

## 비국소 탄성 이론을 이용한 나노 판의 휨 및 자유진동해석

이원홍<sup>1</sup>, 한성천<sup>2</sup>, 박원태<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>경남과학기술대학교 토목공학과, <sup>2</sup>대원대학교 철도건설과, <sup>3</sup>공주대학교 건설환경공학부

### Nonlocal elasticity theory for bending and free vibration analysis of nano plates

Won-Hong Lee<sup>1</sup>, Sung-Cheon Han<sup>2</sup> and Weon-Tae Park<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil Engineering, Gyeongsang National University of Science and Technology

<sup>2</sup>Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College

<sup>3</sup>Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University

**요 약** 본 논문에서는 3차 전단변형이론이 고려된 비국소 탄성 이론을 이용한 나노 판의 휨 및 진동에 대하여 연구하였다. 비국소 탄성 이론은 미소 규모 효과를 고려할 수 있고 3차원 전단변형이론은 나노 판의 두께방향으로의 전단 변형률과 전단응력의 곡선변화 효과를 고려할 수 있다. 이러한 두 가지 이론을 이용하여 나노 판의 처짐과 고유진동수에 미치는 비국소 이론의 효과를 제시하였다. 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 (i) 비국소 계수, (ii) 나노 판의 적층형태, (iii) 나노 판의 보강 방향 그리고 (iv) 나노 판의 적층 수 등이 나노 판의 무차원 처짐에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교 분석하였으며 해석결과는 참고문헌의 결과들과 잘 일치함을 알 수 있었다. 비국소 이론에 의한 나노 판의 처짐에 관한 연구는 향후 관련연구에 비교자료로 활용될 수 있을 것이다.

**Abstract** In this paper, we study the bending and free vibration analysis of nano plate, using a nonlocal elasticity theory of Eringen with a third-order shear deformation theory. This theory has ability to capture the both small scale effects and quadratic variation of shear strain and consequently shear stress through the plate thickness. Analytical solutions of bending and vibration of a laminated composite nano plate are presented using this theory to illustrate the effect of nonlocal theory on deflection of the nano plates. The relations between nonlocal third-order and local theories are discussed by numerical results. Further, effects of (i) nonlocal parameters, (ii) laminate schemes, (iii) directions of the fiber angle and (iv) number of layers on nondimensional deflections are investigated. In order to validate the present solutions, the reference solutions are used and discussed. The results of anisotropic nano plates using the nonlocal theory may be the benchmark test for the bending analysis.

**Key Words** : Nonlocal elasticity theory; Third-order shear deformation theory; Bending analysis, Free vibration analysis, Nano plates

#### 1. 서 론

"나노(nano)란 그리스어의 "난장이"란 의미에서 유래

한 말로 10억분의 1을 가리키는 미세 단위이다. 1 나노미터(1 nm)는 머리카락 굵기의 10만분의 1에 해당하며 생체 분자의 DNA정도 크기이다. 20세기가 마이크로로 대별되

이 논문은 2011년도 경남과학기술대학교 기성회 연구비 지원에 의해 연구되었음.

\*Corresponding Author : Weon-Tae Park

Tel: +82-10-9437-5914 email: pwtae@kongju.ac.kr

접수일 12년 05월 08일

수정일 12년 07월 10일

게재확정일 12년 07월 12일

는 시대였다면 21세기는 나노시대라 할 수 있다. 나노기술을 응용분야별로 분류하면 크게 소재기술, 소자, 환경/생명공학 등으로 크게 분류할 수 있다. 소재기술분야의 복합재료의 물성향상, 소자기술 분야의 나노기능소자 구조개선, 환경/생명분야의 생체기능소자 개발 등의 분야는 역학적으로 매우 중요한 분야라고 할 수 있다.

마이크로 및 나노 규모 분야에서 빠른 기술 발달로 인해 미소 규모 효과 및 원자간 힘들의 고려가 반드시 필요하다. 이러한 효과를 무시하였을 경우에 완벽한 결과를 얻을 수 없거나 잘못된 설계를 하게 된다. 최근 들어 규모 효과나 원자간 거리에 대해서 고려하기 시작하였다. 그럼에도 불구하고 이러한 연구에서는 수많은 방정식이 필요하게 되어 해석에 엄청난 노력과 시간이 소모되었다. 따라서 연속체 역학의 개념이 방대한 시스템의 해석에 적용되었다. 이러한 연속체 역학 이론 중에 미소 규모 효과를 포함하며 잘 알려진 방법 중의 하나가 Eringen[1-2]의 비국소 탄성 이론이다. 기존의 고전적 연속체 역학 이론들과 비교하여 Eringen[1-2]의 비국소 탄성 이론은 수많은 방정식을 풀지 않고 나노 구조물의 거동을 정확하게 예측할 수 있다. Eringen[3]의 비국소 탄성 이론은 한 점의 응력이 연속체에서 모든 이웃점들의 변형률장의 함수로 고려된다. 원자간 힘들과 원자의 길이가 직접적으로 적합조건식에 재료적 특성으로 대입된다. 그러므로 앞으로 비국소 연속체 역학 개념이 나노구조물의 해석에 유용한 역할을 할 것으로 판단된다.

최근들어 몇몇 연구자들이 마이크로 및 나노 구조의 연구를 수행하였다[4-5]. 이러한 연구들은 고전적 판 이론 혹은 1차 전단변형 이론을 적용하였다. 2차원 나노 판의 정확한 응력장을 해석하기 위하여 개선된 연구가 필요하다. 고전적 판 이론에서는 수직 전단변형률과 전단응력을 무시하였다. 1차 전단변형 이론에서는 수직 전단변형률과 전단응력이 판의 두께방향을 따라 상수로 표현되었다. 이러한 이론은 전체적으로 판의 상면과 하면의 실제 응력을 가정한 것이다. 실제 응력과 가정된 상수 상태의 응력을 보정하기 위하여 두가지 경우에 수직 전단응력에 의한 에너지가 같다는 조건을 이용하여 전단보정계수가 도입되었다. 이원홍 등[6]은 점진기능재료(FGM)의 처짐에 관하여 1차원 전단변형을 고려한 해석적 결과를 제시하였다.

3차 전단변형이론은 Reddy[7]에 의해 변위장에서 두께방향 3차식으로 유도되었다. 전단변형률과 전단응력은 판의 두께방향을 따라 곡선 분포 하는 것으로 표현되었고 판의 상면과 하면에서 0으로 적용되었다. 따라서 전단보정계수가 필요하지 않게 되었다. 복잡한 평형방정식과 계산과정에도 불구하고 고전적 이론과 1차 전단변형 이

론에 비하여 3차 전단변형이론에 의한 결과는 3차원 탄성해석에 수렴된 결과를 나타낸다. 따라서 미소 규모 효과를 포함하는 3차 전단변형 판 이론의 확장 연구가 필요하다. 본 연구에서는 비국소 탄성 이론을 이용하여 3차 전단변형이 고려된 나노 구조물의 해석을 수행하고자 한다.

## 2. 비국소 탄성 이론

### 2.1 비국소 탄성 이론

Eringen[3]에 따르면 탄성 연속체의 한 점  $x$ 에서의 응력장은 그 점에서의 변형률장에만 관련있는 것이 아니고 연속체의 다른 모든 점들에 관련있는 것이다. Eringen[3]은 식(1)과 같은 비국소 응력 텐서를 제안하였다.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau) t_{ij}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1)$$

여기서  $t_{ij}(\mathbf{x})$ 는 고전적 응력텐서의 성분이고 커널 함수  $K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau)$ 는 비국소 탄성계수를 나타내며,  $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 는 유클리디안 놈으로 거리가 되고  $\tau$ 는 재료 상수이다. 일반적인 후크의 법칙에서 응력  $\mathbf{t}$ 는 식(2)와 같다.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{or} \quad t_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{C}$ 는 4차 탄성 텐서이다.

비국소 탄성 이론에서 운동방정식은 비국소 균형 법칙으로부터 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3)$$

여기서  $i, j$ 는  $x, y, z$ 으로 표현되고  $f_i, \rho$  그리고  $u_i$ 는 체적력, 밀도 그리고 변위 벡터를 의미한다. 식(1)을 식(3)에 대입하면 적분형태의 비국소 적합 조건식을 얻을 수 있다. 하지만 적분 형태의 방정식은 미분 방정식에 비해 해를 구하기 어렵다. Eringen[3]은 비국소 적합 조건식을 식(4)와 같이 미분 형태로 제안하였다.

$$t_{ij,j} + \mathcal{L}(f_i - \rho \ddot{u}_i) = 0, \quad (4)$$

여기서 선형 미분 연산자  $\mathcal{L}$ 은 식(5)로 정의된다.

$$\mathcal{L} = 1 - \mu \nabla^2, \quad \mu = e_0^2 \bar{a}^2, \quad (5)$$

여기서  $\mu$ 는 비국소 변수,  $e_0$ 는 실험으로 정해지는 재료 상수이고  $\bar{a}$ 는 내적 특성 길이이다.

식(5)의 연산자를 식(1)에 적용하면 적합 조건식이 식(6)과 같이 간단해진다.

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (6)$$

식(6)은 적분 관계식인 식(1)에 비해 선형 탄성 문제들의 적용에서 더 간단하고 편리하다.

## 2.2 미국소 탄성 판

식(2)와 식(6)을 이용하여 응력 관계식은 미국소 이론을 위한 변형을 항들로 재정리할 수 있다. 평면응력 가정에 기초한 판 이론에서  $\sigma_{zz} = 0$ 이 되고 2차원 문제로 해석된다.  $(x, y, z)$  좌표계에서  $xy$ -면은 판의 중립면이다. 따라서 평면응력 상태에서의 응력-변형을 관계식은 식(7)과 같다.

$$t_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (7)$$

여기서  $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - C_{\alpha\beta zz} C_{zz\gamma\delta} / C_{zzzz}$  이다. 그리고 수직 전단응력-변형을 관계는 식(8)과 같다.

$$t_{\alpha z} = 2\bar{C}_{\alpha z\gamma z} \varepsilon_{\gamma z}, \quad (8)$$

여기서  $\alpha, \beta, \gamma$  그리고  $\delta$  는  $x, y$  로 표현된다. 미국소 이론과 미국소 이론에서 면내력들의 관계는 식(6)을 판의 두께방향으로 적분하여 식(9)와 같이 얻을 수 있다.

$$\mathcal{L}(N_{ij}) = N_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(M_{ij}) = M_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(P_{ij}) = P_{ij}^L, \quad (9)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha z} \\ R_{\alpha z} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz,$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta}^L \\ M_{\alpha\beta}^L \\ P_{\alpha\beta}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} t_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha z}^L \\ R_{\alpha z}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} t_{\alpha z} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz.$$

윗첨자  $L$ 은 미국소 3차 전단변형 이론을 나타내고  $h$  판의 두께이다. 미국소 이론에서 판의 평형방정식은 식(3)을 두께방향으로 적분하여 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{i\alpha,\alpha} + F_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \ddot{u}_i dz, \quad (12)$$

여기서  $F_i = \int_{-h/2}^{h/2} q_i dz$  이다. 식(3)에  $z$ 를 곱하고 두께방향으로 적분하고 부분적분법을 사용하면 식(13)을 얻을 수 있다.

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \ddot{u}_\alpha z dz. \quad (13)$$

비슷한 방법으로 식(3)에  $z$ 의 고차항을 곱하고 적분하면 고차 면내력에 관한 식(14)를 얻을 수 있다.

$$P_{\alpha\beta,\beta} - 3R_{\alpha z} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \ddot{u}_\alpha z^3 dz. \quad (14)$$

일반적으로 식(5)의 미분 연산자  $\nabla$ 는 3차원 라플라스 연산자이다. 2차원 문제를 해석하기 위해 라플라스 연산자  $\nabla$ 는 2차원으로 감차할 수 있다. 2차원 선형 미분 연산자  $\bar{\mathcal{L}}$ 는 식(15)와 같다.

$$\bar{\mathcal{L}} = 1 - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (15)$$

미분 연산자  $\bar{\mathcal{L}}$ 는  $z$ 방향에 대해 독립적이다.

## 2.3 미국소 3차원 전단변형 이론

3차 전단변형 이론은 1차 전단변형 이론에서 판의 두께 전체에서 상수로 가정된 전단변형률과 전단응력을 상수가 아닌 일반적인 곡선분포로 가정하여 확장한 것이다 (Reddy, [7]). 판의 3차 전단변형 이론에서 변위장은 식(16)와 같다.

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + z\phi_\alpha - c_1 z^3 (\phi_\alpha + w_{,\alpha}^0), \quad u_z = w^0, \quad (16)$$

여기서  $u_\alpha$ 는 중립면( $z=0$ )의 한 점에서의 면내 변위들이고,  $c_1 = 4/3h^2$ ,  $u_z$ 는 판의 중립면에서 수직방향 변

위이다. 그리고  $\phi_\alpha$ 는 중립면에서 전단변형각이다.

3차원 전단변형 이론을 고려한 변위장을 식(12)-(14)에 대입하면 식(17)-(19)와 같다.

$$N_{i\alpha,\alpha} + F_i = I_0 \ddot{u}_i^0, \quad (17)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = I_2 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0), \quad (18)$$

$$P_{\alpha\beta,\beta} - 3R_{\alpha z} = I_4 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0). \quad (19)$$

이때  $i = z$ 일 때의 식(17)과 식(18)은 비국소 3차원 전단변형 이론의 굽힘 응답을 위한 평형방정식을 유도하기 위해 식(19)와 조합할 수 있다.

$$N_{\alpha z,\alpha} - c_2 R_{\alpha z,\alpha} + q_z + c_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta} \quad (20)$$

$$= I_0 \ddot{w}^0 + c_1 [I_4 \ddot{\phi}_{\alpha,\alpha} - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_{\alpha,\alpha} + \ddot{w}_{,\alpha\alpha}^0)],$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - c_1 P_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} + c_2 R_{\alpha z} \\ = I_2 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0) - c_1 [I_4 \ddot{\phi}_\alpha - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_\alpha + \ddot{w}_{,\alpha}^0)], \quad (21)$$

여기서  $I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)^k dz$  ( $k=0, 2, 4, 6$ ),  $c_2 = 3c_1$ 이다.

## 2.4 비국소 탄성 평형방정식

Hamilton[8]의 가상변위의 원리에서 3차원 비국소 판 이론에 의한 동적 평형방정식을 식(22)와 같이 구할 수 있다.

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt. \quad (22)$$

식(22)에 비국소 면내력을 대입하고 부분적분하면 식(23)-(27)과 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_x : N_{x,x,x} + N_{x,y,y} - \overline{\mathcal{L}} (I_0 \ddot{u}_x^0) = 0, \quad (23)$$

$$\delta u_y : N_{x,y,x} + N_{y,y,y} - \overline{\mathcal{L}} (I_0 \ddot{u}_y^0) = 0, \quad (24)$$

$$\delta w^0 : N_{z,x,x} + N_{z,y,y} - c_2 (R_{z,x,x} + R_{z,y,y}) \\ + c_1 (P_{x,x,x} + P_{y,y,y} + 2P_{x,y,xy}) - \overline{\mathcal{L}} [q_z - I_0 \ddot{w}^0 \\ - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_{x,x} + \ddot{\phi}_{y,y}) - c_1^2 I_6 (\ddot{\phi}_{x,x} + \ddot{\phi}_{y,y} + \ddot{w}_{,xx}^0 + \ddot{w}_{,yy}^0)] \\ = 0, \quad (25)$$

$$\delta \phi_x : M_{x,x,x} + M_{x,y,y} - c_1 (P_{x,x,x} + P_{x,y,y}) N_{zx} + c_2 R_{zx} \\ - \overline{\mathcal{L}} [I_2 \ddot{\phi}_x - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}^0) \\ - c_1 (I_4 \ddot{\phi}_x - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}^0))] = 0, \quad (26)$$

$$\delta \phi_y : M_{x,y,x} + M_{y,y,y} - c_1 (P_{x,y,x} + P_{y,y,y}) N_{zy} + c_2 R_{zy} \\ - \overline{\mathcal{L}} [I_2 \ddot{\phi}_y - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y}^0) \\ - c_1 (I_4 \ddot{\phi}_y - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y}^0))] = 0. \quad (27)$$

## 2.5 Navier 해법

나노 판의 처짐에서 미소 규모 효과를 연구하기 위해 비국소 3차원 전단변형이론을 이용한 단순지지 판의 휨 해석 결과를 제시하였다. 4변이 단순지지된 경우에 Navier방법으로 해석결과를 구할 수 있다. Navier해법에서 판의 중립면에서의 변위는 이중 푸리에 급수로 식(28)과 같이 표현할 수 있다.

$$u_x^0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} A_1, \\ u_y^0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} A_2, \\ w^0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} A_3, \\ \phi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} A_1, \\ \phi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} A_2, \\ q_z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} A_3, \quad (28)$$

여기서  $A_1 = \cos \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$ ,

$A_2 = \sin \xi x \cos \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$ ,  $A_3 = \sin \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn}t}$

그리고  $\xi = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\eta = \frac{n\pi}{b}$ ,  $\omega_{mn}$ 은 고유진동수이다.

정적 휨 해석 및 자유진동 해석을 위하여 식(28)을 식(23)-(27)에 대입하면 평형방정식 식(29)를 얻을 수 있다.

$$[\Gamma] \{\Delta\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (29)$$

여기서  $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ ,  $\{\mathbf{F}\}$ 는 하중벡터 그리고  $[\Gamma]$ 는 식(30)과 같다.

$$[\Gamma] = [\mathbf{K}], \\ [\Gamma] = [\mathbf{K}] - \omega_{mn}^2 [\mathbf{M}]. \quad (30)$$

여기서  $[\mathbf{K}]$ 는 강성행렬,  $[\mathbf{M}]$ 은 질량행렬이다.

### 3. 해석 결과

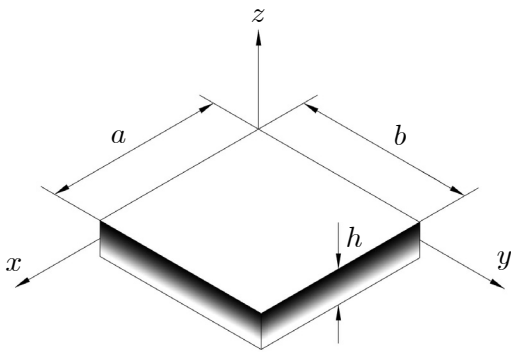
본 해석 기법의 성능을 검증하기 위하여 등방성 판의 해석결과를 참고문헌[9]의 처짐결과와 고유진동수 해석 결과와 비교하였다. 등방성 판의 재료 및 기하학적 성질은 표 1 그리고 그림 1과 같다.

#### 3.1 휨 해석

[표 1] 등방성 판의 재료 및 기하학적 성질

[Table 1] Material and Geometry properties of isotropic plate

$E$	$\nu$	$a=b$	$q_z$
$30 \times 10^6$	0.3	10	1.0



[그림 1] 비등방성 판의 기하학적 형상

[Fig. 1] Geometry of anisotropic plate

[표 2] 정사각형 등방성 판의 중앙점 무차원 처짐 ( $b/a = 1, a/h = 10$ )

[Table 2] Non-dimensional deflection of isotropic square plate ( $b/a = 1, a/h = 10$ )

$\mu$	Reddy[9]	본 연구 I	본 연구 II
0	4.1853	4.1848	4.6658
0.5	4.5607	4.5581	5.0836
1.0	4.9362	4.9313	5.5014
1.5	5.3116	5.3045	5.9192
2.0	5.6871	5.6777	6.3370
2.5	6.0625	6.0509	6.7548
3.0	6.4380	6.4241	7.1726

[표 3] 정사각형 등방성 판의 중앙점 무차원 처짐 ( $b/a = 1, a/h = 100$ )

[Table 3] Non-dimensional deflection of isotropic plate ( $b/a = 1, a/h = 100$ )

$\mu$	Reddy[9]	본 연구 I	본 연구 II
0	4.0100	4.0099	4.4384
0.5	4.3721	4.3713	4.8408
1.0	4.7342	4.7327	5.2432
1.5	5.0963	5.0941	5.6456
2.0	5.4584	5.4555	6.0480
2.5	5.8205	5.8169	6.4504
3.0	6.1826	6.1783	6.8528

본 연구 I 은 전단탄성계수에 포아송 비를 고려하지 않고 계산하였으며 Reddy[9]의 결과와 잘 일치 하는 것을 알 수 있다. Reddy[9]는 3개의 자유도를 사용하였고 본 연구 I 은 5개의 자유도를 사용하여 Reddy[9]의 결과와 미세한 오차가 발생하였다. 일반적으로 전단탄성계수는 포아송 비를 고려하여 계산하므로 본 연구 II 에서는 포아송 비를 고려하였고 5개의 자유도를 사용하며 비국소 탄성 이론을 적용한 정사각형 판의 중앙점 처짐을 무차원화 하여 나타내었다. 처짐의 무차원 값은 식(31)을 사용하여 나타내었다.

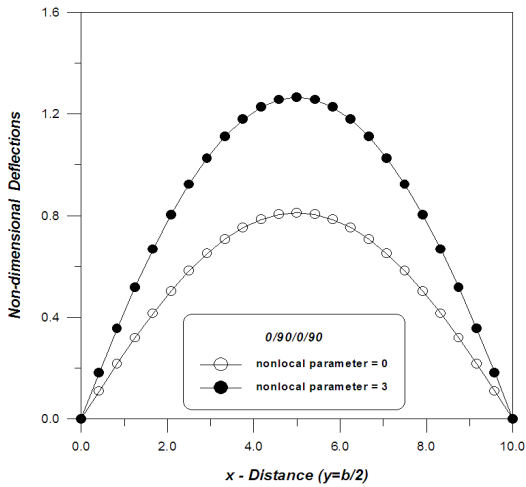
$$\bar{w} = w \times \frac{E_2 h^3}{q_z a_4} \times 10^2 \quad (31)$$

표 1-2 에서 알 수 있듯이 포아송 비가 고려된 전단탄성계수가 처짐에 매우 중요한 영향을 미침을 알 수 있었다.

이하 모든 예제는 포아송 비가 고려된 전단탄성계수와 5개의 자유도를 사용하여 계산하였다. Reddy[9]는 등방성 판의 결과만을 제시하였으나 본 연구에서는 비등방성 적층 복합 나노 판의 해석으로 확대 연구하였다. 적층 복합 나노 판의 재료 성질은 식(32)와 같고 기하 성질은 표 1과 같다.

$$E_1 = 25.0 \times 10^6, E_2 = 1.0 \times 10^6, G_{23} = 0.2 \times 10^6, G_{12} = G_{13} = 0.5 \times 10^6, \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25. \quad (32)$$

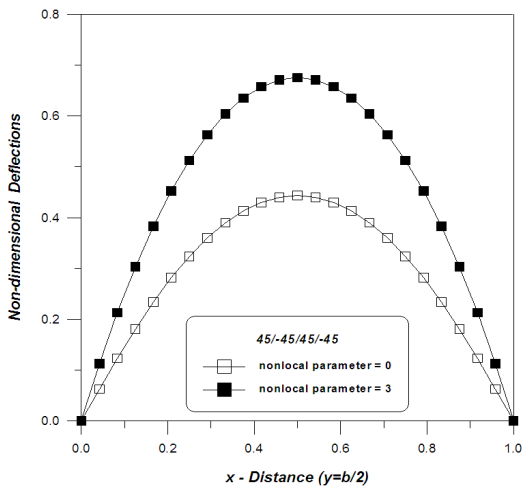
비국소 탄성 이론과 국소 탄성이론에 의한 비등방성 적층 복합 나노 판의 해석결과를 그림 2-3에 나타내었다. 그림 2에서 비국소 계수가 3인 경우의 처짐이 국소 탄성이론에 의한 결과보다 약 50%정도 크게 나타났다.



[그림 2] 비국소 변수의 변화에 따른 직교이방성 적층 나노 판의 처짐 형상

[Fig. 2] Deflections of cross-ply laminated nano plate with variable non-local parameter

그림 3에서는 그림 2와 마찬가지로 역대칭-앵글 플라이 적층 복합 나노 판의 경우에도 비국소 계수가 처짐을 증가시킴을 알 수 있었다. 따라서 미소 규모 효과를 고려한 해석을 수행할 때 비국소 계수의 고려는 반드시 필요하다고 판단된다.

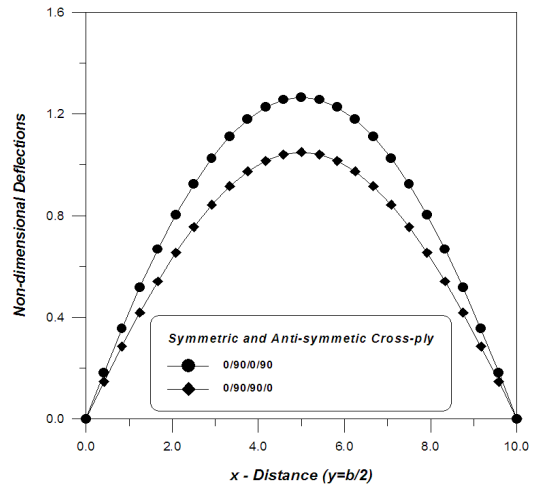


[그림 3] 비국소 변수의 변화에 따른 역대칭 앵글-플라이 적층 복합 나노 판의 처짐 형상

[Fig. 3] Deflections of anti-symmetric angle -ply laminated nano plate with variable non-local parameter

그림 4-6은 비국소 계수가 3인 경우에 적층형태, 보강방향 그리고 적층 수의 변화에 따른 적층 복합 나노 판의 처짐을 분석하였다. 국소 탄성 이론에서의 마찬가지로 비국소 탄성 이론을 고려한 경우에 직교이방성 적층 나노 판의 처짐

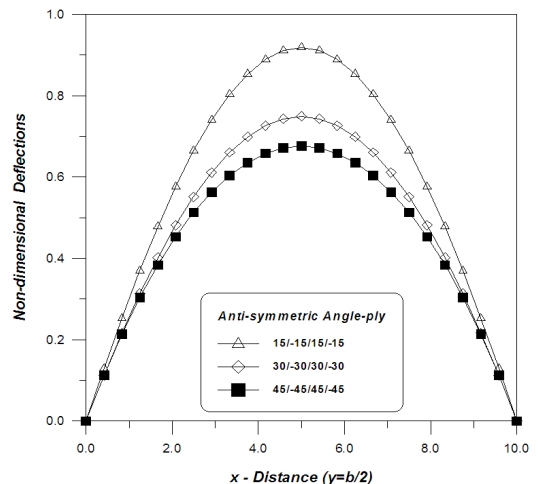
은 역대칭 직교이방성 배치의 경우가 처짐에 유리함을 그림 4를 통해 알 수 있었다.



[그림 4] 대칭 및 역대칭 직교이방성 적층 복합 나노 판의 처짐 형상 ( $\mu = 3.0$ )

[Fig. 4] Deflections of symmetric and anti-symmetric angle -ply laminated nano plate ( $\mu = 3.0$ )

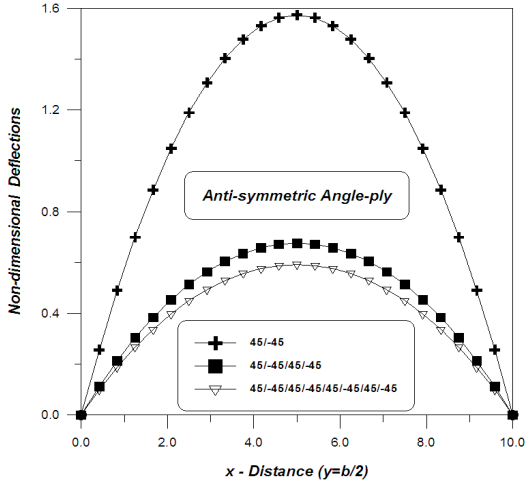
그림 5에서는 보강방향의 영향에 대하여 분석하였다. 역대칭 앵글-플라이 적층 복합 나노 판의 경우에 보강 방향이 45인 경우에 가장 작은 처짐이 발생하였다.



[그림 5] 역대칭 앵글-플라이 적층 복합 나노 판의 처짐 형상 ( $\mu = 3.0$ )

[Fig. 5] Deflections of anti-symmetric angle -ply laminated nano plate ( $\mu = 3.0$ )

그림 6에는 적층수의 변화에 따른 처짐의 분포를 나타내었다. 적층수가 2인 경우에서 4인 경우로 변할 때가 상대적으로 큰 처짐의 변화가 발생하였다. 적층수가 4 이상인 경우에 처짐의 변화는 미소할 것으로 판단된다.



[그림 6] 역대칭 앵글-플라이 적층복합 나노 판의 적층 수 변화에 따른 처짐 형상 ( $\mu = 3.0$ )

[Fig. 6] Deflections of anti-symmetric angle -ply laminated nano plate with variable number of layers ( $\mu = 3.0$ )

### 3.2 자유진동 해석

자유진동해석을 위한 나노 판의 기하학적 성질은 표 3 그리고 그림 1과 같다.

[표 3] 등방성 판의 재료 및 기하학적 성질  
[Table 3] Material and Geometry properties of isotropic plate

$E$	$\nu$	$a=b$	$\rho$
2.6	0.3	10	1.0

미국소 탄성 이론을 적용한 정사각형 판의 고유진동수를 무차원화 하여 나타내었다. 진동수의 무차원 값은 식 (33)을 사용하여 나타내었다.

$$\bar{\omega}_{11} = \omega_{11} \times h \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (33)$$

Reddy[9]의 결과와 비교하여 표 4와 5에 나타내었다. Reddy[9]는 3개의 자유도를 사용하였고 본 연구는 5개의 자유도를 사용하여 Reddy[9]의 결과와 미세한 오차가 발생하였다. Reddy[9]의 재료 물성치는 표 3의 내용으로 수

정되어야 하는 것을 알 수 있었으며 본 연구의 결과가 향후 나노 판의 고유진동수를 연구하는 연구자들에게 정확한 비교대상이 될 수 있을 것으로 판단된다.

[표 4] 정사각형 등방성 판의 무차원 고유진동수 ( $b/a = 1, a/h = 10$ )

[Table 4] Non-dimensional frequency of isotropic square plate ( $b/a = 1, a/h = 10$ )

$\mu$	Reddy[9] HSDT	Reddy[9] FSDT	본 연구
0	0.0935	0.0930	0.0930
1.0	0.0854	0.0850	0.0850
2.0	0.0791	0.0788	0.0788
3.0	0.0741	0.0737	0.0737
4.0	0.0699	0.0696	0.0695
5.0	0.0663	0.0660	0.0660

[표 5] 직사각형 등방성 판의 무차원 고유진동수 ( $b/a = 2, a/h = 10$ )

[Table 5] Non-dimensional frequency of isotropic square plate ( $b/a = 2, a/h = 10$ )

$\mu$	Reddy[9] HSDT	Reddy[9] FSDT	본 연구
0	0.0591	0.0589	0.0589
1.0	0.0557	0.0556	0.0556
2.0	0.0529	0.0527	0.0527
3.0	0.0505	0.0503	0.0503
4.0	0.0483	0.0482	0.0482
5.0	0.0464	0.0463	0.0463

표 5에서 형상비가 증가함에 따라 미국소 계수의 변화에 의한 고유진동수의 변화 폭이 감소함을 알 수 있었다.

[표 6] 직사각형 등방성 판의 무차원 고유진동수 ( $b/a = 3, 5, a/h = 10$ )

[Table 6] Non-dimensional frequency of isotropic square plate ( $b/a = 3, 5, a/h = 10$ )

$\mu$	본 연구 ( $b/a = 3$ )	본 연구 ( $b/a = 5$ )
0	0.0525	0.0492
1.0	0.0498	0.0468
2.0	0.0475	0.0448
3.0	0.0455	0.0430
4.0	0.0437	0.0414
5.0	0.0422	0.0400

형상비의 증가에 따른 나노 판의 무차원 고유진동수 변화를 표 6에 나타내었다. 형상비가 증가되어 나노 판이 보의 형태에 가까워지게 되면 비국소 탄성이론의 영향이 43% ( $b/a = 1$ )에서 24% ( $b/a = 3$ ), 23% ( $b/a = 5$ )로 점차 줄어들다는 것을 알 수 있었다.

#### 4. 결 론

미소 규모 나노 판의 정확한 해석을 위해서 비국소 탄성 이론을 적용하였다. 비국소 탄성 이론은 Eringen의 이론을 적용하였고 나노 판의 두께방향으로의 곡선 분포된 전단변형률 및 전단응력을 표현하기 위하여 3차원 전단 변형 이론을 사용하였다. 미소 규모 효과가 중요하게 적용되어야 하는 나노 판의 해석을 위하여 본 연구에서 이용한 비국소 연속체 역학 개념이 유용한 역할을 할 수 있을 것으로 판단된다.

등방성 판의 경우에 비국소 계수의 증가는 처짐의 크기를 증가시켰고 고유진동수는 감소시켰다. 비등방성 적층복합 나노 판의 경우에 비국소 계수가 3인 경우의 처짐이 국소 탄성 이론에 의한 결과보다 약 50%정도 크게 나타났다. 역대칭-앵글 플라이 적층 복합 나노 판의 경우에도 비국소 계수가 처짐을 증가시킴을 알 수 있었다. 따라서 미소 규모 효과를 고려한 해석을 수행할 때 비국소 계수의 고려는 반드시 필요하다고 판단된다. 국소 탄성 이론에서와 마찬가지로 비국소 탄성 이론을 고려한 경우에 직교이방성 적층 나노 판의 처짐은 역대칭 직교이방성 배치의 경우가 처짐에 유리함을 알 수 있었다. 역대칭 앵글-플라이 적층복합 나노 판의 경우에 보강방향이 45°인 경우에 가장 작은 처짐이 발생하였다. 적층 수가 4층 이상인 경우에 적층수의 변화에 따른 처짐의 변화는 미소할 것으로 판단된다.

본 연구의 결과는 향후 적층복합 나노 판의 처짐 및 자유진동현상을 연구하는 연구자들을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것으로 사료된다. 특히 미소 규모 효과가 고려되어야 하는 나노 판의 경우 기존의 연구 자료가 매우 부족하며 정확한 해석을 위한 연구 자료들이 전무한 실정이므로 향후 연구자들의 비교연구를 위한 정확한 자료들의 제시는 나노구조물의 해석을 보다 발전시킬 수 있는 기초자료로 활용될 수 있을 것이다.

#### References

[1] A. C. Eringen, "Nonlocal polar elastic continua", Int. J.

Eng. Sci., Vol. 10, pp. 1-6, 1972.

- [2] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", J. Appl. Phys., Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.
- [3] A. C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [4] H. Lu, H. Sun, A. Mao, H. Yang, H. Wang, X. Hu, "Preparation of plate-like nano a-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> using nano-aluminium seeds by wet-chemical methods", Mater. Sci.Eng., Vol. 406, pp. 19-23, 2005.
- [5] T. Sumitomo, H. Kakisawa, Y. Owaki, Y. Kagawa, "Structure of natural nano-laminar composites", Mater. Sci. Eng., Vol. 561, pp. 713-716, 2007.
- [6] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates, J. Korea Academia-Industrial cooperation Society, Vol. 9(4), pp. 1043-1049, 2008.
- [7] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates", J. Appl. Mech., Vol. 51, pp.745-752, 1984.
- [8] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, seconded, CRC Press, London, 2007.
- [9] R. Aghababaei, J. N. Reddy, "Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates", J. Sound Vib., Vol. 326, pp. 277-289, 2009.

#### 이 원 흥(Won-Hong Lee)

[정회원]



- 1987년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학석사)
- 1994년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재 : 경남과학기술대학교 토목공학과 정교수

#### <관심분야>

복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계, 진동해석, 나노구조의 해석



---

**한 성 천(Sung-Cheon Han)**

[정회원]



- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학교 철도건설과 부교수

<관심분야>

선형 및 비선형 구조해석, 유한요소법, 고유치 해석, 복합구조 설계, 나노구조의 해석

---

**박 원 태(Weon-Tae Park)**

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>

구조공학, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 동적 해석, 나노구조의 해석