05×10 ³
Rail pad stiffness (kN/m)	6.0×10 ⁴
Rail pad damping coef. (kN·s/m)	98.0
Sleeper type	PC sleeper
Sleeper bay (m)	0.6
Sleeper mass (kg)	130.0
Sleeper bottom area (m ²)	0.36
Stiffness of ballast supporting sleeper (kN/m)	1.19×10 ⁶
Damping coef. of ballast supporting sleeper (kN·s/m)	98.0
Upper ballast mass (kg)	65.4
Stiffness of ballast supporting upper ballast (kN/m)	0.593×10 ⁶
Damping coef. of ballast supporting upper ballast (kN·s/m)	980.0
Middle ballast mass (kg)	65.4
Stiffness of ballast supporting middle ballast (kN/m)	0.540×10 ⁶
Damping coef. of ballast supporting middle ballast (kN·s/m)	980.0
Lower ballast mass (kg)	118.6
Stiffness of ballast supporting lower ballast (kN/m)	1.67×10 ⁶
Damping coef. of ballast supporting lower ballast (kN·s/m)	980.0
Stiffness of subgrade (kN/m)	3.0×10 ⁴
Damping coef. of subgrade(kN·s/m)	980.0

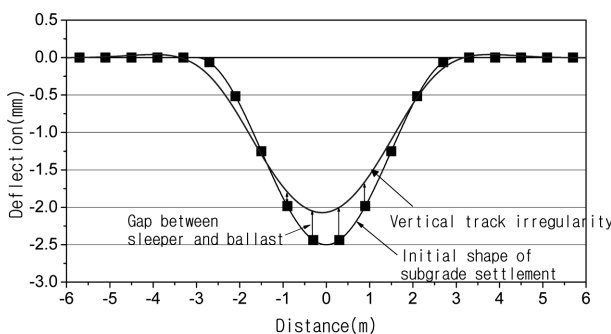


Fig. 8 Shape of deflection of track due to subgrade settlement

Table 2의 제원을 갖는 궤도시스템에서 초기의 노반침하를 파장 6m, 진폭이 2.5mm인 정현파로 가정할 때 앞서 제시한 계산과정을 통하여 얻어진 침목들뜸량 및 궤도틀림을 계산하였다. 계산이 수렴되는 시행착오 횟수는 4회 정도로서 효율적으로 초기 노반침하에 따른 궤도틀림 및 침목들뜸

량이 계산되는 것을 알 수 있었다. 한편 계산결과를 나타낸 Fig. 8로부터 노반침하에 의하여 발생하는 궤도틀림은 노반의 처짐 형상 및 크기와 비슷하게 발생하나 레일의 휨강성 때문에 약간의 차이가 발생하는 것을 알 수 있다.

3. 뜯 침목을 고려한 차량/궤도 상호작용 해석기법의 검증

본 연구에서 개발한 뜯침목을 고려한 차량/궤도 상호작용 해석기법을 검증하기 위하여 일본 철도기술연구소의 Ono 등 [11]이 해석한 바 있는 뜯침목 구간의 차량/궤도 상호작용 해석 예제와 동일한 예제해석을 수행하여 두 결과를 비교함으로써 검증하였다.

차량/궤도 해석모형은 Fig. 1과 같고 해석에 사용된 궤도의 제원 및 물성치는 Table 2와 동일하며 차량의 제원 및 물성치는 Table 3과 같다. 또한 초기 노반침하형상은 Fig. 8에서 제시한 것과 동일한 형상의 파장 6.0m, 진폭 2.5mm의 Sine파와 곡선이다.

Table 3 Dimensions and properties of train

Train type	Shinkansen
Mass of half car body (kg)	7862.0
Stiffness of secondary suspension (kN/m)	251.2
Damping coef. of secondary suspension (kN·s/m)	45.3
Mass of bogie frame (kg)	1531.0
Stiffness of primary suspension (kN/m)	1180.2
Damping coef. of primary suspension (kN·s/m)	39.2
Rigid wheel base (m)	2.5
Wheelset mass (kg)	827.0
Wheel diameter (mm)	860.0

Fig. 9는 본 연구에서 제시한 해석기법을 사용하여 얻은 차륜/레일 접촉력과 침목/자갈도상 접촉력을 일본철도종합기술연구소의 Ono 등[11]이 제시한 해석결과를 함께 나타낸 것이다 이들 해석결과를 비교하면 비교적 두 결과가 거의 잘 일치하는 것을 알 수 있는데 일부 구간에서는 다소 차이가 있는 것을 알 수 있다. 본 연구에서는 차량 1량 전체를 모델링 한데 반하여 Ono의 연구에서는 반차체만을 모델링 함으로써 차체(Car body)의 피칭모션(Pitching Motion)이 고려되지 않았다. 특히 궤도모델은 양쪽 모두 동일하게 5층으로 모델링 하였으나 레일모델에 있어서는 Ono는 모드중첩법(Mode superposition)으로 모델링 함으로써 충격하중에 의한 고주파진동을 나타내는데 다소의 어려움이 있었던 것에 반하여 본 연구에서는 국부의 고주파 진동을 비교적 잘 나타낼 수 있는 유한요소로 직접 모델링 하였다. 이러한 모델링의 차이가 해석결과의 차이를 유발한 것으로 판단된다.

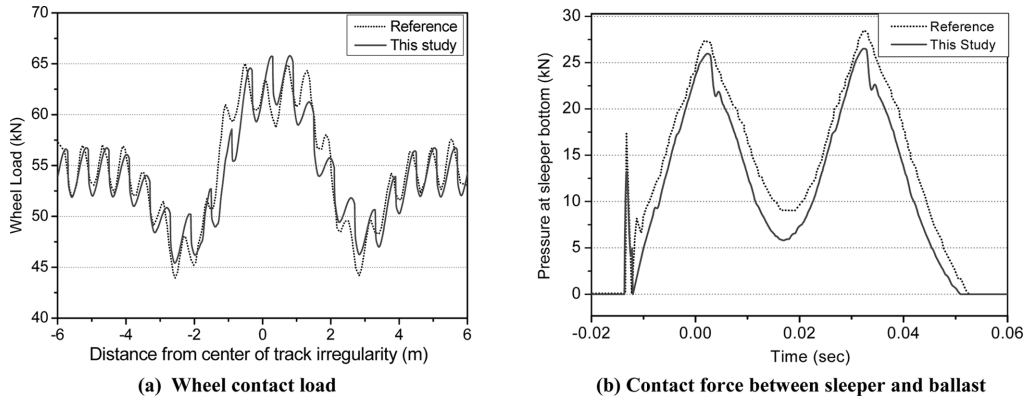


Fig. 9 Comparison of results by the present method and Ono[11]

4. 결 론

본 연구에서는 고속철도 궤도의 유지보수에서 중요하게 부각되는 뜯침목 문제를 분석할 수 있는 차량 및 궤도의 상호작용해석 기법을 개발하고 검증하였다.

침목 하면의 도상이 침하하여 침목과 도상이 분리되는 경우에 궤광의 자중에 의하여 발생하는 초기 궤도면틀림량과 잔여 들뜸량을 효율적으로 계산할 수 있는 정적 비선형 해석기법을 개발하였으며, 초기궤도틀림 및 뜯침목이 있는 구간을 차량이 통과할 때 차량 및 궤도의 거동을 해석할 수 있는 동적 차량/궤도 상호작용 해석기법을 개발하였다. 개발된 해석기법을 검증하기 위하여 일본 철도종합연구소의 Ono 등 [11]이 수행한 연구와 본 해석기법의 계산치를 비교한 결과 두 값이 대체로 일치함을 확인할 수 있었다. 본 연구를 통하여 개발된 궤도해석프로그램은 뜯침목 발생 구간의 유지보수 방법 개선 등 실용적으로 유용한 정보를 제공하고, 궤도틀림 발생구간의 궤도동적거동을 해석하는 데 유용한 자료가 될 것으로 사료된다. 향후 뜯침목 구간의 현장계측 및 실험적 연구와 사례조사 연구 등의 후속 연구를 통하여 뜯침목의 발생원인과 거동특성 규명을 위한 추가 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] W. Zhai, Z. Cai (1997) Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track, *Computer & structures*, 63(5), pp. 987-997.
 [2] Y.Q. Sun, M. Dhanasekar (2002) A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system, *Int. J. of Solids and Structures*, 39(5), pp. 1337-1359.
 [3] X.S. Jin, Z.F. Wen, K.Y. Wang, et al (2006) Three-dimensional train-track model for study of rail corrugation. *J. of Sound and Vibration*, p. 293.
 [4] G. Xie, S.D. Iwnicki (2008) Simulation of wear on a rough rail using a time-domain wheel-track interaction model. *Wear*, 265, pp. 1572-1583, pp. 830-855.
 [5] R.G. Dong, S. Sankar, R.V. Dukkipati (1994) A finite element model of railway track and its application to the wheel flat problem, *Proc. Instn Mech. Engrs, Part F: J. of Rail and Rapid*

Transit, 208, pp. 61-72.
 [6] S.C. Yang (2011) Investigation of the maintenance criteria for the rail surface defects in high-speed railways, *Journal of Korean Society for Railway*, 14(6), pp. 535-544.
 [7] K. Koro, K. Abe, M. Ishida, T. Suzuki (2004) Timoshenko beam finite element for vehicle-track vibration analysis and its application to jointed railway track, *Proc. Instn Mech. Engrs, Part F: J. of Rail and Rapid Transit*, 218, pp. 159-172.
 [8] A. Lundqvist, T. Dahlberg (2005) Load impact on railway track due to unsupported sleepers, *Proc. Instn Mech. Engrs, Part F: J. of Rail and Rapid Transit*, 219, pp. 67-77.
 [9] Y. Bezin, S.D. Iwnicki, M. Cavalletti, E. deVries, et al (2009) An investigation of sleeper voids using a flexible track model integrated with railway multi-body dynamics, *Proc. Instn Mech. Engrs, Part F: J. of Rail and Rapid Transit*, 223, pp. 597-607.
 [10] S.G. Zhang, X.B. Xiao, Z.F. Wen, X.S. Jin (2008) Effect of unsupported sleepers on wheel/rail normal load, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28, pp. 662-673.
 [11] S. Ono, M. Ishida, M. Uchida (2001) Prediction of the growth of track irregularity using track dynamic model, *RTRI report*, 15(4), pp. 39-44.
 [12] S.C. Yang (2009) Enhancement of the finite-element method for the analysis of vertical train-track interactions, *Proc Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 223, pp. 609-620.
 [13] W. Zhai, Z. Cai (1997) Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track, *Computer & structures*, 63(5), pp. 987-997.
 [14] X. Lei, N.A. Noda (2002) Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile, *J. of Sound and Vibration*, 258(1), pp. 147-165.
 [15] R.V. Dukkipati (2000) *Vehicle Dynamics*, CRC Press, USA.
 [16] S.C. Yang, E. Kim (2012) Effect on vehicle and track interaction of installation faults in the concrete bearing surface of a direct-fixation track, *J. of Sound and Vibration*, 331(1), pp. 192-212.

접수일(2011년 9월 16일), 수정일(2011년 12월 26일), 게재확정일(2012년 3월 16일)