

치밀골의 탄성 텐서 요소 경계

윤 원 석* · 윤 영 준**

The bounds for the elasticity tensor components of cortical bone

Won-Sok Yoon · Young-June Yoon

요 약

뼈는 미네랄과 콜라겐으로 이루어진 복합 재료이고 횡방향 대칭의 역학적인 성질을 갖는다. 뼈의 유효 탄성 상수를 찾기 위해서는 복합재료역학에서 경계조건을 사용하여 그 값을 예측하고 있다. 그 방법들 중 하나인 보이트-로이스 경계조건은 근사값을 이용해서 유효 탄성 계수를 추정하는 방법이다. 기존의 방법은 고유값의 경계조건에 관한 경계조건을 보이지만, 이번 연구에서 우리는 수학적으로 이 경계조건이 각각의 탄성계수에 관해서 성립함을 보였다.

ABSTRACT

The bone material is a composite material consisted of collagen and mineral crystals. Also it shows transversely isotropic symmetry. So far none has shown that the components of the elasticity tensor satisfy the Voigt and Reuss bounds. To determine the effective elastic constant of bone material, the Voigt and Reuss bounds are employed and we show that the components of the elasticity tensor satisfy the Voigt and Reuss bounds. Mathematically this bounds are satisfied on two conditions only out of four conditions.

Keywords : Composite mechanics, Orthopaedics, biomechanics, elasticity, Voigt-Reuss bounds

1. 서 론

치밀골의 물성치는 직교 이방적(orthotropic)이거나 횡방향적(transversely isotropic)이라고 설명할 수 있다. [1], [2] 직교 이방적인 대칭은 세 개의 수직인 대칭축이 서로 만나는 특성을 보이며, 대칭면은 한쪽면과 다른 쪽 면을 대칭을 나타내므로

서로 같다고 할 수 있다. 이러한 물성치는 탄성 텐서(elasticity tensor) 내에 있는 요소 또는 성분(components)에 의해서 표현될 수 있으며, 이는 실험적인 방법, 예를 들면 인장 시험이라든지 비틀림 시험에 의해서 측정할 수 있다. 직교 이방성 물성치는 9개의 독립적인 탄성계수로 이루어지는 반면, 횡방향 물성치는 5개의 독립적인 탄성계수로

* 한양대학교 기계공학부 학사과정

** 교신저자 한양대학교 기계공학부 조교수 (yoon.youngjune@gmail.com)

접수일자 : 2012년 1월 16일, 수정일자 : 2012년 1월 31일, 심사완료일자 : 2012년 2월 7일

이루어져 있다. 또한 가장 간단한 물성치인 등방성 (isotropy)인 경우는 2개의 물성치로 이루어져 있다. 실험을 통해 측정되거나 추정된 골조직의 탄성 계수는 이전에 말했듯이 직교 이방적이거나 횡방적인 성질을 쉽게 찾을 수 있다.[2], [3], [4] 이런 연구결과는 다른 논문에서도 찾아 볼 수 있는데, Yoon[4], [5]는 골조직의 단위를 단계적으로 나노미터에서 마이크로 길이의 크기로 세분화 하여서 이방성 물성치를 예측하였다. 또한 치밀골의 골조직을 구성하는 골단위(osteon)의 탄성계수를 다공 탄성이론과 탄성이론 중 평균 이론을 이용하여 직교 이방성과 횡방성을 갖는 탄성계수로 예측하였다. 비슷한 방법으로 Hellmich[3]는 골조직의 이방성 물성치를 예측하였지만, 실제의 미네랄의 모양은 바늘모양과 판 모양으로 알려져 있는 반면 계산의 단순화를 위하여 미네랄의 형태를 단순한 타원 형태로 가정하여서 계산하였다.

이 논문에서는 나노미터에서 마이크로미터까지의 미세구조상 물성치를 예측하는 대신 Voigt-Reuss bounds를 사용하여서 기존의 측정된 직교 이방성 물성치를 횡방적 물성치로 변환한 후 해석적인 방법을 사용하여 결과치를 도출하였으며 도출된 값은 몇 가지 조건에서만 성립된다는 결론을 갖는다. 여기서 사용한 이론인 Voigt과 Reuss 경계는 미네랄의 형태를 정확하게 모르는 경우 골조직의 유효 탄성 계수를 추정하는데 가장 간단한 방법이다. Voigt 경계는 상계(upper bound)로도 불리면서 그림과 같이 동일한 고정된 변형률이 두 가지 물질로 이루어진 골조직에 작용했을 때로 생각할 수 있다. Reuss 경계는 하계(lower bound)로도 불리면서 그림과 같이

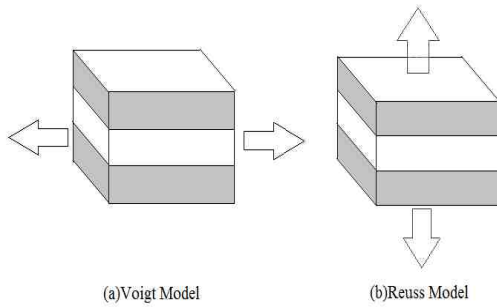


그림 1. 보이트 모델과 리우스 모델
Fig. 1. (a)Voigt Model, (b)Reuss Model

동일한 응력이 골조직에 작용하는 경우이다. 골조직을 다음과 같이 두 가지 극한적인 모델로 단순화함으로써 탄성계수의 경계값을 생성하여 범위를 좁혀서 예측할 수 있다.

Yoon[6]에서 직교 이방적인 골조직탄성 계수를 이용해서 Voigt과 Reuss 경계를 설정하는 수학적 방법을 제시한다. 이 방법을 이용하여 탄성 텐서의 각 요소들에 대한 횡방적 경계값을 설정하고자 한다.

II. 본 론

1. Voigt과 Reuss 경계

고유값 (eigenvalue)은 다음과 같은 경계조건을 만족한다. 이는 Voigt과 Reuss bounds에 의하여 다음과 같이 설정된다.

$$A_k^R \leq A_k^{eff} \leq A_k^V \tag{1}$$

R은 Reuss 경계를, V는 Voigt 경계를 의미한다. 고유값에 대한 이 부등식은 변형률 에너지 (strain energy)로부터 얻어지며, 이 부등식의 설정은 Yoon[6]와 Cowin.[7]에서 찾아볼 수 있다. 표 1에서 기술된 Ashman[1]의 직교 이방적인 뼈의 데이터를 이용하여 고유값에 대한 Voigt과 Reuss 경계를 부등식에 값을 대입해서 설정하면, 아래 부등식과 같이, Yoon[6]에서도 표현되어 있듯이, 나타낼 수 있다. 식 (2)는 distributor라고 하는 각각의 탄성텐서 성분에 대한 연관을 나타내는 부등식이고 나머지 식 (3), (4), (5), (6)은 횡방적 물성치의 고유값에 관한 부등식이다.

$$\frac{\hat{s}_{11}^{Ort} + 2\hat{s}_{12}^{Ort} + \hat{s}_{22}^{Ort} - 2\hat{s}_{33}^{Ort}}{2\sqrt{2}(\hat{s}_{13}^{Ort} + \hat{s}_{23}^{Ort})} \tag{2}$$

$$\leq \frac{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex}}{2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}}$$

$$\leq \frac{\hat{c}_{11}^{Ort} + 2\hat{c}_{12}^{Ort} + \hat{c}_{22}^{Ort} - 2\hat{c}_{33}^{Ort}}{2\sqrt{2}(\hat{c}_{13}^{Ort} + \hat{c}_{23}^{Ort})}$$

$$\frac{4}{\hat{s}_{11}^{Ort} + \hat{s}_{22}^{Ort} + 2\hat{s}_{12}^{Ort} + 2\hat{s}_{33}^{Ort} + 2\sqrt{2}(\hat{s}_{13}^{Ort} + \hat{s}_{23}^{Ort})\sec(2\alpha^R)}$$

$$\leq \frac{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} + \hat{c}_{33}^{eff,Hex} + 2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}\sec(2\alpha_{eff})}{2}$$

$$\leq \frac{\hat{c}_{11}^{Ort} + \hat{c}_{22}^{Ort} + 2\hat{c}_{12}^{Ort} + 2\hat{c}_{33}^{Ort} + 2\sqrt{2}(\hat{c}_{13}^{Ort} + \hat{c}_{23}^{Ort})\sec(2\alpha^V)}{4} \quad (3)$$

$$\frac{4}{\hat{s}_{11}^{Ort} + \hat{s}_{22}^{Ort} + 2\hat{s}_{12}^{Ort} + 2\hat{s}_{33}^{Ort} - 2\sqrt{2}(\hat{s}_{13}^{Ort} + \hat{s}_{23}^{Ort})\sec(2\alpha^R)}$$

$$\leq \frac{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} + \hat{c}_{33}^{eff,Hex} - 2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}\sec(2\alpha_{eff})}{2}$$

$$\leq \frac{\hat{c}_{11}^{Ort} + \hat{c}_{22}^{Ort} + 2\hat{c}_{12}^{Ort} + 2\hat{c}_{33}^{Ort} - 2\sqrt{2}(\hat{c}_{13}^{Ort} + \hat{c}_{23}^{Ort})\sec(2\alpha^V)}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{\hat{s}_{11}^{Ort} + \hat{s}_{22}^{Ort} - 2\hat{s}_{12}^{Ort} + 2\hat{s}_{66}^{Ort}} \quad (5)$$

$$\leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} - \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq \frac{1}{4}(\hat{c}_{11}^{Ort} + \hat{c}_{22}^{Ort} - 2\hat{c}_{12}^{Ort})2\hat{c}_{66}^{Ort}$$

표 1. 실험적으로 측정된 직교 이방적인 치밀골의 탄성 요소값
 Table 1. The experimentally measured orthotropic technical elastic constants of cortical bone from Ashman et al. (1984)

E_1 (GPa)	12.0	ν_{12}	0.376
E_2 (GPa)	13.4	ν_{13}	0.222
E_3 (GPa)	20.0	ν_{23}	0.235
G_{12} (GPa)	4.53	ν_{21}	0.422
G_{23} (GPa)	5.61	ν_{31}	0.371
G_{13} (GPa)	6.23	ν_{32}	0.350

$$\frac{2}{\hat{s}_{44}^{Ort} + \hat{s}_{55}^{Ort}} \leq \hat{c}_{44}^{eff,Hex} \leq \frac{1}{2}(\hat{c}_{44}^{Ort} + \hat{c}_{55}^{Ort}) \quad (6)$$

다음의 표 1의 값을 각각의 부등식에 대입하면 아래와 같이 식으로 표현된다.

$$0.048 \leq \frac{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex}}{2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}} \leq 0.051 \quad (7)$$

$$\frac{42.978 \leq}{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} + \hat{c}_{33}^{eff,Hex} + 2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}\sec(2\alpha_{eff})} \quad (8)$$

$$\leq 43.097$$

$$\frac{13.459 \leq}{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} + \hat{c}_{33}^{eff,Hex} - 2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}\sec(2\alpha_{eff})} \quad (9)$$

$$\leq 13.479$$

$$9.059 \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} - \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq 9.079 \quad (10)$$

$$11.808 \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 11.84 \quad (11)$$

부등식 (8)와 (9)을 더하면 식 (12)를, 빼면 식 (13)의 결과를 얻을 수 있다.

$$56.437 \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} + \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 56.576 \quad (12)$$

$$29.499 \leq 2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 29.638 \quad (13)$$

다음으로 (8)와 (9)를 곱하면서 아래의 조건을 만족 하는 삼각함수 식 (14)을 이용해서 탄성요소로 표현을 하면 아래와 같다.

$$1 + \tan^2(2\alpha_{eff}) = \sec^2(2\alpha_{eff}) \quad (14)$$

$$\frac{\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex}}{2\sqrt{2}\hat{c}_{13}^{eff,Hex}} = \tan(2\alpha_{eff}) \quad (15)$$

$$578.44 \leq \quad (16)$$

$$(\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex})\hat{c}_{33}^{eff,Hex} - 2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \leq 580.9$$

방정식 (16)으로부터 각 탄성 텐서의 요소에 대한 조건이 부족하므로 몇 가지 가정을 통해 각 요소의 부등식을 구해낸 후 가정에 부합하는 절차를 통해서 최종적으로 값을 산출한다.

2. 가정 및 계산

1) $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 인 경우

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 이므로 방정식 (7)의 양변에 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 를 곱한다. 양수를 곱하므로 부등식의 방향은 바뀌지 않는다.

$$\begin{aligned}
 & 0.138 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (17) \\
 & \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq \\
 & 0.144 \hat{c}_{13}^{eff,Hex}
 \end{aligned}$$

방정식 (12)를 (17)에 대입한다면 식 (18)을, 반대로 방정식 (17)에서 (12)를 빼다면 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 으로 표현된 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 에 관한 부등식 (19)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & 28.22 + 0.069 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (18) \\
 & \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq \\
 & 28.29 + 0.072 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \\
 & 28.219 - 0.072 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (19) \\
 & \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq \\
 & 28.288 - 0.069 \hat{c}_{13}^{eff,Hex}
 \end{aligned}$$

이와 유사하게 방정식 (10)과 (18)을 더하고 빼면 $\hat{c}_{11}^{eff,Hex}$ 과 $\hat{c}_{12}^{eff,Hex}$ 를 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 에 관해서 부등식을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & 18.639 + 0.035 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (20) \\
 & \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} \leq \\
 & 18.684 + 0.036 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \\
 & 9.57 + 0.035 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (21) \\
 & \leq \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq \\
 & 9.615 + 0.036 \hat{c}_{13}^{eff,Hex}
 \end{aligned}$$

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 로 표현된 방정식 (18)과 (19)를 (16)에 넣는다면 방정식 (16)은 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 만으로 표현할 수 있다.

모든 요소의 범위를 알기 위해서는 추가적인 가정이 필요하다. $\hat{c}_{33}^{eff,Hex}$ 의 부호가 확정이 되지 않

았으므로 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 의 부호를 고려해서 가정을 세운다.

(1) $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 이면서 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0$ 인 경우 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0$ 의 조건이 있으므로 식 (18)과 (20)을 곱하면 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & 796.31 - 84.657 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (22) \\
 & - 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \\
 & \leq (\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex}) \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq \\
 & 800.21 + 84.864 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \\
 & - 4.96 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2
 \end{aligned}$$

또한 식 (16)을 식 (22)에서 빼다면 아래 부등식 형태가 나온다.

$$\begin{aligned}
 & 215.41 - 84.657 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (23) \\
 & - 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \\
 & \leq 2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \leq \\
 & 219.77 + 84.864 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \\
 & - 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2
 \end{aligned}$$

부등식 (23)은 좌측 부등식과 우측 부등식으로 나눌 수 있다. 이렇게 따로 나누어진 부등식 중 좌측 부등식만을 살펴보면 $ax^2 + bx + c = 0$ 인 방정식의 근이

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (24)$$

라는 것과 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 가정을 생각한다면 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 에 대한 부등식을 구할 수 있다.

$$\hat{c}_{13}^{eff,Hex} \geq 10.366 \quad (25)$$

마찬가지 방법으로 우측 부등식과 같은 조건으로 풀다면

$$0 < \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 10.49 \quad (26)$$

이다. 두 개의 부등식 (25)와 (26)의 공통되는 영역을 근의 범위로 취하면 아래 부등식 (27)이 나온다.

$$10.366 \leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 10.49 \quad (27)$$

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 이라는 가정에 부합하므로 나머지 요소를 구하기 위해 식 (27)을 식 (19), (20), (21)에 대입하면 아래의 결과값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} 27.464 &\leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 27.573 & (28) \\ 19.002 &\leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 19.062 \\ 9.933 &\leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 9.993 \end{aligned}$$

부등식 (28)에서 가정 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0$ 를 만족하므로 위에서 구한 모든 근의 범위는 옳다.

(2) $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 이면서 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0$ 인 경우

$\hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0$ 라는 가정을 했으므로 식 (18)과 (19)를 곱하면 아래와 같은 부등식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &28.288 \times 28.219 - 4.968 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} & (29) \\ &\quad - 0.072^2 (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \\ &\leq (\hat{c}_{13}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex}) \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &28.219 \times 28.288 + 4.761 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \\ &\quad - 0.069^2 (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \end{aligned}$$

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 에 대한 부등식을 얻기 위해서 식 (29)를 식 (16)으로부터 뺀다.

$$\begin{aligned} &0.069^2 (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 - 4.761 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} - 219.818 \\ &\quad \leq -2 (\hat{c}_{33}^{eff,Hex})^2 \leq \\ &0.072^2 (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 - 4.968 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} - 217.36 & (30) \end{aligned}$$

앞선 가정의 과정과 유사하게 부등식 (30)을 좌측 부등식과 우측 부등식으로 나눈 후 각각을 풀고 공통부분을 취하면 다음과 같다.

$$10.41 \leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 10.4725 \quad (31)$$

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 이라는 가정에 부합하므로 나머지 요소를 구하기 위해 식 (31)을 식 (19), (20), (21)에 대입하면 아래의 결과값을 구할 수 있다.

$$27.465 \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 27.57 \quad (32)$$

부등식 (31)은 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} > 0$ 라는 가정을 만족했지만 부등식 (32)은 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0$ 이라는 조건을 충족시키지 못하였으므로 근의 범위를 구할 수 없다.

2) $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} < 0$ 인 경우

앞선 가정과 이번 가정은 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} < 0$ 라는 조건을 갖는다. 식 (7)에 위 조건을 통해 부등식을 정리하면 식 (33)을 구할 수 있다.

$$0.144 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \\ &\leq 0.138 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \end{aligned}$$

부등식 (12)와 (33)을 더하고 또한 빼면 식 (34)와 식 (35)를 구할 수 있다.

$$28.219 + 0.072 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (34)$$

$$\leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq$$

$$28.288 + 0.069 \hat{c}_{13}^{eff,Hex}$$

$$28.219 - 0.068 \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \quad (35)$$

$$\leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq$$

$$28.288 - 0.072 \hat{c}_{13}^{eff,Hex}$$

부등식 (10)에 식 (34)을 연산한다면 $\hat{c}_{11}^{eff,Hex}$ 과 $\hat{c}_{12}^{eff,Hex}$ 에 대한 부등식을 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 으로 나타낼 수 있다.

식 (16)을 사용하기 위해서 $\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex}$ 과 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex}$ 의 범위를 알아야 한다. 가정 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} < 0$ 로부터 $\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 가 음수임을 알 수 있다. 그리고 식 (12)으로부터 $\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} + \hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 가 양수임을 확인할 수 있다. 따라서 두 가지 사실로부터 아래와 같은 4 가지 경우를 생각할 수 있다.

경우 1

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} > 0 \text{ 이고 } \hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0,$$

$$\text{그리고 } \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} < \hat{c}_{33}^{eff,Hex}$$

경우 2

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} < 0 \text{ 이고 } \hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0,$$

$$\text{그리고 } |\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex}| < \hat{c}_{33}^{eff,Hex}$$

경우 3

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} > 0 \text{ 이고 } \hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0,$$

$$\text{그리고 } \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0$$

경우 4

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} < 0 \text{ 이고 } \hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0,$$

$$\text{그리고 } \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0$$

이 네 가지 경우에서 경우 1과 경우 2만이 주어진 조건인

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex} < 0 \text{ 과}$$

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} - \hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0 \text{ 을}$$

만족하므로 두 가지 경우만을 살펴볼 것이다.

$$(1) \hat{c}_{13}^{eff,Hex} < 0 \text{ 이면서 } \hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0 \text{ 이고}$$

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} > 0 \text{ 인 경우}$$

경우1에서 식 (34)가 식 (35)에 곱해짐으로써 아

래 식 (38)을 얻을 수 있다.

$$28.219^2 + 112.87 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \tag{38}$$

$$- 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2$$

$$\leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq$$

$$29.288^2 - 84.86 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex}$$

$$- 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2$$

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 에 대한 부등식을 찾기 위해서 식 (16)을 식 (38)로부터 빼야 한다.

$$28.219^2 - 580.9 + 112.87 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \tag{39}$$

$$- 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2$$

$$\leq 2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 \leq$$

$$29.288^2 - 578.441 - 84.86 \times 10^{-3} \hat{c}_{13}^{eff,Hex}$$

$$- 4.968 \times 10^{-3} (\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2$$

부등식 (39)을 좌측 부등식과 우측 부등식으로 나누어서 근의 공식을 이용하여 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 의 범위를 구할 수 있다.

$$-10.528 \leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq -10.344 \tag{40}$$

위의 부등식으로부터 조건을 만족하는 결과를 알 수 있다. 그리고 부등식 (40)의 범위를 나머지 요소의 부등식인 (35), (36), (37)에 적용한다면 아래와 같은 범위를 도출할 수 있다.

$$18.26 \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} \leq 18.323 \tag{41}$$

$$9.19 \leq \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq 9.2576 \tag{42}$$

$$28.933 \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 29.047 \tag{43}$$

$$(2) \hat{c}_{13}^{eff,Hex} < 0 \text{ 이면서 } \hat{c}_{33}^{eff,Hex} > 0 \text{ 이고}$$

$$\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} < 0 \text{ 인 경우}$$

$$|\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex}| < \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \text{ 에 대한 식을 만들}$$

기 위해서 식(34)과 식(35)을 곱한다.

$$\begin{aligned}
 & 0.069^2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 + 4.761 \times 10^{-3}\hat{c}_{13}^{eff,Hex} - 28.288 \times 28.219 \\
 & \leq -(\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex})\hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq \\
 & 0.072^2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 + 4.968 \times 10^{-3}\hat{c}_{13}^{eff,Hex} - 28.288 \times 28.219
 \end{aligned} \tag{44}$$

식(16) 식(44)에 더한다.

$$\begin{aligned}
 & 0.069^2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 + 4.761 \times 10^{-3}\hat{c}_{13}^{eff,Hex} - 28.288 \times 28.219 + 578.441 \\
 & \leq -(\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex})\hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq \\
 & 0.072^2(\hat{c}_{13}^{eff,Hex})^2 + 4.968 \times 10^{-3}\hat{c}_{13}^{eff,Hex} - 28.288 \times 28.219 + 580.9
 \end{aligned} \tag{45}$$

앞선 과정과 유사하게 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 의 범위를 구하면 다음과 같은 부등식을 구할 수 있다.

$$-10.472 \leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq -10.41 \tag{46}$$

위 부등식 값은 가정 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex} < 0$ 을 만족한다. 식 (46)을 나머지 요소의 부등식인 (35), (36), (37)에 적용하고 정리한다면 아래와 같은 범위를 도출할 수 있다.

$$27.46 \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq 27.574 \tag{47}$$

$$28.933 \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 29.047 \tag{48}$$

위 결과값을 미루어 보았을 때

$|\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex}| < \hat{c}_{33}^{eff,Hex}$ 을 만족하나 식 (47)은 가정과는 달리 양수이므로 이 조건은 해를 만족시키지 못한다.

III. 결론

골조직의 물성치를 직교이방성에서 횡방적 물성치로 변환을 시키면서 이에 따른 각각의 탄성텐서 요소들의 경계조건이 성립하는지를 살펴보았다. 가

장 먼저 고유값의 경계조건에 해당하는 부등식 (1)–(5)를 통해 골조직의 유효 탄성 계수 요소에 대한 부등식을 구성했고, 이전 연구, Yoon[6]에서는 유효 횡방적 탄성 계수를 부등식을 등식으로 바꾸는 방법을 사용하여 간단하게 표현한 반면 이 연구에서는 비슷한 결과를 다른 방법을 이용하여 표현하였다. 이 논문에서는 몇 가지 가정을 세워서 횡방적 유효 탄성 계수의 경계를 설정하여 부등식의 해를 구하였다. 우선적으로 $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 의 음수, 양수 여부로 나누었고, $\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 가 양수일 경우 반드시 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex}$ 는 양수만 되고 모든 요소의 값은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 19.002 & \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} \leq 19.062 \\
 9.933 & \leq \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq 9.993 \\
 10.366 & \leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq 10.49 \\
 27.464 & \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 27.573 \\
 11.808 & \leq \hat{c}_{44}^{eff,Hex} \leq 11.84
 \end{aligned} \tag{49}$$

$\hat{c}_{13}^{eff,Hex}$ 가 음수일 경우, $\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} > 0$ 이고 $\hat{c}_{33}^{eff,Hex}$, 그리고 $\hat{c}_{11}^{eff,Hex} + \hat{c}_{12}^{eff,Hex} < \hat{c}_{33}^{eff,Hex}$ 인 조건만을 만족하며 아래와 같은 요소의 범위를 갖는다.

$$\begin{aligned}
 18.26 & \leq \hat{c}_{11}^{eff,Hex} \leq 18.323 \\
 9.19 & \leq \hat{c}_{12}^{eff,Hex} \leq 9.258 \\
 -10.538 & \leq \hat{c}_{13}^{eff,Hex} \leq -10.344 \\
 28.933 & \leq \hat{c}_{33}^{eff,Hex} \leq 29.047 \\
 11.808 & \leq \hat{c}_{44}^{eff,Hex} \leq 11.84
 \end{aligned} \tag{50}$$

이를 통해서 실험적이거나 수치적인 과정을 거치지 않더라도 알려진 값이나 근사값을 통해서 각각의 치밀골의 유효 탄성 요소에 대한 범위를 추정할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국연구재단 연구비 (2010-0023070)의 지원에 의해서 이루어졌음.

참 고 문 헌

[1] R. B. Ashman, S. C. Cowin, W. C. Van Buskirk and J. C. Rice, "A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone," *Journal of Biomechanics*, vol 17, no. 5, pp.349-361, 1984.

[2] J. L. Katz, "Hard tissue as a composite material-I. Bounds on the elastic behavior," *Journal of Biomechanical Engineering*, vol 4, pp. 455-573, 1971.

[3] C. Hellmich., F.J. Ulm, "Micromechanical Model for Ultrastructural Stiffness of Mineralized Tissues," *Acoustic Society America*, vol 8, pp. 898-908, 2002.

[4] Y. J. Yoon, S. C. Cowin, "An estimate of anisotropic poroelastic constants of an osteon," *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol 7, pp.13-26, 2008.

[5] Y. J. Yoon, S. C. Cowin, "The estimated elastic constants for a single bone osteonal lamella," *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol 7, pp. 1-11, 2008.

[6] Y. J. Yoon, G. Yang, S. C. Cowin, "Estimation of the effective transversely isotropic elastic constants of a material form known values of the material's orthotropic elastic constants," *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol 1, pp. 83-93, 2002.

[7] G. Yang, S. C. Cowin, "Bounds on the Effective Anisotropic Elastic Constants," *Journal of Elasticity*, vol 57, pp. 1-24, 1999.

저자약력

윤 원 석 (Won-Sok Yoon)

비회원



2011년-현재 한양대학교
기계공학부 학사 과정

<관심분야> 기계 설계 및 피로 파괴

윤 영 준 (Young-June Yoon)

정회원



2005년 뉴욕시립대학교 공학박사
2006년 텍사스주립대학교 박사
후연구원
2008년 워싱턴대학교 박사후연
구원
2009년 명지대학교 산업대학원
객원조교수
현재 한양대학교 기계공학부 조
교수

<관심분야> 생체역학, 세포 및 조직 수학적 모델링