

주파수영역 탄성파모델링에 대한 CFS-PML경계조건의 적용 및 개선

손민경 · 조창수*

한국지질자원연구원 지진연구센터

Application and Improvement of Complex Frequency Shifted Perfectly Matched Layers for Elastic Wave Modeling in the Frequency-domain

Minkyung Son and Chang Soo Cho*

Earthquake Research Center, Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources

요약: 탄성파의 수치 모델링은 유한한 경계에서 발생하는 인공적인 반사파의 제거를 위한 경계조건을 필요로 한다. 이 연구에서는 주파수영역의 탄성파 수치 모델링에 CFS-PML (Complex Frequency Shifted-Perfectly Matched Layer) 경계조건을 적용하였다. 수치모델링 검증을 위해 Lamb's Problem의 해석해와 수치모델링 결과를 비교한 결과 일치하였다. 모형 내의 운동에너지, 최대크기오차, 그리고 스펙트럼오차를 통하여 CFS-PML경계조건이 기존의 흡수경계조건들 보다 유한경계에서 발생한 인공적인 반사파를 효과적으로 제거할 수 있음을 확인하였다. CFS-PML경계조건의 변수 k_{\max} 와 α_{\max} 의 최적값은 운동에너지를 이용하여 산정할 수 있었다. 또한, 주파수에 따른 함수로 정의된 α_{\max} 를 변수로 갖는 변형된 CFS-PML경계조건을 제안하여 기존 PML경계조건, CFS-PML경계조건, 그리고 변형된 CFS-PML경계조건의 성능을 운동에너지, 최대크기오차, 스펙트럼 오차로 비교하였다. 기존 PML경계조건에서 나타난 스쳐가는 입사각에 대한 반사파 문제가 CFS-PML경계조건, 그리고 변형된 CFS-PML경계조건에서는 개선되었다.

주요어: CFS-PML, 주파수영역, 유한요소법, 탄성파모델링

Abstract: Absorbing boundary conditions are used to mitigate undesired reflections that can arise at the model's truncation boundaries. We apply a complex frequency shifted perfectly matched layer (CFS-PML) to elastic wave modeling in the frequency domain. Modeling results show that the performance of our implementation is superior to other absorbing boundaries. We consider the coefficients of CFS-PML to be optimal when the kinetic energy becomes to the minimum, and propose the modified CFS-PML that has the CFS-PML coefficient α_{\max} defined as a function of frequency. Results with CFS-PML and modified CFS-PML are significantly improved compared with those of the classical PML technique suffering from large spurious reflections at grazing incidence.

Keywords: CFS-PML, frequency-domain, FEM, elastic wave modeling

서론

탄성파의 수치모델링은 복잡한 매질로 전파하는 탄성파를 이해하는데 있어 매우 유용하다(Drossaert & Giannopoulos, 2007a). 탄성파 수치 모델링 방법으로는 유한차분법(Virieux, 1986), 유한요소법(Bao *et al.*, 1998), 그리고 SEM(Komatitsch & Tromp, 1999)이 있다. 실제 전파가 일어나는 반무한 영역은 수치 모델링 과정에서 계산 시간과 비용을 고려하여 유한한 영역으로 제한되는데, 이로 인해 관심 영역의 경계에 도달한 파는 실제 반무한 매질에서는 존재하지 않는 반사파를 생성한다.

이를 해결하기 위하여 흡수경계조건(Clayton and Engquist, 1977; Higdon, 1991), 스폰지경계조건(Cerjan *et al.*, 1985; Shin, 1995) 등이 제안되었다. 그러나 위와 같은 경계조건들은 경계면에 스쳐가듯 거의 평행인 입사각(스쳐가는 입사각, grazing incidence)에 대하여 효과적으로 작용하지 못하고, 모든 입사각에 대하여 저주파수의 에너지를 반사하였다(Komatitsch and Martin, 2007).

Berenger (1994)는 맥스웰 방정식에 대하여 PML (Perfectly Matched Layer)경계조건을 도입하였고, 이산화 되지 않은 PML경계조건은 모든 입사각, 모든 주파수에 대하여 0인 반사계수를 가졌다. 이러한 PML경계조건은 시간영역 파동방정식에 대하여 Chew and Liu (1996), Collino and Tsogka (2001)에 의해 적용되었다. 그러나 이산화 된 PML경계조건은 큰 입사각, 즉 경계를 스쳐가는 입사각에 대하여 여전히 불완전한

2012년 5월 17일 접수; 2012년 7월 5일 수정; 2012년 7월 23일 채택;
*Corresponding author
E-mail: nemex@kigam.re.kr
Address: 124 Gwanghang-no Yuseong-gu, Daejeon 305-350, Korea

흡수를 보였다(Collino and Monk, 1998; Komatitsch and Martin, 2007; Zhang and Shen, 2010). 이러한 현상을 맥스웰 방정식의 모델링에서 Roden and Gedney (2000)가 개선하였고, Berenger (2002)는 이를 CFS-PML (complex frequency shifted PML)이라 하였다. 이후 Drossaert and Giannopoulos (2007a, b), Cho and Lee (2009)는 이를 시간영역 탄성과 수치 모델링에 적용하였다.

주파수영역 탄성과 모델링은 본래 Tarantola (1984)에 의하여 시간영역에서 제안되었던 완전파형역산에 대하여 Pratt (1990)의 연구 이후로 주로 사용되고 있다(Virieux and Operto, 2009). 이 연구에서는 주파수영역의 탄성과 수치 모델링에 대하여 CFS-PML경계조건을 적용하고, 그 결과를 Lamb's Problem의 해와 비교를 통하여 검증하였다. 또한, CFS-PML경계조건의 최적 변수를 도출하고, CFS-PML경계조건의 변수를 주파수영역 모델링의 장점을 이용하여 주파수에 대한 함수로 변형하였다. 그리고 변형된 CFS-PML경계조건, CFS-PML경계조건, 기존의 PML경계조건, 그리고 고전적인 흡수경계조건인 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건, Higdon (1991)의 경계조건의 성능과 비교하였다.

CFS-PML경계조건이 적용된 주파수영역의 탄성과 모델링

주파수영역에서의 2차원 파동방정식은 다음 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\tilde{u}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_2}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\mu\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\right)\right\}=0 \\ -\rho\omega^2\tilde{v}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\mu\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\lambda\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_2}\right\}=0 \quad (1) \end{aligned}$$

여기서 \tilde{u} 과 \tilde{v} 는 주파수영역에서의 x_1 방향, x_2 방향에 대한 변위이며, ω 는 각주파수이고, ρ 는 밀도, λ 와 μ 는 라메의 상수이다.

Komatitsch and Martin (2007)에 따라, CFS-PML경계조건이 적용된 x_j 방향에 대한 편미분연산자는 다음 식 (2)와 같이 허수 i 를 포함하여 복소수영역에서 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{\eta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2)$$

이 때, η_j 는 식 (3)과 같다.

$$\eta_j = \kappa_j + \frac{d_j}{\alpha_j + i\omega} \quad (3)$$

여기서 κ_j 는 1보다 큰 실수, d_j 는 감쇠함수, α_j 는 0보다 크거나 같은 실수이며, 모두 x_j 방향에 대한 함수이다.

이 논문에서는 CFS-PML경계조건의 κ_j , d_j 와 α_j 를 x_j 방

향에 대한 2차 함수로 두었다. 예를 들어 x_j 방향으로 시작되는 유한경계에 대하여 κ_j , d_j 와 α_j 는 다음 식 (4)과 같다.

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \kappa_{\max} \xi(x_j) \\ d_j &= d_{\max} \xi(x_j) \\ \alpha_j &= \alpha_{\max} \xi(x_j) \\ \xi(x_j) &= (1-x_j/L)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

단, L 은 PML영역의 길이이다.

식 (1)에 식 (2)를 대입하여 약형식(weak formulation)으로 나타내고 정리하면, 식 (5)와 같고, 이때 기저함수는 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int [-\rho\omega^2 \eta_1 \eta_2 \phi_i \phi_j] \hat{u}_i dx_1 dx_2 \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int \left[\{\lambda+2\mu\} \frac{\eta_2 \partial \phi_i \partial \phi_j}{\eta_1 \partial x_1 \partial x_1} + \mu \frac{\eta_1 \partial \phi_i \partial \phi_j}{\eta_2 \partial x_2 \partial x_2} \right] \hat{u}_i dx_1 dx_2 \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int \left[\lambda \frac{\partial \phi_i \partial \phi_j}{\partial x_2 \partial x_1} + \mu \frac{\partial \phi_i \partial \phi_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \hat{v}_i dx_1 dx_2 = 0 \\ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int [-\rho\omega^2 \eta_1 \eta_2 \phi_i \phi_j] dx_1 dx_2 \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int \left[\mu \frac{\partial \phi_i \partial \phi_j}{\partial x_2 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial \phi_i \partial \phi_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \hat{u}_i dx_1 dx_2 \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int \left[\mu \frac{\eta_2 \partial \phi_i \partial \phi_j}{\eta_1 \partial x_1 \partial x_1} + (\lambda+2\mu) \frac{\eta_1}{\eta_2} \left(\frac{\partial \phi_i \partial \phi_j}{\partial x_2 \partial x_2} \right) \right] \hat{v}_i(dx_1) dx_2 = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \sum_{i=1}^N \hat{u}_i \phi_i \\ \tilde{v} &= \sum_{i=1}^N \hat{v}_i \phi_i \end{aligned} \quad (6)$$

식 (5)을 보면, 유한요소법으로 표현된 파동방정식의 일반적인 강성행렬과 질량행렬에 x_1 와 x_2 방향으로의 CFS-PML경계조건을 구현하는 변수 η_1 와 η_2 가 곱해진 것을 알 수 있다. 따라서 식 (5)를 행렬로서 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다. 이때, \mathbf{K}^g 와 \mathbf{M}^g 는 η_j 가 포함된 강성행렬과 질량행렬이다.

$$[\mathbf{K}^g + \mathbf{M}^g] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

해석해를 통한 수치해의 검증

반무한 매질에 대하여 CFS-PML을 적용한 주파수영역 탄성과 모델링의 결과를 Lamb's Problem의 해와 비교하여 검증하고자 하였다. 해석해는 Berg *et al.* (1994)의 포트란 코드 EX2DDIR을 사용하여 얻었다. 코드 EX2DDIR은 Cagniard-de

Hoop 기법을 기반으로, 변위나 속도에 대하여 임의의 진원시간함수를 사용할 수 있다. 수치해의 검증을 위하여 P파 속도를 3.2 km/s, S파 속도를 1.847 km/s, 그리고 밀도를 2 g/cm³으로 설정하였다. 관심영역은 x 방향과 z 방향 요소 각각 150개로 이루어지며, 여기에 CFS-PML경계조건이 x와 z 방향 각 10개 요소씩 더해진다. 송신원의 위치는 왼쪽 경계에서 0.5 km, 깊이 0.4 km이고, 진원시간함수는 가우스함수의 1계 미분을 따르며 최대 주파수가 18.475 Hz이다.

송신원과 수신기 A, B는 Fig. 1과 같이 위치하였고, 수신기 A에서 기록된 수평성분 변위 u_x 와 수직성분 변위 u_z 는 각각

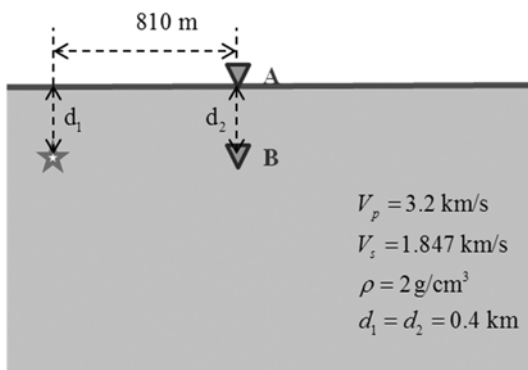


Fig. 1. Material properties and locations of the source (☆) and receivers (▼).

Fig. 2의 (a)와 (b)이고, 수신기 B에서 기록된 수평성분 변위 u_x 와 수직성분 변위 u_z 는 각각 Fig. 2의 (c)와 (d)이다. Fig. 2에서 실선으로 표시된 수치해가 각 성분에 대하여 점선으로 표시된 해석해와 매우 유사함을 확인할 수 있다.

CFS-PML경계조건과 타 흡수경계조건의 적용 결과 비교

Fig. 3과 같은 영역에 대하여 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건, Higdon (1991)의 경계조건, 그리고 CFS-PML경계조건을 적용하였다. 여기서 Higdon (1991)의 경계조건은 시간영역 탄성파 모델링에 대하여 적용되었다. CFS-PML경계조건을 제외한 x 방향과 z 방향 요소는 각 150개이며, PML경계조건이 적용된 요소의 개수는 x와 z 방향 각 10개이다. 그리고 지표면의 송신원은 수직 방향의 힘으로 Fig. 3의 오른쪽 경계에서 0.5 km, 왼쪽 경계에서 1 km 떨어져 위치한다. P파 속도는 3 km/s, S파 속도는 1.73 km/s, 그리고 밀도는 2 g/cm³으로 설정하였고, 송신파형은 가우스함수의 1차 미분 함수를 따르며 최대주파수는 17.3 Hz이다.

Fig. 4 (a)는 Clayton and Engquist (1977), (b)는 Higdon (1991), 그리고 (c)는 CFS-PML경계조건을 적용하여 얻은 탄성파 모델링의 결과이다. 지표면에서 기록된 수평성분의 신호의

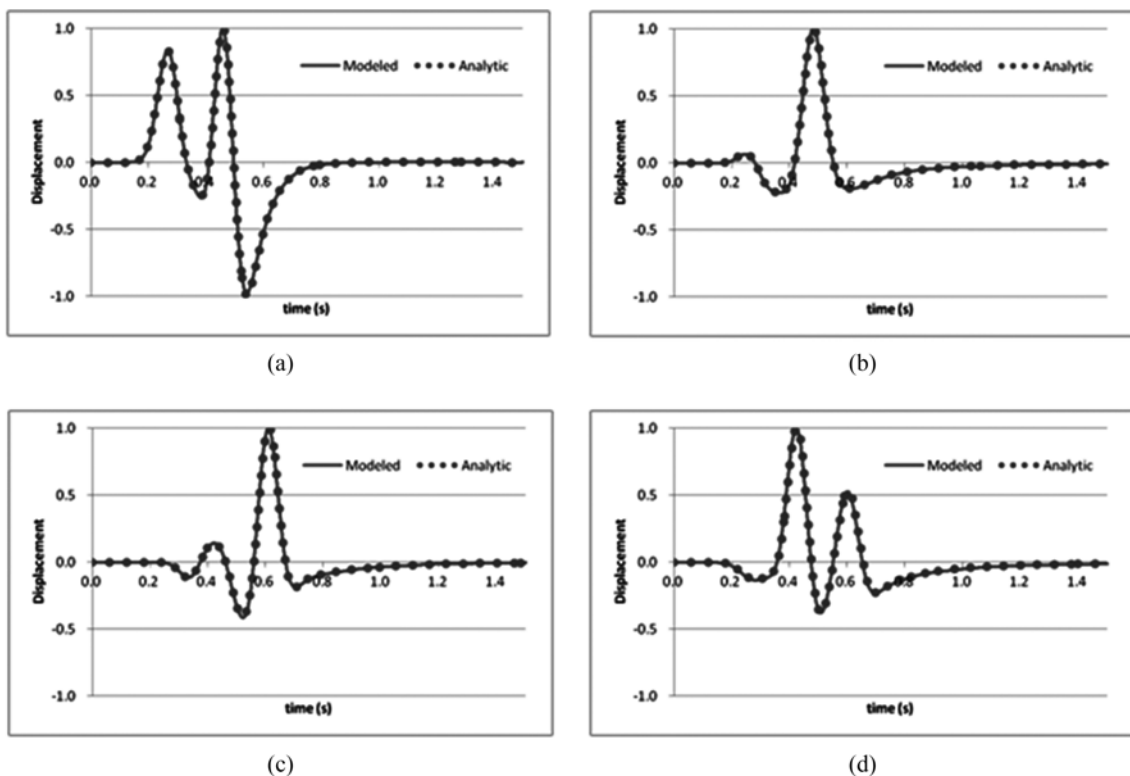


Fig. 2. Computed synthetic seismograms of the u_x (left) and u_z (right) that are shown as dotted lines in the figures (a) and (b) for the receiver A and (c) and (d) for the receiver B, respectively. The computed synthetic seismograms are the same as analytic solutions shown as solid lines in the figures.

최대값과 최소값의 각 3%씩 클리핑하여 도시하였다(기록된 신호를 확대하여 표시하였다). 지표면에서 얻은 수평 성분의 합성 탄성과 기록을 최대이다. Fig. 4 (a)에서는 유한경계에 의해 발생한 인공적인 반사파가 뚜렷이 보이며, (b)에서도 화살표로 표시된 반사파가 관찰된다. 그러나 CFS-PML경계조건이 적용된 (c)에서는 반사파가 거의 보이지 않는다.

경계조건의 성능을 정량적으로 살펴보기 위하여 관심영역내의 운동에너지, 최대크기오차(maximum value error), 그리고 스펙트럼오차(spectrum error)를 정의하여 비교하였다. 먼저, 식 (8)과 같이 운동에너지 E_k 를 정의하였다.

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^2 d\Omega \quad (8)$$

여기서 Ω 는 모델링을 수행하는 관심영역이고, ρ 는 밀도, \mathbf{v} 는 입자의 속도 벡터이다. 경계조건이 이상적으로 적용되었다면, 시간에 따라 파동이 관심영역을 벗어나 전파하므로 운동에너지 E_k 는 감소하는 양상을 보인 후 사라져야 한다.

Fig. 5는 이 절에서 다룬 Fig. 3의 영역에서 시간에 따라 에

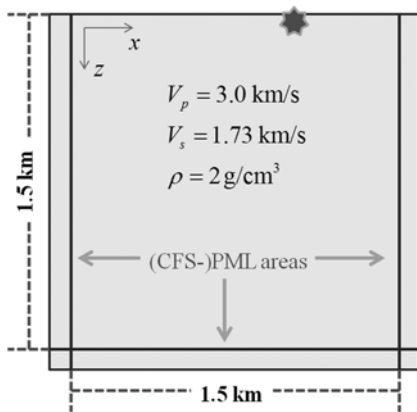


Fig. 3. Homogeneous model to compare the performance of boundary conditions such as Clayton and Engquist (1977), Higdon (1991) and CFS-PML.

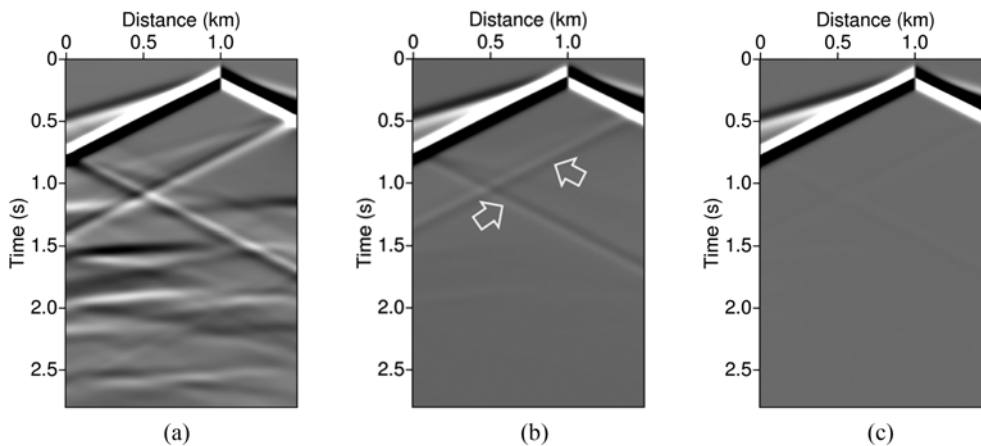


Fig. 4. Synthetic seismograms with the boundary conditions of (a) Clayton and Engquist (1977), (b) Higdon (1991), and (c) CFS-PML.

너지를 계산한 결과이다. 점선은 Clayton and Engquist (1977), 쇠선은 Higdon (1991), 그리고 실선은 CFS-PML경계조건이 적용된 탄성과 모델링의 결과로 계산한 운동에너지이다. Fig. 4 (a)에서 볼 수 있듯 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건은 인공적으로 존재하는 유한경계에서 발생한 반사파를 충분히 제거하지 못하였으므로, Fig. 5에서 운동에너지도 시간에 따라 감소하는 경향이 덜하다. 이에 비하여 Higdon (1991)의 경계조건과 CFS-PML경계조건에서 계산된 운동에너지는 파가 영역을 벗어났다고 예상되는 1초 이후부터 뚜렷이 감소하고 있다. 또한, CFS-PML경계조건이 적용된 결과로 계산한 운동에너지가 가장 작은 값을 보인다.

다음으로, 최대크기오차는 식 (9)와 같다.

$$e(t) = 20 \log_{10} \left\{ \frac{|u(t) - u_{ref}(t)|}{\text{Max} [|u_{ref}(t)|]} \right\} \quad (9)$$

여기서 $u(t)$ 는 모델링 된 결과로서 시간 t 에 따른 변위이고, $u_{ref}(t)$ 는 파가 유한경계에 도달하지 못하도록 관심영역을 충분히 넓혀 수행한 결과로 인위적인 반사파가 기록되지 않은 기준변위이다. 따라서 최대크기오차 $e(t)$ 는 전체 시간 t_{max} 에 대한 기준변위 최대값에 대하여 인위적인 경계에서 발생한 반사파의 크기를 데시벨 단위로 보여준다.

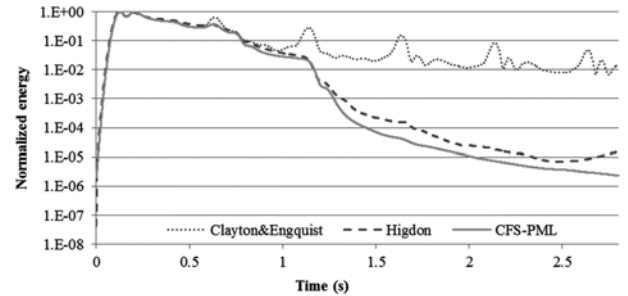


Fig. 5. Time evolution of the kinetic energy in the model with the boundary conditions of Clayton and Engquist (1977) (dotted line), Higdon (1991) (dashed line), and CFS-PML (solid line).

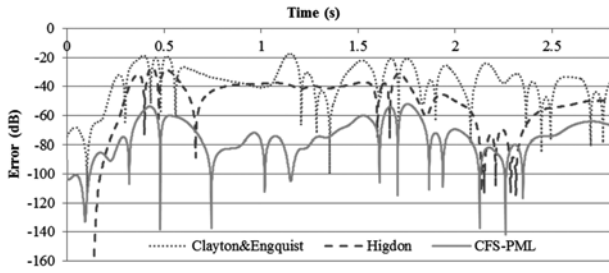


Fig. 6. Maximum value error on a logarithmic scale, presenting the difference between the reference and modeled results with the boundary conditions of Clayton and Engquist (1977) (dotted line), Higdon (1991) (dashed line) and CFS-PML (solid line).

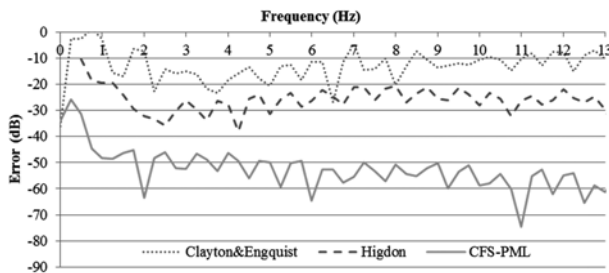


Fig. 7. Spectrum error on a logarithmic scale, presenting the difference between the reference and modeled results with the boundary conditions of Clayton and Engquist (1977) (dotted line), Higdon (1991) (dashed line), and CFS-PML (solid line).

Fig. 6은 Fig. 3의 영역 왼쪽 경계와 가장 가까운 지표면, 즉 송신원으로부터 오른쪽으로 0.5 km 떨어진 지표면에서 기록된 탄성과 신호를 이용하여 계산된 최대크기오차이다. 여기서 점선은 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건, 쇠선은 Higdon (1991)의 경계조건, 그리고 실선은 CFS-PML경계조건의 최대크기오차이다. CFS-PML경계조건의 최대크기오차는 대부분의 시간에서 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건과 Higdon (1991)의 경계조건의 최대크기오차에 비하여 20~60 dB의 차이를 보이며 작은 값을 나타내고 있다. 이는 CFS-PML경계조건의 적용 결과, 참조모델의 최대크기에 대한 오차의 비율이 다른 경계조건에 비하여 10~1000배 작다는 것을 의미한다.

마지막으로, 스펙트럼 오차는 다음 식 (10)와 같이 정의된다.

$$\tilde{\epsilon}(f) = 20 \log_{10} \left\{ \left| \frac{\tilde{u}(f) - \tilde{u}_{ref}(f)}{\tilde{u}_{ref}(f)} \right| \right\} \quad (10)$$

여기서 \tilde{u} 와 \tilde{u}_{ref} 는 상기한 시간영역의 u 와 u_{ref} 를 주파수영역으로 변환한 것이다. 따라서 스펙트럼 오차 $\tilde{\epsilon}$ 는 해당 주파수마다 경계조건이 적용된 결과와 인공적인 반사파가 없는 기준변위와의 차이를 보여준다.

Fig. 7은 최대크기오차를 계산한 위치와 같은 곳에서 스펙트럼오차를 계산한 결과이다. 여기서 점선은 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건, 쇠선은 Higdon (1991)의 경계조건, 그리고 실선은 CFS-PML경계조건의 스펙트럼오차를 나타낸다. 전 주

파수에 걸쳐서 CFS-PML경계조건의 스펙트럼오차가 Clayton and Engquist (1977)경계조건, Higdon (1991)경계조건의 스펙트럼오차보다 작는데 이는 전 주파수 영역에서 효율적으로 반사파를 제거한다는 것을 보여준다.

CFS-PML경계조건 변수의 최적화

CFS-PML경계조건에는 식 (3)과 식 (4)에서 볼 수 있듯이 κ_{max} , d_{max} , 그리고 α_{max} 를 최대값으로 하는 변수를 갖는다. 여기서 d_{max} 는 기존 PML경계조건에서도 존재하는 변수로서, Collino and Tsogka (2001)가 제안한 경험식으로 계산된다. 따라서 CFS-PML경계조건에서 새로 도입된 κ_{max} 와 α_{max} 의 최적값을 계산하였다.

시간영역의 탄성과 모델링에 대하여 Drossaert and Giannopoulos (2007a)는 컨볼루션 기법이 도입된 CPML경계조건에서 전체 관심영역에 대한 최적의 κ_{max} 와 α_{max} 의 값을 고찰하였다. 또한, Drossaert and Giannopoulos (2007b)는 재귀적분에 기반한 CFS-PML경계조건인 CFS-RIPML에서 두 지점에 대한 κ_{max} 와 α_{max} 의 최적값을 산정하였다. Drossaert and Giannopoulos (2007b)에서 구한 두 지점의 κ_{max} 와 α_{max} 최적값은 서로 다른 값이었다. 그러므로 CFS-PML경계조건의 변수에 따른 성능 평가를 위하여 앞서 식 (8)과 같이 전 영역에 대하여 정의된 운동에너지를 이용하였다. 파동이 발생하여 모형을 빠져나가서 이론적으로 모형 내 운동에너지가 존재하지 않는 시각을 t_c 라 하고, 시각 t_c 에서 운동에너지가 작을수록 CFS-PML경계조건의 성능이 좋은 것이라 판단할 수 있다.

Fig. 8은 κ_{max} 와 α_{max} 의 변화에 따라 계산된 운동에너지의 등치선도이다. 운동에너지가 기록된 시각 t_c 는 2 초이고, 관심영역의 크기, 송신원의 위치, P파의 속도, S파의 속도, 밀도, 그리고 PML경계조건의 두께는 앞 절에서 이용된 모델 Fig. 3의 조건과 동일하다. Fig. 8에서 κ_{max} 는 3, 그리고 α_{max} 는 10일 때 최소의 운동에너지가 계산됨을 알 수 있다. 그러므로 수치실험에 사용된 Fig. 3의 모델과 같은 조건에서 CFS-PML경계조건의 최적 변수는 κ_{max} 는 3, 그리고 α_{max} 는 10이라고 할 수 있다. 또한, 주파수영역 탄성과 모델링에 대한 CFS-PML경계조건은 κ_{max} 보다 α_{max} 의 값에 더 영향을 받음을 알 수 있다.

CFS-PML, 기존 PML 및 변형된 CFS-PML경계조건의 성능 비교

CFS-PML경계조건과 기존 PML경계조건을 살펴보고, 이를 통하여 변형된 CFS-PML경계조건을 제안하여 그 성능을 비교하고자 하였다. 기존 PML경계조건은 CFS-PML경계조건에서 식 (3)의 $\eta_j = \kappa_j + d_j / (\alpha_j + i\omega)$ 가 κ_j 를 1, α_j 를 0으로 놓은 경우에 해당한다. CFS-PML경계조건은 분모에 있는 α_j 가 0이 아닌 값을 가지므로, 낮은 각주파수 ω 에서는 상대적으로 α_j 의 값이

크다고 할 수 있다. 이는 기존 PML경계조건에 비하여 CFS-PML경계조건의 흡수성능이 떨어진다는 것을 의미한다 (Correia and Jin, 2005). 따라서 이 논문에서는, 본래 공간에 대하여 최대값 α_{max} 을 갖는 함수이며 주파수에 대해서는 상수로 정의되었던 α_f 를 낮은 주파수에서는 고주파수에 비하여 작은 최대값 α_{max} 을 갖도록 변형하였다. 변형된 CFS-PML에서 α_{max} 는 최대주파수의 1/7이 되는 주파수까지 주파수에 비례하는 값으로 설정되며, 이를 그래프로 간략히 나타내면 Fig. 9와 같다. 세로축 alpha는 α_{max} 이며, 직선 A는 기존 PML경계조건, A'는 CFS-PML경계조건, 그리고 A''는 이 논문에서 변형된 CFS-PML경계조건인 α_{max} 를 나타낸다.

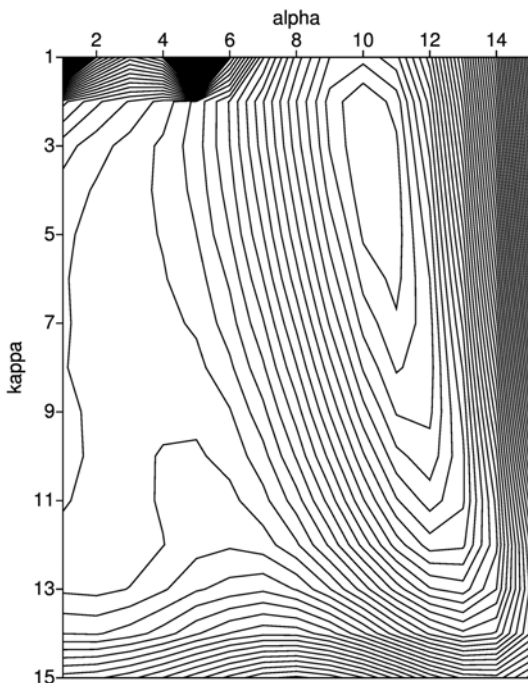


Fig. 8. Contour plot of the kinetic energy as a function of the κ_{max} (kappa) and α_{max} (alpha).

α_f 가 주파수에 관한 함수가 되면, 시간영역의 모델링에서는 콘볼루션의 형태로 나타나야 하기 때문에 그 적용이 수월치 않다. 그러나 이 논문은 주파수영역의 모델링이므로 간단히 α_f 를 주파수의 함수로 변경할 수 있다. CFS-PML경계조건 또한 이 문제를 해결할 수 있음이 확인된다.

기존 PML경계조건과 변형된 CFS-PML경계조건을 Fig. 3과 같은 영역에 적용하여 얻은 합성 탄성과 기록은 CFS-PML경계조건이 적용된 결과 Fig. 4 (c)와 육안으로 보기에 매우 유사하다. 따라서 위의 세 경계조건의 차이점을 뚜렷이 보기 위하여 Fig. 10과 같이 기록된 신호의 최대값과 최소값의 각 8%씩을 클리핑하여 도시하였다(기록된 신호를 확대하여 표시하였다). Fig. 10에서 (a)는 PML경계조건, (b)는 CFS-PML경계조건, 그리고 (c)는 변형된 CFS-PML경계조건이 적용된 수평성분의 합성 탄성과 기록이다. Fig. 10 (a)에서 유한경계와 근접한 부분에 쇄선으로 표시된 인공적인 신호가 있고, (b)와 (c)에서는 보이지 않는다. 이는 PML경계조건이 적용된 경계에 파가 큰 입사각으로 입사할 경우에 나타나는 현상으로서, 시간영역에 대한 탄성과 모델링에서 기존의 PML경계조건(Collino and Tsogka, 2001)의 한계로 지적된 바와 일치한다(Komatitsch and Martin, 2007; Zhang and Shen, 2010). Komatitsch and

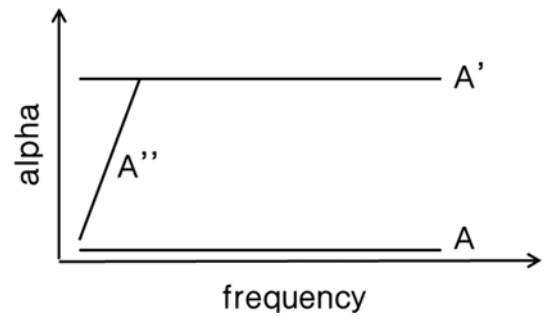


Fig. 9. Graph showing the concept of α_{max} as a function of frequency. A, A', A'' stand for the conventional PML, the CFS-PML and the modified CFS-PML, respectively.

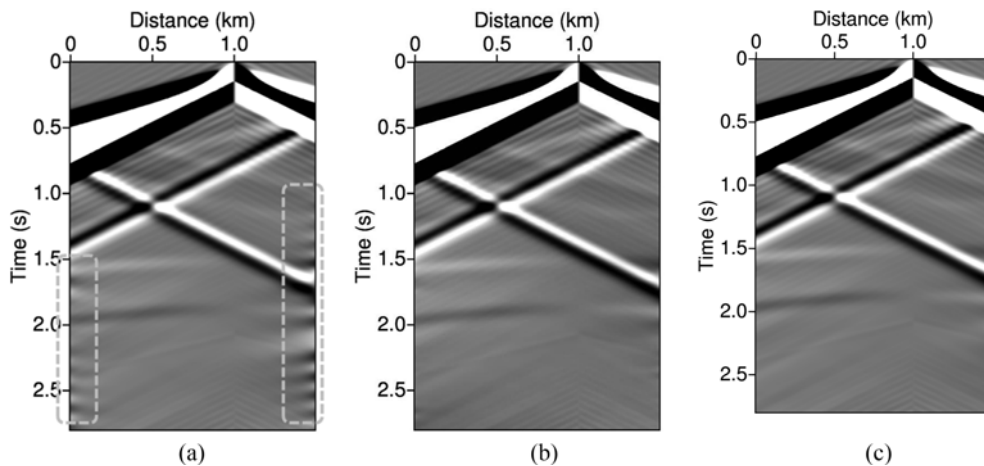


Fig. 10. Synthetic seismograms with the boundary conditions of (a) the conventional PML, (b) CFS-PML, and (c) the modified CFS-PML.

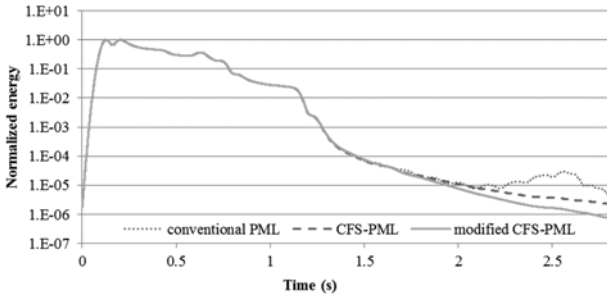


Fig. 11. Time evolution of the kinetic energy in the model with the boundary conditions of the conventional PML (dotted line), CFS-PML (dashed line), and the modified CFS-PML (solid line).

Martin (2007)은 시간영역의 CFS-PML에 해당하는 CPML을 이용하여 스쳐가는 입사(grazing incidence)로 인한 반사파의 문제를 해결하였다. 주파수영역의 탄성과 모델링에서는 스쳐가는 입사에 의한 반사파의 문제가 CFS-PML경계조건의 적용으로 Fig. 10 (b)와 같이 해결되었다. 그리고 Fig. 10 (c)에서는 이 논문에서 변형한 CFS-PML경계조건 또한 이 문제를 해결할 수 있음이 확인된다.

세 경계조건의 정량적인 비교를 위하여 앞 절에서 수행한 방법대로 시간에 따른 운동에너지의 변화, 최대크기 오차, 그리고 스펙트럼 오차를 이용하였다. Fig. 11은 시간에 따른 운동에너지의 변화로서, 점선은 기존의 PML, 쇄선은 CFS-PML 그리고 실선은 변형된 CFS-PML경계조건에 의한 결

과이다. 세 경계조건 모두에서 운동에너지가 전체적으로 감소하는 양상을 보이고 있다. 그러나 후기 시간의 운동에너지 양상으로 보아 기존의 PML경계조건, CFS-PML경계조건, 변형된 CFS-PML경계조건의 순으로 좋은 성능을 보인다고 생각된다.

Fig. 12 (a)와 (b)는 각각 최대크기오차와 스펙트럼오차이다. 점선은 기존 PML, 쇄선은 CFS-PML, 실선은 변형된 CFS-PML경계조건이 적용된 결과이다. 계산에 쓰인 신호가 기록된 곳은 앞 절에서 살펴 보았던 Fig. 6과 Fig. 7의 최대크기오차와 스펙트럼오차를 계산한 위치와 같다. Fig. 12 (a)에서 초기 시간과 후기시간에서 PML경계조건이 CFS-PML경계조건과 변형된 CFS-PML경계조건보다 참조모델에 대하여 오차가 크다는 것을 알 수 있다. Fig. 12 (b)에서는 앞서 지적한 분모의 α_j 로 인하여 저주파수 부분에서 CFS-PML경계조건의 오차가 PML경계조건의 오차보다 크다. 변형된 CFS-PML경계조건의 오차는 1 Hz 부근의 주파수에서는 작은 α_j 로 인하여 PML경계조건과 유사한 값을 갖고, 그 이상의 주파수에 걸쳐서는 CFS-PML경계조건과 유사하게 거동하며 PML경계조건보다 좋은 성능을 보이고 있다.

결론

탄성파의 수치 모델링 과정에서 관심영역의 크기를 제한함에 따라, 유한한 경계에서 발생하는 인공적인 반사파의 제거를 위하여 경계조건이 필요하다. 최근 시간영역의 탄성과 수치 모델링에 대하여 여러 종류의 개선된 PML경계조건들이 적용되고 있다. 이 논문에서는 주파수영역의 탄성과 수치 모델링에 대한 CFS-PML경계조건을 고찰하였다. CFS-PML경계조건이 적용된 주파수영역 탄성과 모델링의 식을 유도하고, Lamb's Problem에 대하여 수치해의 정확성을 검증하였다. CFS-PML 경계조건은 Clayton and Engquist (1977)의 경계조건과 Higdon (1991)의 경계조건 보다 유한경계에서 발생한 인공적인 반사파를 효과적으로 제거하였다. CFS-PML경계조건의 성능은 모형 내의 운동에너지, 최대크기오차, 그리고 스펙트럼오차를 통하여 확인되었다. 또한, 기존의 PML경계조건이 확장된 CFS-PML경계조건의 변수 κ_{max} 와 α_{max} 의 최적값을 운동에너지의 계산을 이용하여 산정하였다. 그리고 변수 α_j 의 특성을 고찰하여 주파수에 비례하는 값을 갖는 α_{max} 를 변수로 갖는 변형된 CFS-PML경계조건을 제안하였다. 변형된 CFS-PML경계조건은 주파수영역 모델링에서 적용할 수 있는 것으로 기존 PML경계조건, CFS-PML경계조건, 그리고 변형된 CFS-PML경계조건의 성능을 운동에너지, 최대크기오차, 스펙트럼 오차로 비교하여 개선된 결과를 얻을 수 있었다. CFS-PML경계조건과 변형된 CFS-PML경계조건은 기존 PML경계조건보다 스쳐가는 입사각에 대하여 개선된 결과를 보여주었다.

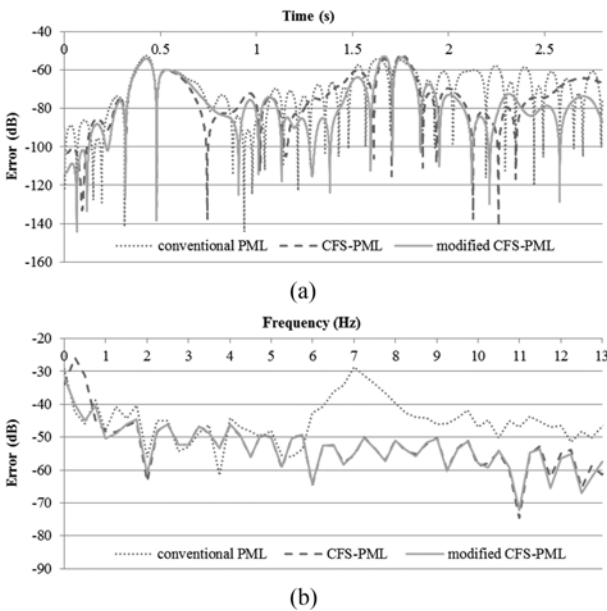


Fig. 12. With the boundary conditions of the conventional PML (dotted line), CFS-PML (dashed line), and the modified CFS-PML (solid line), (a) maximum value error on a logarithmic scale, presenting the difference between the reference and modeled results, (b) spectrum error on a logarithmic scale, presenting the difference between the reference and modeled results.

감사의 글

이 연구는 한국지질자원연구원 주요사업인 ‘한반도 동부지역 잠재적 위험 지진원 평가’ 과제의 지원으로 수행되었다. 논문의 완성도를 높일 수 있도록 고견을 주신 익명의 심사자에게 감사를 드립니다.

참고문헌

- Bao, H., Bielak, J., Ghattas, O., Kallivokas, L. F., O'Hallaron, D. R., Shewchuk, J. R., and Xu, J., 1998, Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **152**, 85-102.
- Berenger, J., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, **114**, 185-200.
- Berenger, J., 2002, Application of the CFS PML to the absorption of evanescent waves in waveguides, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, **12**, 218-220.
- Berg, P., If, F., Nielsen, P., and Skovgaard, O., 1994, Analytical reference solutions, in Helbig, K., Ed., *Modeling the Earth for Oil Exploration*, Pergamon Press, 421-427.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Ksloff, R., and Reshef, M., 1985, A nonreflecting boundary condition ofr discrete acoustic and elastic wave equation, *Geophysics*, **50**, 705-708.
- Chew, W., and Liu, Q., 1996, Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition, *Journal of Computational Acoustics*, **4**, 341-359.
- Cho, C. S., and Lee, H. I., 2009, Application of convolutional perfectly matched layer method to numerical elastic modeling using rotated staggered grid, *Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa*, **12**, 183-191.
- Clayton, R., and Engquist, B., 1977, Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **67**, 1529-1540.
- Collino, F., and Monk, P., 1998, Optimizing the perfectly matched layer, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **164**, 157-171.
- Collino, F., and Tsogka, C., 2001, Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Geophysics*, **66**, 294-307.
- Correia, D. and Jin, J.-M., 2005, On the Development of a Higher-Order PML, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **53**, 4157-4163.
- Drossaert, F. H., and Giannopoulos, A., 2007a, A nonsplit complex frequency-shifted PML based on recursive integration for FDTD modeling of elastic waves, *Geophysics*, **72**, T9-T17.
- Drossaert, F. H., and Giannopoulos, A., 2007b, Complex frequency shifted convolution PML for FDTD modelling of elastic waves, *Wave Motion*, **44**, 593-604.
- Higdon, R., 1991, Absorbing boundary conditions for elastic waves, *Geophysics*, **56**, 231-241.
- Komatitsch, D., and Martin, R., 2007, An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation, *Geophysics*, **72**, SM155-SM167.
- Komatitsch, D., and Tromp, J., 1999, Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation, *Geophysical Journal International*, **139**, 806-822.
- Pratt, R. G., and Worthington, M. H., 1990, Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 1: Acoustic wave-equation method, *Geophysical Prospecting*, **38**, 287-310.
- Roden, J. A., and Gedney, S. D., 2000, Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media, *Microwave and Optical Technology Letters*, **27**, 334-339.
- Shin, C., 1995, Sponge boundary condition for frequency-domain modeling, *Geophysics*, **60**, 1870-1874.
- Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation, *Geophysics*, **49**, 1259-1266.
- Virieux, J., 1986, P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**, 889-901.
- Virieux, J., and Operto, S., 2009, An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics, *Geophysics*, **74**, WCC127-WCC152.
- Zhang, W., and Shen, Y., 2010, Unsplit complex frequency-shifted PML implementation using auxiliary differential equations for seismic wave modeling, *Geophysics*, **75**, T141-T154.