

## 연속적으로 누출되는 액체 풀의 확산에 관한 고차 섭동해

김명배\*† · 도규형\* · 한용식\* · 최병일\*

\* 한국기계연구원 에너지플랜트안전연구실

### High-Order Perturbation Solutions of Liquid Pool Spreading with Continuous Spill

Myungbae Kim\*†, Kyu Hyung Do\*, Yongshik Han\* and Byungil Choi\*

\* Division of Plant Safety Engineering, Korea Institute of Machinery & Materials

(Received January 26, 2012 ; Revised July 22, 2012 ; Accepted July 23, 2012)

**Key Words:** Perturbation(섭동), Liquid Pool(액체풀), Spill(누출), High-Order(고차), Spreading(확산)

**초록:** 연속적으로 누출되면서 원형으로 퍼져가고 있는 액체에 대한 모델에 대한 고차 섭동 해를 구하여 1차 섭동 해를 개선하였다. 일반적인 해를 얻기 위하여 무차원화된 지배방정식을 유도하고 무차원 지배변수를 도출하였다. 무차원 증발계수를 섭동 변수로 이용하였다. 계산 결과 부피 및 확산 반경에 관해서 고차 섭동해가 1차 섭동 해를 개선시키고 있으며, 섭동해의 차수가 증가할 따라 오차를 감소시키는 경향을 보였다. 3차 섭동 해는 수치 해와 거의 일치하고 있어 3차 섭동해의 타당성을 보여주고 있다.

**Abstract:** High-order perturbation solutions have been obtained for the simple physical model describing the liquid pool spreading with a continuous spill, and these are shown to improve over first-order perturbation solutions. The non-dimensional governing equations for the model are derived to obtain more general solutions. Non-dimensional parameters are sought as the governing parameters for the non-dimensional equations, and the non-dimensional evaporation rate is used as the perturbation parameter. The results show that the high-order solutions exhibit an improvement over the first-order solutions with respect to the pool volume as well as the spreading radius. In addition, as the order of the perturbation solutions increases, the difference between the numerical solutions and the perturbation solutions is significantly reduced. Finally, it is revealed that the third-order solutions are reasonable because they almost agree with the numerical solutions.

- 기호설명 -

$g$	: 중력가속도( $m/s^2$ )	$\beta$	: 연속 누출률( $m^3/s$ )
$h$	: 무차원 풀높이	$\Delta$	: 1 또는 $1 - \rho / \rho_w$
$r$	: 무차원 풀반경	$\epsilon$	: 무차원 증발률
$v$	: 무차원 풀부피	$\rho$	: 액체의 밀도( $kg/m^3$ )
$t$	: 무차원 시간	$\rho_w$	: 물의 밀도( $kg/m^3$ )
$E$	: 단위면적당 증발률( $m/s$ )	하첨자	
$H$	: 풀의 높이(m)	0	: 영차항
$R$	: 풀의 반경(m)	1	: 1차항
$V$	: 풀의 부피( $m^3$ )	2	: 2차항
$T$	: 시간(s)	3	: 3차항
$a$	: $2g \Delta$ ( $m/s^2$ )		

### 1. 서론

† Corresponding Author, mbkim@kimm.re.kr

로 하는 석유화학 플랜트에는 액상의 가연성이나 유독성 물질이 존재하게 된다. 보통의 경우 이 물질들은 공정장치(process equipment)나 배관 내에 있으면서 여러 가지 공정을 거치게 된다. 그런데 여러 가지 이유로 이러한 물질이 대기 중으로 누출되면 해당 플랜트는 여러 위험에 직면하게 된다. 기체 상태의 가연성 물질이 분출되면 제트화재(jet fire)나 폭발의 원인이 된다. 액체 상태로 누출되면 증발하면서 특정 표면을 퍼져나가는데, 증발된 기체는 증기운 폭발(vapor cloud explosion)의 원인이 될 수 있으며, 표면위의 액체는 풀 화재(pool fire) 또는 고임화재(puddle fire) 근거가 될 수 있다. 배관에서 분사 형태로 누출되면 분사화재(spray fire)가 된다. 유독성 가스 또는 연소된 가스는 대기의 흐름에 의하여 주변으로 확산하게 된다.

이와 같이 산업 플랜트에서의 중대 사고는 가연성 또는 유독성 물질의 누출로부터 시작되기 때문에 누출된 액체의 퍼짐에 대한 연구는 액화수소나 LNG, LPG 플랜트, 해양플랜트 등의 설계과정의 하나인 위험도 평가(risk assessment)를 위한 필수적인 요소이다. 저온에서 보관된 액체가 누출된 경우에는 증발을 수반하면서 확산하게 된다.

증발하면서 퍼져가는 액체의 확산에 대한 여러 가지 모델이 발표되어 왔다. 확산 모델들에는 비교적 간단한 모델로부터 3차원의 완전한 보존식<sup>(1)</sup>을 이용한 모델까지 여러 종류가 있고, 잘 알려진 얇은 층(shallow layer) 모델<sup>(2-5)</sup>은 중간 정도의 복잡함을 가진다고 평가할 수 있다. 이 모델은 축대칭 가정 하에 액체 풀의 속도와 높이를 반경과 시간에 대하여 푸는 편미분 방정식이다. 간단한 모델<sup>(6)</sup>은 액체의 퍼짐을 시간변화에 따른 풀 직경의 변화로 보는 것이며, 이 때 풀의 높이는 풀의 반경에 대하여 일정하다고 가정한다. 그 결과로 시간을 독립변수로 하는 2개의 상미분 방정식과 1개의 대수 방정식으로 정리된다. 증발에 대한 모델은 액체 풀에 대한 에너지 방정식과 열전도 식을 이용하여 정립할 수 있지만 대부분의 모델들에서는 단위면적당 증발계수 개념을 도입하여 증발 부분을 간단히 처리하고 있다. 상수인 증발계수를 가정하여 질량 보존 식으로 처리하고 있다.

이러한 모델들은 전부 수치 해석적 방법에 의

존하여 왔는데, 최근에 간단한 모델<sup>(6)</sup>에 대한 준해석적(semi-analytic)인 해인 1차 섭동해<sup>(7)</sup>에 대한 결과가 발표되었다. 본 연구는 1차 섭동 해를 개선하기 위한 후속적인 연구로 3차까지의 섭동 해를 구하여 개선된 점을 입증하고, 지배 방정식의 무차원화를 통하여 보다 일반적인 해를 얻고자 노력하였다.

## 2. 지배 방정식 및 정식화

액체 풀의 확산은 주로 중력에 의존한다. 중력은 수직 방향으로 작용하지만 풀에 작용하는 압력의 불균형에 의한 힘에 의하여 풀은 수평방향으로 확산하게 된다. 이 힘은 풀의 높이를 감소시키는 방향으로 작용하며, 풀의 높이에 따라 감소하게 된다. 따라서, 풀이 확산 될수록, 즉 높이가 낮아질수록 중력은 감소하게 된다. 액체 풀의 확산에 관여하는 다른 힘들은 점성력과 표면장력이다. 표면장력에 관하여는 확산되는 액체와 공기와 고체표면 또는 물의 표면의 경계에서 작용되는 표면 장력들 사이의 불균형을 의미한다. 이 불균형의 결과로 작용되는 순표면장력(net surface tension force)은 초기 중력에 비하여 작지만 확산을 도와주는 역할을 하는 경향이 있다. 이 힘은 풀의 확산에 따라 감소되지 않고 결국에는 무시할 수 없게 된다.

일반적으로 액체풀의 확산은 연속되는 3개의 영역으로 구분 된다 : 중력-관성 영역, 중력-점성 영역, 표면장력-점성 영역. 본 연구의 대상인 극저온 액체의 확산에서는 증발이 매우 빠르기 때문에 두 번째 영역인 중력-점성 영역에도 거의 도달 되지 않는다. 보통 세 번째 영역인 표면장력-점성 영역은 물의 표면에서 기름이 확산해가는 경우에만 중요하다. 본 논문은 첫 번째 영역을 대상으로 하는 극저온 액체 풀의 확산에 관한 연구이다. 퍼지고 있는 액체를 반경과 균일한 높이를 갖는 원형 실린더라 가정하면 지배 방정식은 다음과 같이 표현된다.<sup>(6)</sup> 실린더가 아닐 경우는 해석적인 접근이 어려워 수치적인 방법이 필요하다.

$$\frac{dR}{dT} = \sqrt{\alpha H} \quad (1)$$

콘크리트나 흙의 표면 위를 액체가 퍼져가는

경우는  $\Delta=1$  이다. 물의 표면 위를 퍼져가는 경우에는  $\Delta=1-\rho/\rho_w$  이다. 액화천연가스 수송 선박에서 액화천연가스가 누출되어 바다 위를 확산해가는 경우에 적용한다. 두 액체의 밀도 차에 의한 보정 항이라고 판단 할 수 있다.

액체의 부피는 다음과 같이 단위면적당 증발률을 사용하여 표현된다.

$$\frac{dV}{dT} = -E\pi R^2 + \beta \quad (2)$$

여기에서  $\beta$ 는 연속 누출의 경우를 의미하는 연속 누출률이다. 따라서 순간 누출의 경우에는  $\beta=0$  이다.

마지막으로 다음과 같은 대수 방정식이 필요하다.

$$H = V/\pi R^2 \quad (3)$$

### 3. 초기조건 및 해법

액체가 보관되어있는 탱크에 충격에 의하여 비교적 큰 구멍이나 틈이 발생하면, 비교적 많은 양의 액체가 순간적으로 쏟아져 나온다. 이러한 상황은 순간 누출로 모델링 된다. 그러나 순간 누출에 비하여 상대적으로 적은 양이 장시간 흘러나오는 경우에는 다음과 같이 연속 누출로 모델링 할 수 있다.

$$V=0, R=0, H=0 \text{ at } T=0 \quad (4)$$

방정식과 초기 조건을 일반적으로 다루기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입 한다.

$$v = V/\pi L^3, r = R/L, h = H/L, t = T/\tau \quad (5)$$

여기에서 특성 시간과 특성 길이는 다음 식과 같이 정의 된다.

$$\tau = (\beta/\alpha^3)^{1/5}, \quad L = (\beta^2/\alpha)^{1/5} \quad (6)$$

식 (5)를 이용하여 지배 방정식 (1)~(3)을 무차원화 하면 다음과 같은 식들이 얻어 진다.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\pi} - \epsilon r^2, \quad (7)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{h}, \quad (8)$$

$$h = \frac{v}{r^2} \quad (9)$$

여기에서 식 (7)의  $\epsilon$ 은 무차원 증발률로 볼 수 있으며 다음과 같이 표현 된다.

$$\epsilon = \frac{E}{(L/\tau)} \quad (10)$$

식 (4)로부터 다음과 같은 무차원화된 초기 조건들이 얻어 진다.

$$v=0, r=0, h=0 \text{ at } t=0 \quad (11)$$

차원이 있는 지배 방정식 (1)~(3)을 지배하는 변수는 증발률과 연속 누출률 인데, 무차원화를 통하여 무차원 지배 방정식 (7)~(9)를 지배하는 변수는 무차원 증발률 하나임을 알 수 있다.

증발률  $E$ 는 보통 매우 작은 값을 가지는데 LNG의 경우  $10^{-4}$  order이다<sup>(3)</sup>. 따라서 자연스럽게  $\epsilon$ 을 섭동변수(perturbation parameter)로 선택하고 다음과 같이 해의 형태를 가정한다.

$$v = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots \quad (12)$$

$$r = r_0 + \epsilon r_1 + \epsilon^2 r_2 + \dots \quad (13)$$

$$h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots \quad (14)$$

식 (12)~(14)을 식 (7)~(9)에 대입하고  $O(\epsilon^3)$ 까지만 정리하면 다음의 식들이 얻어진다.

$$\frac{dr_0}{dt} = \sqrt{h_0} \quad (15)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{h_1}{2\sqrt{h_0}} \quad (16)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{h_2}{2\sqrt{h_0}} - \frac{h_1^2}{8h_0^{3/2}} \quad (17)$$

$$\frac{dr_3}{dt} = \frac{h_3}{2\sqrt{h_0}} - \frac{h_1}{4h_0^{3/2}} \left( h_2 - \frac{h_1^2}{4h_0} \right) \quad (18)$$

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{1}{\pi} \quad (19)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -r_0^2 \quad (20)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -2r_0r_1 \quad (21)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = -r_1^2 - 2r_0r_2 \quad (22)$$

$$h_0 = \frac{v_0}{r_0^2} \quad (23)$$

$$h_1 = \frac{v_1}{r_0^2} - \frac{2h_0r_1}{r_0} \quad (24)$$

$$h_2 = \frac{v_2}{r_0^2} - h_0 \left[ \frac{2r_2}{r_0} + \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 \right] - 2h_1 \frac{r_1}{r_0} \quad (25)$$

$$h_3 = \frac{v_3}{r_0^2} - 2h_0 \left[ \frac{r_3}{r_0} + \frac{r_1r_2}{r_0^2} \right] - h_1 \left[ \frac{2r_2}{r_0} + \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 \right] - 2h_2 \left( \frac{r_1}{r_0} \right) \quad (26)$$

새로운 식 12개가 유도 되었으므로 초기조건도 12개가 되어야 한다. 이를 위하여 식 (12)~(14)에 식 (11)을 적용하여 다음과 같이 섭동 변수들에 대한 초기 조건들이 얻어 진다.

$$v_0 = 0, \quad r_0 = 0, \quad h_0 = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (27)$$

$$v_1 = 0, \quad r_1 = 0, \quad h_1 = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (28)$$

$$v_2 = 0, \quad r_2 = 0, \quad h_2 = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (29)$$

$$v_3 = 0, \quad r_3 = 0, \quad h_3 = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (30)$$

식 (15)~(26)를 주어진 초기조건 식 (27)~(30)를 적용하여 풀면 다음과 같은 해를 얻게 된다.

$$r_0 = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} t^{3/4} \quad (31)$$

$$r_1 = -\frac{2}{15\sqrt{3}} \pi^{1/4} t^{9/4} \quad (32)$$

$$r_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{675} \pi^{3/4} t^{15/4} \quad (33)$$

$$r_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{4455} \pi^{5/4} t^{21/4} \quad (34)$$

$$v_0 = \frac{t}{\pi} \quad (35)$$

$$v_1 = -\frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} \quad (36)$$

$$v_2 = \frac{2}{45} t^4 \quad (37)$$

$$v_3 = -\frac{8\sqrt{\pi}}{7425} t^{11/2} \quad (38)$$

$$h_0 = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} t^{-1/2} \quad (39)$$

$$h_1 = -\frac{3}{10} t \quad (40)$$

$$h_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{300} t^{5/2} \quad (41)$$

$$h_3 = -\frac{2\pi}{825} t^4 \quad (42)$$

#### 4. 결과 및 토의

섭동법을 이용한 해의 타당성을 검증하기 위하

여 Fig. 1에 시간에 따른 풀의 부피 변화를 제시하였다. 계산 조건은 LNG가 콘크리트 표면 위를 확산해 가는 경우이며,  $E= 4.2 \times 10^{-4}$  m/s이고, 밀도는  $420 \text{ kg/m}^3$  이다. 여기에서 수치해석적인 방법에 의한 계산은 Runge-Kutta 방법을 이용하였으며 몇 번의 시도를 통하여 정확한 해를 얻을 수 있었다. 따라서 본 연구에서는 이 방법에 의한 수치 해를 정확한 해라고 판단하고, 계산되는 모든 섭동 해를 수치 해와 비교하여 그 정확도를 기술할 예정이다. 수치 해와 비교되는 1차 섭동해<sup>(7)</sup>의 경우 시간이 증가 하면서 수치 해와 차이가 커지는 것을 알 수 있다. 이러한 차이는 시간이 커짐에 따라 크기가 증가되는 secular 항<sup>(8)</sup> 때문이다.

식 (35)와 식 (36)으로부터 1차 섭동 해는 다음과 같이 표현 된다.

$$v = \frac{t}{\pi} - \epsilon \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} \quad (43)$$

또는

$$V = \beta T - E \frac{8}{15} \sqrt{\pi \alpha \beta} T^{5/2} \quad (44)$$

식 (44)에서 두 번째 항은 첫 번째 항의 보정항 (correction term) 개념으로 도입 된 것이기 때문에 그 크기가 첫 번째 항보다 매우 작아야 하지만, 시간이 증가하게 되면  $E$  값이 작더라도 크기가 증가 될 수밖에 없다.  $ET^{5/2}$ 의 오더로 증가하기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 고차 항까지의 전개를 이용하여 해를 구한 것이다.

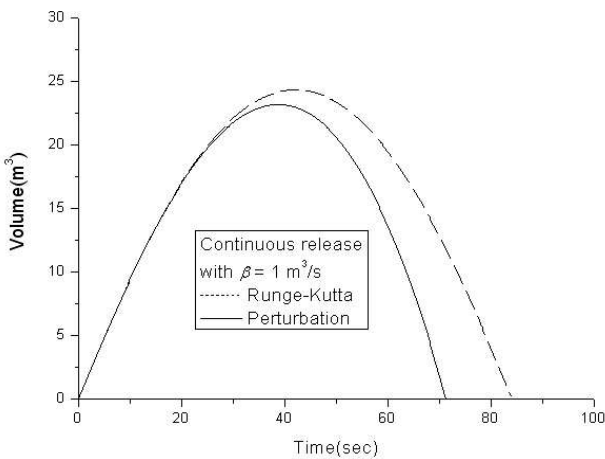


Fig. 1 The pool volume vs. time

3차까지의 고차해가 유일한 지배 변수의 변화를 어느 정도 수용하는지 알기 위하여 연속누출률을  $10^{-2}$ ,  $10^0$ ,  $10^2 \text{ m}^3/\text{s}$  변화시켰다. 액체 풀의 부피에 관해서는 Fig. 2-4에서와 같이 1차 섭동해에 비하여 2차 섭동해가 개선되는 결과를 얻었지만, 시간이 증가됨에 따라 수치 해와 2차 섭동

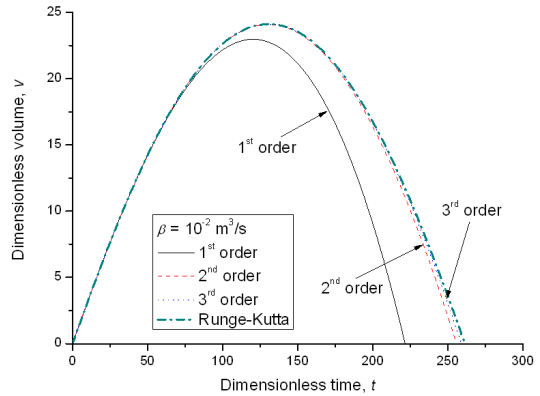


Fig. 2 Dimensionless volume vs. dimensionless time with  $\beta=10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$

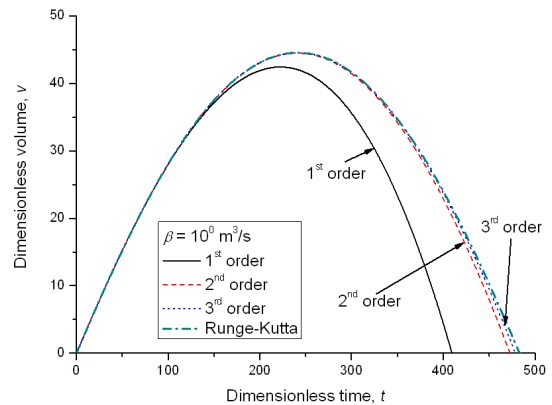


Fig. 3 Dimensionless volume vs. dimensionless time with  $\beta=1.0 \text{ m}^3/\text{s}$

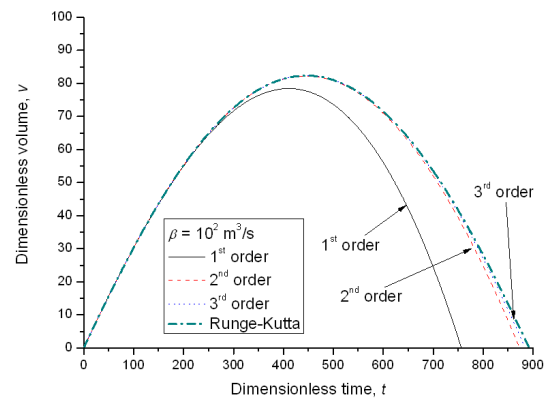


Fig. 4 Dimensionless volume vs. dimensionless time with  $\beta=10^2 \text{ m}^3/\text{s}$

해의 차이가 여전히 존재하는 것을 알 수 있다. 3차 섭동 해는 수치 해와 거의 일치하고 있어 만족스러운 근사 해를 얻을 수 있었다. 결국 3차 항까지의 전개가 secular 항에 의한 오차를 상쇄

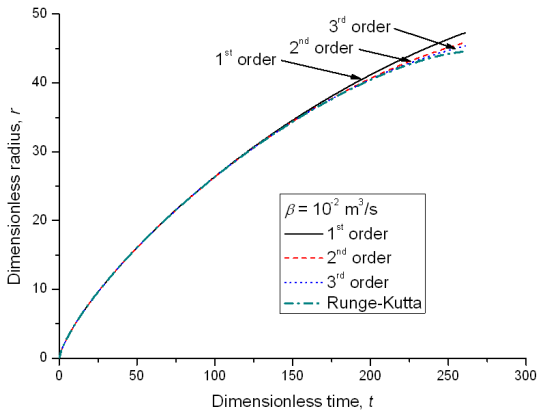


Fig. 5 Dimensionless radius vs. dimensionless time with  $\beta=10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$

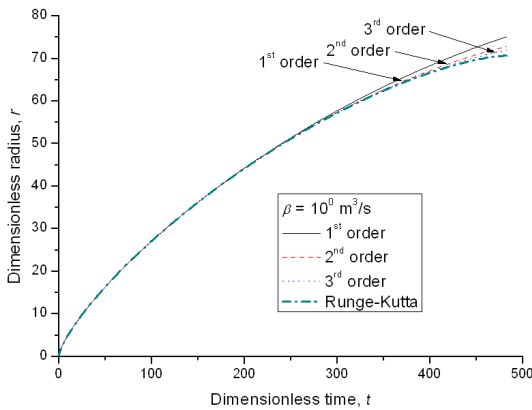


Fig. 6 Dimensionless radius vs. dimensionless time with  $\beta=1.0 \text{ m}^3/\text{s}$

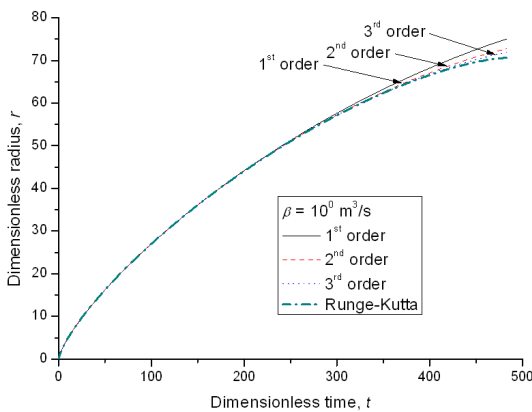


Fig. 7 Dimensionless radius vs. dimensionless time with  $\beta=10^2 \text{ m}^3/\text{s}$

시킨 것이다. 또한 섭동해가 연속누출률의 폭넓은 변화를 잘 수용하고 있어 엔지니어링 설계에서도 본 연구 결과가 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

무차원 반경에 관한 결과는 Fig. 5-7에 제시되었다. 수치해석결과와의 비교로부터 1차 섭동해의 경우 수치해석결과와 차이를 보이고 있으며, 특히 확산의 마지막 부분에서의 오차가 큼을 알 수 있다. 반면에 고차 섭동해(2차 해 및 3차 해)의 경우, 수치해석 결과와 정확히 일치하고 있으며 섭동해의 차수가 증가할수록 수치 해석해에 접근하게 된다. 따라서 고차 해가 1차 섭동해를 개선시키고 있는 것을 알 수 있다. 연속 누출률의 증가는 동일한 시간에서의 수치 해와 고차 섭동해의 차이를 감소시키는 것을 알 수 있는데, 이는  $O(\epsilon^m t^n)$ 으로 표현된 보정항에서 연속누출률이 증가하면 무차원 증발률이 감소하여 시간증가에 따른 secular 항의 증가를 억제하기 때문이다. 무차원 부피에서와 마찬가지로 지배 변수의 변화를 무차원 반경에 관한 섭동해가 잘 수용하였다.

### 5. 결론

본 연구는 산업 플랜트 설계에서의 기본적인 연구인 연속적으로 누출되고 있는 액체의 증발과 확산에 대한 연구로, 1차 섭동해의 문제점을 보완하기 위하여 본 연구를 진행하였다. 1차 섭동해의 문제점은 secular 항에 의한 것으로 시간이 증가하면서 섭동해의 정확성이 감소하는 것이었다.

또 다른 목적은 보다 일반적인 해를 얻기 위한 노력인데 적절한 특성 길이와 특성 시간을 도입하여 무차원화된 지배방정식을 얻었다. 그 결과, 2개의 변수에 의해 지배되던 원래의 방정식들에 비하여 무차원 지배방정식들은 1개의 무차원 변수인 무차원 증발률에 의해 지배되는 것을 알았다.

본 연구에서 얻은 고차 섭동해들은 전반적으로 1차 섭동해들을 개선시켰으며, 섭동해의 차수가 증가할수록 무차원 부피 및 확산 반경의 마지막 단계에서 1차 해의 결과를 개선시키는 결과를 얻었다. 유일한 지배 변수의 폭넓은 변화를 고차 섭동해가 잘 수용하여 연구 결과를 엔지니어링 설계 시에도 활용할 수 있음을 보였다.

후 기

본 연구는 지식경제부 연구사업의 일환으로 산업기술연구회의 지원을 받아 수행 중인 “대형기계설비 안전기술 개발” 연구사업의 결과이며 관련 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Venetsanos, A. G. and Bartzis, J. G., 2005, "CFD Modelling of Large-Scale LH<sub>2</sub> Spills in Open Environment," *Proceedings of International Conference on Hydrogen Safety*, Pisa, Italy, pp.125~136.
- (2) Stein, W. and Ermak, D. L., 1980, "One-Dimensional Numerical Fluid Dynamics Model of the Spreading of Liquefied Gaseous Fuel (LGF) on Water," *Lawrence Livermore National Laboratory*, UCRL-53078.
- (3) Verfondern, K. and Dienhart, B., 1997, "Experimental and Theoretical Investigation of Liquid Hydrogen Pool Spreading and Vaporization," *Int. J. Hydrogen Energy*, Vol. 22, No. 7, pp. 649~660.
- (4) Brandeis, J. and Kansa, E., 1983, "Numerical Simulation of Liquefied Fuel Spills: I. Instantaneous Release Into a Confined Area," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. 3, pp.333~345.
- (5) Brandeis, J. and Ermak, D., 1983, "Numerical Simulation of Liquefied Fuel Spills:ii. Instantaneous and Continous LNG Spills on an Unconfined Water Surface," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 347~361.
- (6) Briscoe, F. and Shaw, P., 1980, "Spread and Evaporation of Liquid," *Prog. Energy Comb. Sci.*, Vol. 6, pp. 127~140.
- (7) Kim, M., Do, K., Han, Y. and Choi, B., 2011, "First-Order Perturbation Solutions of Liquid Pool Spreading with Vaporization," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 35, No. 3, pp. 287~291.
- (8) Nayfeh, A., 1981, "Introduction to Perturbation Techniques," *John Wiley and Sons, New York*, p. 113.