

다종제품 동적로트사이징에 관한 연구

강용하^{1*}

¹노스캐롤라이나 주립대학교 산업시스템공학과

A Study on Multiple Product Dynamic Lot-sizing

Yong-Ha Kang^{1*}

¹Department of Industrial Systems Engineering, North Carolina State University

요약 본 논문은 다품종 동적 로트사이징 문제를 풀기 위하여 열생산 기법에 기반한 알고리즘을 제안한다. 제안한 알고리즘의 기본 개념은 한정된 생산 용량을 주문제를 통하여 n개의 제품에 할당하고, 주문제에 의하여 할당된 생산 용량을 기반으로 하여 각각의 제품에 대하여 최적화된 로트사이징 문제를 반복적으로 풀어나감으로써 해를 구해나가는 것이다. 부문제를 풀기 위해 본 논문은 로트사이즈, 재공재고 그리고 생산량 간에 존재하는 비선형관계를 기반으로 한 M/G/1모델 기반의 최적화 로트사이징 모델을 제안한다. 실험을 통하여 제안한 알고리즘이 비교적 짧은 시간 안에 좋은 해를 생성함을 보여준다.

Abstract This study presents a column generation approach for multiple product dynamic lot-sizing problem. The basic idea of this approach is to have a master problem which allocates limited capacity among n different products and a sub-problem that performs the optimal lot sizing for each product subject to capacity allocation given by the master problem. In the sub-problem, we develop M/G/1 queuing model based clearing function which captures nonlinear relationship between the lot size, the work in process level and the throughput. A large number of test problems are randomly generated to evaluate the performance. Computational results show that the proposed model can find better solutions within reasonable CPU times.

Key Words : Lot-sizing, Column Generation, Nonlinear Programming, Congestion

1. 연구의 배경 및 목적

오늘날 글로벌 시장 환경에서 치열한 경쟁, 짧아진 제품수명주기 그리고 높아진 고객의 기대 수준 등으로 인해 제조업체들은 생산관리에 많은 관심을 가지고 있으며, 생산관리 알고리즘 개발에 투자를 늘리고 있다. 생산계획은 생산비용 혹은 재고비용의 최소화나 이익의 극대화 같은 기업의 목표달성을 위해 주어진 계획구간에서 가능한 생산자원을 좀 더 효율적으로 사용할 수 있도록 도와주는 역할을 하는 것으로 기업들이 치열한 경쟁 환경에서 살아남기 위해서는 효율적인 생산관리가 필요함은 누구나 공감하는 사실일 것이다.

동적로트사이즈 결정문제는 재고비용을 최소화하거나

생산에 따른 이익을 최대화하기 위한 어느 시점에 얼마의 로트사이즈로 생산을 진행할지를 결정해주는 것으로 생산계획에서 가장 중요하면서 가장 해결하기 어려운 문제 중의 하나로 알려져 있다 (karimi et al. [9]). 만일 로트사이즈가 클 경우 제품들 간에 발생하는 셋업의 수가 작아진다. 따라서 주어진 생산능력을 생산에 집중해서 사용할 수 있는 장점이 있지만, 때로는 완제품 재고가 증가하여, 재고유지비용의 증가를 초래한다. 반대로, 로트사이즈가 작을 경우에는 개별 주문에 대해 효과적으로 빠른 대응이 가능하고, 재공재고의 수를 줄일 수 있는 장점이 있지만, 빈번한 셋업으로 인해 상당한 양의 생산능력의 손실이 발생하고, 결과적으로 리드타임이 증가하여 시스템 내에 적체현상(congestion)을 초래시킨다. 그러므로 적

이 논문은 2010년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임. [NRF-2010-357-D00257]

*Corresponding Author : Yong-Ha Kang

Tel: +82-17-334-8144 email: yonghakang@gmail.com

접수일 12년 02월 29일

수정일 (1차 12년 06월 11일, 2차 12년 06월 19일)

게재확정일 12년 07월 12일

절한 로트사이즈로 생산을 하는 것은 효율적인 생산자원의 관리 측면에서 중요하다. 특히, 생산 공정이 복잡하고, 공정의 리드타임이 길며 새로운 생산 자원을 투입하는데 많은 비용이 드는 반도체 산업에서 효율적인 로트사이징은 매우 중요하다.

동적로트사이즈결정문제와 관련된 기존 연구 대부분은 선형계획모형을 기반으로 한 것으로 실제 현장에서 존재하는 재공재고, 생산량과 리드타임간의 비선형관계를 반영한 모델은 찾기가 힘들다. 이러한 비선형 관계를 반영한 수리적 모델을 개발하는 것은 효과적인 생산계획을 수립하는데 있어서 매우 중요하며, 따라서 본 논문에서는 비선형관계가 존재하는 동적로트사이즈 결정 문제에 관한 효율적인 방법론을 개발하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 본 논문과 관련한 기존연구들에 대한 내용들이 있으며, 3장에서는 M/G/1 모형을 이용하여 시스템에 존재하는 비선형 관계를 수식화한 clearing function(CF)을 유도하고, 4장에서는 유도된 CF를 이용한 동적로트사이징 최적화 모델을 수립한다. 5장에서는 열생성기법을 활용한 휴리스틱 알고리즘이 기술되어 있고, 6장에서는 다양한 환경 하에서 실행된 실험 결과 및 분석을, 마지막으로 7장에서 결론 및 추후 연구 과제를 제시하는 것으로 마무리 한다.

2. 기존 연구

Harris[8]에 의해 전통적인 경제적 주문량(economic order quantity: EOQ) 모델이 개발된 이래 로트사이징모델에 관한 연구는 국내·외에서 광범위하게 진행되어 왔다. 특히, Wagner와 Whitin[23]이 제안한 동적로트사이즈 결정 알고리즘은 이후 많은 로트사이징 연구(Trigeiro et al.[22]; chen et al. [4]; Tempelmeier and Derstroff[21]; Lee et al[17])의 토대가 되었다.

Karmarkar[11]와 Srinivasan et al.[20]은 생산현장에서의 생산부하, 로트사이즈와 리드타임간의 비선형관계를 수식으로 표현하기 위해 CF 모형을 제안하였다. Karmarkar[11]는 대기행렬모형을 사용하여 로트사이즈, 생산부하 그리고 재공재고와의 관계를 연구하였고, 그들의 관계를 생산계획에 정확하게 반영하는 일은 매우 중요하다는 것을 밝혔다. 또한, Karmarkar et al.[12]은 Karmarkar[11]의 연구를 기반으로 경험적 로트사이징 모델을 제안하였고 목적함수를 기존에 많이 사용되던 비용의 최소화대신 생산 리드타임의 최소화를 사용함으로써 실용적인 로트사이징 정책을 제시하였다. Missbauer[19]는 주문투입계획에 CF 모형을 사용하였는데 그들이 제안

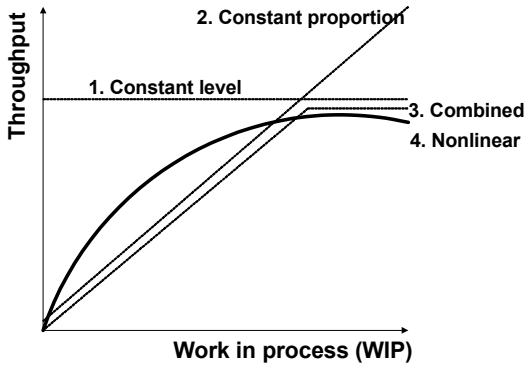
한 모델은 서로 다른 각 제품들이 주어진 생산자원을 어떻게 분배하여 사용할지에 관해서는 표현하지 못하는 약점을 가지고 있다. Asmundsson et al.[1]은 다중제품에 대한 비선형 생산계획 모델을 제시하였다. 그들은 시뮬레이션을 통하여 CF의 모양을 도식화하는데 성공하였고, 이를 반도체 공정에 적용하여 성공적인 생산관리 알고리즘을 제안하였다. 하지만 이들의 연구는 셋업타임과 로트사이즈가 공정에 미치는 영향에 관해서는 고려하지 않고 있다. Upasani & Uzsoy [23]는 생산자원 제약이 있는 환경에서 CF를 이용하여 마케팅 모형과 생산계획 모형을 결합한 모델을 제시하였다. 제안된 모델은 몇 가지 결점이 있지만 재공재고, 리드타임과 가격 결정 사이의 관계를 설명한 첫 번째 모형이라는 점에서 의미를 가지고 있다. Kim & Uzsoy[13],[14]는 CF를 이용하여 어느 시점에 얼마만큼의 생산용량을 늘일지 결정하는 생산계획모형에서 열생성기법을 이용하여 비용을 최소화하는 생산 계획 알고리즘[13]과 경험적 알고리즘[14]을 각각 제시하였다.

위에서 살펴본 것처럼 재공재고, 생산량과 리드타임과의 비선형관계에 관한 연구는 Karmarkar[11]에 의해 처음 연구된 이래 최근 들어 다시 활발하게 진행되어 오고 있다. 하지만 아직까지 이러한 비선형 관계를 동적로트사이즈결정문제에 적용한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서 본 논문에서는 비선형 동적로트사이즈결정 문제에 관한 해법을 제시하고자 한다.

3. Clearing Function(CF)

1950년대 이후로 동적로트사이즈결정 문제에서 선형 계획모형은 광범위하게 사용되어 왔다. 하지만 선형계획 모델은 여러 가지 한계점들을 가지고 있으므로 실제 현장에서 사용되기에는 괴리감이 있다. 특히 재공재고를 고려한 기존 연구는 찾아보기 힘들다. Karmarkar[11]의 연구에 따르면 로트사이징은 생산 시스템의 퍼포먼스에 크게 영향을 주며 특히 리드타임과 산출량에 큰 영향을 미친다.

대기행렬 이론의 관점에서 재공재고가 일정 레벨에 도달하게 되면 그 이후에는 산출량이 늘지 않는다. 이는 생산자원의 가동률이 1에 도달하기 전부터 발생하며, 그 시점 이후에는 비선형적으로 대기행렬과 리드타임이 폭발적으로 증가하게 된다. 하지만 기존의 선형계획모델들은 그림 1의 1처럼 재공재고와 리드타임과는 상관없이 항상 일정량의 생산이 이루어진다고 가정하거나 그림 1의 2처럼 재공재고와 생산량이 선형관계를 이루고 있다고 가정한다(고정 리드타임).



[그림 1] Clearing Function (Karmarkar [11])
 [Fig. 1] Clearing Function (Karmarkar [11])

보다 현실적이고 정확한 생산계획을 위해서는 재공재고, 산출량과 리드타임 간의 비선형 관계를 반드시 고려해야 하며, 따라서 본 연구에서는 위의 사실을 토대로 생산시스템을 모델링하는데 효율적이라고 알려진 (Missbauer, [19]), M/G/1 모델을 이용하여 리드타임, 재공재고와 생산량간의 비선형관계를 표현한 CF를 유도한다.

[Notation]

- $i(i = 1 \sim N)$: 제품 인덱스
- λ_i : 제품 i 의 도착률
- λ : 제품들의 도착률
- W_i : 제품 i 의 WIP 수준
- L_i : 제품 i 의 평균 로트리드타임
- T_i : 제품 i 의 평균 로트가공시간
- T_q : 제품 i 의 평균 로트대기시간
- p_i : 제품 i 의 가공시간
- s_i : 제품 i 의 셋업시간
- p'_i : 제품 i 의 정규화 된 가공시간
- s'_i : 제품 i 의 정규화 된 셋업시간
- ρ_i : 제품 i 의 가동률 = $\lambda_i T_i$
- ρ : 모든 제품들에 대한 가동률 = $\sum_i \lambda_i T_i$
- Q_i : 제품 i 의 로트사이즈
- Y_i : 제품 i 의 로트수
- C_i : 기간 t 에서의 생산능력

지금부터 재공재고, 로트사이즈와 생산량간의 비선형 관계 수식을 유도한다. 리틀의 법칙(Little's Law)에 의하여 제품 i 의 도착률은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_i = \frac{W_i}{L_i} \tag{1}$$

리드타임은 제품의 로트 가공시간과 큐에서의 대기시간으로 구성된다. 이때 대기시간은 Pollaczek-Khintchine 공식에 의하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_q = \frac{\lambda E[(T_i)^2]}{2(1-\rho)} \tag{2}$$

이 때, 제품 i 의 로트가 선택될 확률은 $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ 이고, 따라서, $E[(T_i)^2] = \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} (T_i)^2$ 이다. 정리하면 큐에서의 대기시간은

$$T_q = \frac{\lambda E[(T_i)^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} (T_i)^2}{2(1-\rho)} = \frac{\sum_i \lambda_i (T_i)^2}{2(1-\rho)} \tag{3}$$

이다.

시스템은 주어진 계획 구간에서 안정화 상태라는 가정 하에 어떤 기간에 제품 i 의 도착률은 제품 i 의 로트수와 같다고 할 수 있다. 따라서,

$$Y_i = \frac{\frac{W_i}{Q_i}}{T_i + T_q} = \frac{\frac{W_i}{Q_i}}{T_i + \frac{\sum_i Y_i (T_i)^2}{2(1-\rho)}} \tag{4}$$

이다.

시간 단위를 맞추기 위하여 정규화된 셋업시간과 가공시간을 이용하여 위의 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$Y_i = \frac{\frac{W_i}{Q_i}}{(s'_i + p'_i Q_i) + \frac{\sum_i Y_i (s'_i + p'_i Q_i)^2}{2(1 - \sum_i Y_i (s'_i + p'_i Q_i))}} \tag{5}$$

$$= \frac{\frac{W_i}{Q_i}}{(s'_i + p'_i Q_i) + \frac{Y_i (s'_i + p'_i Q_i)^2 + \sum_{j(\neq i)} Y_j (s'_j + p'_j Q_j)^2}{2(1 - Y_i (s'_i + p'_i Q_i) - \sum_{j(\neq i)} Y_j (s'_j + p'_j Q_j))}}$$

CF는 주어진 계획 구간에서 생산되는 제품 i 의 전체 수를 의미하는 것으로 식 (5)의 양변에 Q_i 를 곱함으로써 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$f(Q_i, Y_i, W_i, Q_{j(\neq i)}, Y_{j(\neq i)}) = Q_i Y_i \quad (6)$$

$$= \frac{W_i}{(s'_i + p'_i Q_i) + \frac{Y_i (s'_i + p'_i Q_i)^2 + \sum_{j(\neq i)} Y_j (s'_j + p'_j Q_j)^2}{2(1 - Y_i (s'_i + p'_i Q_i) - \sum_{j(\neq i)} Y_j (s'_j + p'_j Q_j))}}$$

따라서, CF는 제품 i 의 로트사이즈, 로트수, 재공재고와 다른 제품 j 에 할당된 가동률 비율과 제품 j 의 로트사공시간에 의한 함수로 정의할 수 있다.

4. 동적로트사이징모형

본 장에서는 유도된 CF를 기반으로 한 다품종 단일기계에서의 비선형 동적 로트사이징 모형에 관하여 다룰 것이다.

제안하고 있는 모델은 재공재고를 명시적으로 모델링한다는 점에서 기존 연구와는 다르다. 두 번째로 기존의 연구와는 다르게 셋업비용을 목적함수에 명시적으로 나타내지 않고, CF를 이용한 생산용량 제약식을 통해 셋업이 제어되도록 하였다. 실제로 생산현장의 현금흐름 상에서 셋업 비용이 차지하는 비용은 낮다. 셋업을 줄이려고 하는 이유는 실질적인 비용측면보다는 생산용량의 기회비용의 측면에서 보는 것이 타당하다. 즉, 셋업이 증가하면 실제로 생산에 투입될 수 있는 생산용량이 작아지게 되는 것이다. 이러한 셋업의 효과는 시간에 따른 시스템의 특성에 따라 변화하게 되므로 대기행렬 모델에 기반한 셋업의 효과를 추정할 필요가 있다. 따라서 본 논문에서는 기존의 방식처럼 고정된 셋업 비용을 목적함수에 사용하는 것이 아니라 큐잉이론에 따라 셋업을 CF에 반영한 수리적 모델을 제안한다.

[용어체계]

결정변수

- T_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 평균 로트가공시간
- T_{gi} : 제품 i 의 기간 t 에서의 평균 로트대기시간
- Q_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 로트사이즈
- Y_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 로트수
- W_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 재공재고 수준
- I_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 완제품재고 수준
- R_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 투입량

B_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 이월주문수

모수

- D_{it} : 제품 i 의 기간 t 에서의 수요
- h_i : 제품 i 의 완제품재고 유지 비용
- w_i : 제품 i 의 재공재고 유지 비용
- b_i : 제품 i 의 이월주문 비용

(비선형 동적로트사이징모형)

$$\min \sum_i \sum_t h_i I_{i,t} + \sum_i \sum_t w_i W_{i,t} + \sum_i \sum_t b_i B_{i,t} \quad (7)$$

subject to

$$W_{i,t} = W_{i,t-1} + R_{i,t} - Q_{i,t} Y_{i,t}, \quad \forall i, t \quad (8)$$

$$I_{i,t} - B_{i,t} = I_{i,t-1} - B_{i,t-1} + Q_{i,t} Y_{i,t} - D_{i,t}, \quad \forall i, t \quad (9)$$

$$Q_{i,t} Y_{i,t} \leq f_i(Q_{i,t}, Y_{i,t}, W_{i,t}, Q_{j(\neq i),t}, Y_{j(\neq i),t}), \quad \forall i, t \quad (10)$$

$$\sum_i Y_{i,t} (s_i + p_i Q_{i,t}) \leq 1, \quad \forall t \quad (11)$$

$$Q_{i,t}, Y_{i,t}, I_{i,t}, W_{i,t}, R_{i,t}, B_{i,t} \geq 0, \quad \forall i, t \quad (12)$$

본 문제에서 결정변수는 로트사이즈(Q_{it}), 로트의 수(Y_{it}), 완제품 재고의 수(I_{it}), 재공재고(W_{it}), 투입량(R_{it})과 이월주문(B_{it})이며, 목적함수는 완제품 재고와 재공재고 유지비용과 이월주문비용의 합의 최소화이다. 또한 제약식은 재공재고 평형식(8), 완제품재고(9), CF를 이용한 생산용량 제약식(10), 가동률 제약식(11)과 비음해 조건 제약식(12) 등으로 구성되어 있다.

5. 열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘

생산용량 제약이 존재하는 단일제품 로트사이즈 결정 문제는 NP-hard임이 밝혀져 있고(Florian et al.[7]; Bitran & Yanasse[1982]), 또한 다제품으로 확장될 경우 그 문제는 강한 NP-hard 라는 것이 Chen & Thizy[5]에 의해 증명되었다. 또한, Maes et al.[18]은 셋업이 존재하는 로트사이징문제에서 가능해를 찾는 것조차 NP-hard라는 것을 밝혀냈다. 본 논문에서 다루고 있는 문제는 이보다 더욱 더 복잡한 문제로 4장에서 제시한 수리적 모형을 보다 효과적으로 풀기 위해서는 실제 공정에 적용하기 용이한 휴리스틱 알고리즘의 개발이 요구된다.

하나의 대안으로 오랜 세월동안 라지스케일 정수계획법을 푸는 데 있어서 그 성능이 증명된 열생성기법을 이용한 휴리스틱 알고리즘을 제안한다.

열생성기법은 항공승무원스케줄링, 차량경로문제와 cutting stock 문제 등 많은 분야에서 이용되고 있고 (Wilhelm[25]), 국내에서도 제한용량이 있는 입지선정 문제 (Cho[6]), 지하철 일간승무계획문제 (Byun[3])와 선박 건조혼합의 최적화 문제(Kim[15]) 등에 적용되어 좋은 연구 결과를 보여주었다.

열생성기법을 이용한 이 방식은 Lasdon-Terjung[16]의 접근방법에서 착안한 것으로 기본 아이디어는 주문제에서 서로 다른 n 개의 제품에 주어진 생산용량을 할당해주고 주문제에서 얻은 쌍대값들을 이용하여 부문제의 목적함수식을 변형시키고, 변형된 문제를 최적화 해를 찾는 것이다. 즉, 열생성기법으로 생산용량 할당 생산스케줄문제(주문제)를 풀고 단일제품 로트사이징문제(부문제)를 차례대로 풀면 다중제품 로트사이징문제를 해결할 수 있다.

(주문제)

$k(k=1, \dots, K)$ 를 각 제품 i 의 생산스케줄이라 하고, $Q_{i,t}^k$ 와 $Y_{i,t}^k$ 를 스케줄이 k 일 때, 제품 i 의 시간 t 에서의 로트사이징과 생산되는 로트수라 하자. 이 때 $\tau_{i,t}^k (= (s_i + p_i Q_{i,t}^k) Y_{i,t}^k)$ 는 주어진 생산 스케줄에서 $Q_{i,t}^k Y_{i,t}^k$ 만큼의 수량을 생산하는데 소요되는 시간이다. 또한 $V_i^k (= \sum_t h_i I_{i,t}^k + w_i W_{i,t}^k + b_i B_{i,t}^k)$ 를 각 제품 i 의 해당 스케줄에 대응하는 비용이라고 정의하고, γ_i^k 는 생산스케줄 k 에 따라 제품 i 를 생산할 경우에는 1의 값을 갖고, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 0-1정수형 변수라고 정의하면 우리는 각 기간마다 서로 다른 n 개의 제품들에게 공정의 생산용량을 할당해 주는 주문제를 식(13)~(16)과 같이 모델링 할 수 있다.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{K_i} V_i^k \gamma_i^k \tag{13}$$

$$s.t. \sum_{k=1}^{K_i} \tau_{i,t}^k \gamma_i^k \leq C_t, \quad \forall i, t \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{K_i} \gamma_i^k = 1, \quad \forall i \tag{15}$$

$$\gamma_i^k \in (0, 1), \quad \forall i, k \tag{16}$$

(선형완화된 주문제)

주문제에서 최적화된 정수해를 구하는 것은 매우 어렵기 때문에 0-1 정수형 변수를 γ_i^k 로 선형 완회시킨 식 (17)~(20)과 같은 선형완화된 주문제를 생성한다.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{K_i} V_i^k \gamma_i^k \tag{17}$$

$$s.t. \sum_{k=1}^{K_i} \tau_{i,t}^k \gamma_i^k \leq C_t, \quad \forall i, t \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{K_i} \gamma_i^k = 1, \quad \forall i \tag{19}$$

$$0 \leq \gamma_i^k \leq 1, \quad \forall i, k \tag{20}$$

(부문제)

다음으로 주문제에 포함될 열을 어떻게 구성할 것인가를 정해 주어야 한다. $\alpha_{i,t}^k$ 와 $\mu_{i,t}^k$ 를 각각 제약식 (18)과 (19)와 관련된 쌍대변수들이라고 정의하면 이것을 이용하여 각 제품 i 에 대한 수정비용을 구할 수 있게 된다. 현재 목적함수가 비용의 최소화이므로 제품에 대한 수정비용이 0보다 작을 경우 그것을 다시 선형완화된 주문제에 추가한 후 다시 전체문제를 최적화를 시킨다. 이렇듯 선형완화된 주문제에 추가될 제품 i 를 찾는 문제를 부문제라 하며 식(21)~(26)으로 정의할 수 있다.

$$\min_k \sum_t (h_i I_{i,t}^k + \sum_t w_i W_{i,t}^k + \sum_t b_i B_{i,t}^k) + \sum_t \alpha_{i,t}^k (s_i + p_i Q_{i,t}^k) Y_{i,t}^k + \mu_i^k \tag{21}$$

subject to

$$W_{i,t}^k = W_{i,t-1}^k + R_{i,t}^k - Q_{i,t}^k Y_{i,t}^k, \quad \forall i, t \tag{22}$$

$$I_{i,t}^k - B_{i,t}^k = I_{i,t-1}^k - B_{i,t-1}^k + Q_{i,t}^k Y_{i,t}^k - D_{i,t}^k, \quad \forall i, t \tag{23}$$

$$Q_{i,t}^k Y_{i,t}^k \leq f_i(Q_{i,t}^k, Y_{i,t}^k, \overline{W_{i,t}^k} | \rho_{j,t}^{k-1}, \rho_{j,t}^{k-1} T_{j,t}^{k-1}), \quad \forall i, t \tag{24}$$

$$\sum_i Y_{i,t}^k (s_i + p_i Q_{i,t}^k) \leq 1, \quad \forall t \tag{25}$$

$$Q_{i,t}^k, Y_{i,t}^k, I_{i,t}^k, W_{i,t}^k, R_{i,t}^k, B_{i,t}^k \geq 0, \quad \forall i, t \tag{26}$$

제약식(24)에서 다른 제품의 정보들인 $\rho_{j,t}^k$ 과 $\rho_{j,t}^k T_{j,t}^k$ 는 식 (27)과 (28)을 이용하여 구한다.

$$\rho_{j,t}^k = \sum_{k=1}^{K_j-1} \gamma_j^k Y_{i,t}^k (s_i + p_i Q_{i,t}^k) \tag{27}$$

$$\rho_{j,t}^k T_{j,t}^k = \sum_{k=1}^{K_j-1} \gamma_j^k Y_{i,t}^k (s_i + p_i Q_{i,t}^k)^2 \tag{28}$$

부문제를 최적화한 결과 목적식의 값이 0보다 작은 제

품 i 가 존재한다고 하자. 이것은 주문제에 존재하는 변수들 중에서 수정비용이 음수인 변수가 존재한다는 것을 뜻하며, 이 경우 선형완화 주문제의 최적해는 주문제의 선형완화식의 최적해가 아닐 가능성이 존재하게 된다. 따라서 수정비용이 음수인 제품 i 를 다시 선형완화주문제에 추가하여 최적화를 시행한다. 이러한 변수 추가와 최적화의 과정을 반복하여 모든 제품에 대해 부문제의 최적해의 값이 0이상이 되면, 선형완화주문제의 최적해는 주문제의 선형완화된 최적해가 되는 것이다.

위의 내용들을 바탕으로 한 열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘의 절차는 다음과 같다.

[알고리즘 절차]

Step 0. 초기화

1. 각 제품별로 이월주문으로 구성된 열을 주문제에 포함
2. 쌍대값을 얻기 위해 구성된 초기 주문제 풀기

Step 1. 부문제 풀기

1. 주어진 쌍대값을 이용하여 모든 제품에 대하여 다음의 부문제를 풀기

$$\xi_i = \min_k \sum_t (h_i I_{i,t}^k + w_i W_{i,t}^k + b_i B_{i,t}^k) + \sum_t \alpha_{i,t}^k (s_i + p_i Q_{i,t}^k) Y_{i,t}^k + \mu_i^k$$

2. 만일 $\min \xi_i < 0$ 이면 step 2로, 그렇지 않으면 알고리즘 종료.

Step 2. 새로운 주문제 구성 및 주문제 풀기

1. 수정비용이 최소인 제품의 열을 주문제에 포함
2. 새로운 주문제 풀이로부터 새로운 쌍대값 구함

Step 3. 알고리즘 종료조건 확인

1. 수정비용의 값이 모두 0보다 크거나, 탐색시간이 정해진 cpu시간에 도달하면 탐색 종료

Step 0에서 일단 모든 제품이 이월주문 뒀다고 가정하고 후 초기 주문제를 구성한다. 이를 통해 구해진 쌍대값들을 이용하여 각 제품의 부문제를 구성할 수 있게 된다. Step 1에서 각각의 부문제를 풀 후 수정비용이 가장 작은 제품의 열을 주문제에 포함시킨다. 즉, 가장 목적함수 값에 기여도가 큰 열을 주문제에 포함시키는 것이다. 만일 이때 선택된 열의 수정비용이 0보다 크다면 더 이상 주문제의 목적함수 값을 향상시킬 수 있는 스케줄이 존재하지 않는다는 것을 의미하므로 알고리즘은 종료된다. 그렇지 않으면 선택된 열이 포함된 주문제를 다시 구성하고 새로운 쌍대값을 구하기 위하여 주문제를 다시 푼다. 이러한 일련의 과정들이 탐색 종료 조건을 만족할 때까지

반복적으로 행하여진다.

6. 결과 분석 및 결론

6.1 비교 대안과 실험 설계

본 연구에서 제시한 열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘의 효과를 검증하기 위하여 동일한 실험 환경 상태에서 모의실험을 실시하였다. 알고리즘의 성능을 비교하기 위한 척도로는 목적함수 값과 전체 cpu 시간이 사용된다.

실험에서는 제품의 수를 2개로 고정하였다. 제품들의 특징을 달리하기 위하여, 두 제품의 가공 시간은 1로 고정하였고, 셋업 시간은 각각 60과 20으로 설정하였다. 재공재고, 완제품재고 유지비용과 이월주문비용은 각각 1, 1.5와 10으로 고정시켰고, 고려되는 기간은 10으로 설정하였다.

본 논문에서는 생산 자원의 서로 다른 가동률에 따른 로트사이징의 변화를 파악하기 위하여 세 가지 다른 수요(L, M, H)수준을 고려한다. 각 수준 별로 각 기간별 전체 수요는 평균이 3000, 5000과 7000이고, 각각의 평균값에 두가지의 수요변동 계수값들(0.1, 0.5)을 곱한 값을 표준 편차로 갖는 정규분포로부터 생성하였다. 생성된 각 기간별 전체수요에 주어진 제품 혼합 비율인 0.5/0.5와 0.3/0.7을 각각 적용시켜 각 제품마다 각 수요 수준에 따른 수요를 생성시켰다. 한편 각 기간마다의 생산 용량은 10000으로 고정된다.

본 실험에서 사용하는 벤치마킹데이터는 표 1과 같이 수요수준, 수요변동수준과 제품혼합비율의 조합으로 생성된 12개의 시나리오와 각 시나리오마다 10개의 반복 문제를 풀게 되어 총 120개의 문제로 구성되어 있다.

[표 1] 실험계획

[Table 1] Design of experiment

	Values	Total
Demand level	3000, 5000, 7000	3
Demand variability	0.1, 0.5	2
Product mix rate	0.3/0.7, 0.5/0.5	2
Combination		12
Problems per Combination		10
Total Problems		120

본 연구에서 제시한 열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘은 MATLAB 2009a를 이용하여 구현하였고. 부문제의 풀이에는 국부해를 찾아주는 비선형계획법용 솔버인 knitro를 이용하였으며, 비교 대안으로서 4장에서 식(7)~

식(12)로 구성된 비선형 동적로트사이징모형을 비선형계 획법 전체 최적해 상용화 프로그램인 BARON을 이용하여 구한 결과 값을 이용하였다. 모든 실험에는 Intel Core 2(2.66GHz, 2GB RAM)가 사용되었다.

6.2 실험 결과 및 분석

이 장에서는 6.1에서 언급한 120개의 실험 데이터를 사용하여 본 논문이 제시한 알고리즘의 성능을 목적함수와 cpu면에서 분석한다.

■ 목적함수

표 2는 6.1에서 언급한 120(12×10)회의 실험 결과를 정리한 것이다. 비교대안의 경우 최적해를 구하기가 현실적으로 불가능하기 때문에, 600초 동안의 계산을 통해 나온 최고의 목적함수 값을 이용하였다. 해의 질을 가능하는 척도로서 비교대안모델이나 제시된 열생성기반 휴리스틱 알고리즘으로 실험하여 얻은 목적함수 값(obj_{method})을 둘 중 더 낮은 목적함수 값($\min obj_{method}$)으로 나누어 준 비교값을 사용한다.

$$\text{비교값} = \frac{obj_{method}}{\min obj_{method}} \quad (29)$$

표 2의 각 셀에는 수요수준, 수요변동모수와 제품혼합 비율을 기초로 한 서로 다른 문제에 대하여 10회씩 반복된 실험의 비교값의 평균값(Avg)과 표준편차(Std) 값이 알고리즘 별로 정리되어 있다. 평균값의 수치가 1에 가까울수록 해의 성능이 뛰어나다 것을 의미한다. 표에서 보듯이 열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘의 전체 평균값은 1.05이고, 비교대안의 경우 1.47이다. 따라서 평균적으로 제안한 휴리스틱 알고리즘의 해의 성능이 비교대안보다 더 뛰어난 것을 볼 수 있다.

다음으로 수요 수준의 변화에 따른 결과를 분석해 보자. 수요수준이 (L)과 (M)일 경우 열생성 알고리즘은 평균값이 1에 가깝고 그 표준편차 또한 매우 작다. 이는 수요수준이 (L)이거나 (M)일 경우 제안한 휴리스틱 알고리즘이 우수하다는 것을 증명해준다. 수요수준이 (H) 일 경우에도 마찬가지로 제안한 휴리스틱 알고리즘은 평균값이 1.15로 비교대안(1.47)보다 우수하다. 하지만 표준 편차가 0.42로, 수요 수준이 (H)일 경우에는 문제에 따라 알고리즘의 성능이 영향을 받는 것으로 보인다. 수요수준이 높다는 것은 생산 가동률이 높다는 것을 의미하는 것으로, 충분하지 않은 생산 용량 때문에, 수정비용이 0보다 작은 열을 찾지 못하게 되는 경우가 발생하는 것이다. 따라서 알고리즘 초기에 포함된 이월 주문된 열이 계속 주문제에 남아 있게 되고, 이것이 알고리즘의 성능에 부

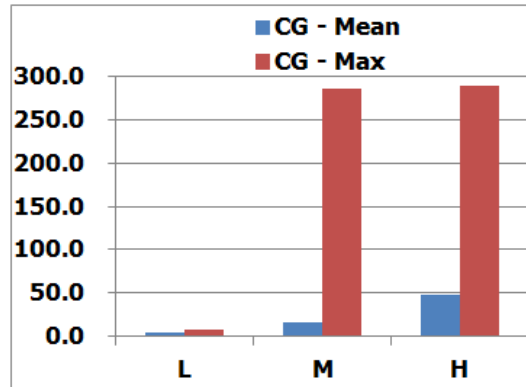
정적으로 영향을 주는 것으로 판단된다.

[표 2] 목적함수에 따른 실험결과
[Table 2] Results for objective function values

Demand Level	Mix rate	Var	A		B	
			Avg	Std	Avg	Std
L	0.3/0.7		1.00	0.03	1.70	0.22
		0.1	1.01	0.04	1.70	0.24
		0.5	1.00	0.00	1.67	0.18
	0.5/0.5		1.02	0.06	1.73	0.29
		0.1	1.00	0.00	1.69	0.21
		0.5	1.00	0.00	1.65	0.14
M	0.3/0.7		1.00	0.00	1.73	0.26
		0.1	1.00	0.02	1.47	0.27
		0.5	1.00	0.01	1.59	0.28
	0.5/0.5		1.00	0.00	1.60	0.24
		0.1	1.00	0.01	1.58	0.33
		0.5	1.01	0.02	1.35	0.22
H	0.3/0.7		1.00	0.00	1.50	0.18
		0.1	1.01	0.03	1.20	0.13
		0.5	1.15	0.42	1.25	0.82
	0.5/0.5		1.19	0.57	1.42	1.15
		0.1	1.30	0.78	1.75	1.59
		0.5	1.09	0.23	1.10	0.18
Total		1.12	0.17	1.07	0.09	
	0.1	1.10	0.18	1.11	0.10	
	0.5	1.13	0.17	1.04	0.06	
Total			1.05	0.25	1.47	0.54

A:열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘, B: 비교대안

■ CPU



[그림 2] cpu에 따른 실험결과
[Fig. 2] Results for cpu time

그림 2는 열생성 알고리즘(CG)을 사용했을 때 소요되는 평균(Mean)과 최고(Max) cpu 시간을 각 수요수준 별로 나타내고 있다. 비교대안의 경우 실행시간은 모든 문제에 대하여 600초로 동일하다. 그림에서 보듯이 열생성

알고리즘을 이용하였을 때 평균적으로 10초 이하의 시간에 해를 찾는 것으로 드러났고, 최악의 경우에도 모든 문제에서 실행시간이 300초를 넘지 않고 있다. 즉, 비교대안의 실행시간인 600초보다 상당히 빠른 시간 안에 비교적 좋은 해를 찾음을 알 수 있다.

수요수준이 증가할수록 cpu 시간은 점점 증가하는 것을 볼 수 있는데, 이는 수요가 높을 경우, 즉, 가동률이 높을 경우 부문제를 푸는 데 시간이 좀 더 소요되기 때문이다.

7. 결론 및 추후연구

본 연구에서는 생산현장에서 존재하는 생산량, 리드타임과 재공재고 간에 존재하는 비선형관계를 수리적으로 표현한 CF를 유도하였고, 이를 토대로 다품종 비선형 동적로트사이징모형을 제안하였다. 마지막으로 해당 모델에 대하여 현실적으로 비교적 빠른 시간 안에 합리적인 해를 찾을 수 있도록 하는 열생성기법 기반 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. 지금까지 대부분의 연구들은 리드타임이 고정되었거나 재공재고와 선형관계를 가진다는 현실과 괴리된 가정을 기반으로 한 것들로, 본 연구에서 제안한 비선형 동적로트사이징모형을 통해 이러한 현실적인 괴리감을 다소나마 단축할 수 있을 것으로 예상된다. 또한 생산 계획 실행 시 반드시 고려해야 하는 재공재고를 명시적으로 모델링 했다는 점과 셋업을 CF 제약식을 통해 조절한다는 것을 본 논문의 또 다른 중요한 기여라고 할 수 있다. 또한 제안된 열생성 기법을 활용할 경우 비교적 빠른 시간 안에 좋은 해법을 제시할 수 있음이 실험을 통하여 증명하였다.

본 논문은 단일 기계를 대상으로 한 알고리즘 개발에 초점을 두고 있다. 따라서 추후 연구로 목표 시스템을 다기계로 확장한 모형 개발로 연장할 수 있을 것이다. 또한 제시된 모델은 선형완화된 문제를 풀었기 때문에, 정수형 모델에 관한 해법 개발도 추후 연구해야 할 과제이다.

References

[1] Asmundsson, J., Rardin, R. L., & Uzsoy, R., "Tractable nonlinear production planning models for semiconductor wafer fabrication facilities", *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 19(1), 95 - 111, 2006.
 [2] Bitran, G.R. and Yanasse, H.H., "Computational complexity of the capacitated lot size problem",

Management Science, 28(10), 1174 - 86, 1982.
 [3] Byun, J. I., Lee, K.S., Park, S.S. and Kang, S. Y., "An Integer Programming Approach to the Subway Daily Crew Scheduling Problem", *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, 27(4), 67-87. 2002.
 [4] Chen, H.D., D.W. Hearn and C.Y. Lee, "Minimizing the Error Bound for the Dynamic Lot Size Mode", *Operations Research Letters*, 17, 57-68. 1995.
 [5] Chen, W.H. and Thizy, J.M., "Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem". *Annals of Operations Research*, 26, 29 - 72. 1990.
 [6] Cho, G., "A Study for a Capacitated Facility Location Problem on a Tree Structured Network", *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 27(3), 250-259, 2001.
 [7] Florian, M., Lenstra, J.K. and Rinnooy Kan, A.H.G., "Deterministic production planning algorithms and complexity", *Management Science*, 26(7), 669 - 79, 1980.
 [8] Harris, F. W., *Operations and Cost*, In Factory Management Series, A. W. Shaw Co., Chicago, 1915.
 [9] Karimi, B., Fatemi Ghomi, S.M.T. and Wilson, J.M., "The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms", *Omega*, 31, 365-378, 2003.
 [10] Karmarkar, U. S., "Lot Sizes, lead times and in-process inventories", *Management Science*, 33, 419-423, 1987.
 [11] Karmarkar, U. S., "Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Lead-times.", *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 2, 105-123, 1989.
 [12] Karmarkar, U.S., "Manufacturing Lead times, Order Release and Capacity Loading.", *Handbooks in Operations Research & Management Science Vol4: Logistics of Production and Inventory*, 287-329, 1993.
 [13] Kim, S. and Uzsoy, R., "Exact and heuristic procedures for capacity expansion problems with congestion". *IIE Transactions*, 40, 1185-1197, 2008.
 [14] Kim, S. and Uzsoy, R., "Heuristics for capacity planning problems with congestion", *Computers and Operations Research*, 36, 1924-1934, 2009.
 [15] Kim, Y.M., "An Optimization of Ship Building Mix under N Different Docks", *IE interfaces*, 22(1), 38-43, 2009.
 [16] Lasdon, L. S. and Terjung, R. C., "An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling", *Operations Research*, 19(4), 946-969, 1971.

- [17] Lee, C.Y., Cetinkaya, S. and Wagelmans, A.P.M, “A Dynamic Lot-Sizing Model with Demand Time Windows.”, *Management Science*, 47(10), 1384-1395, 2001.
- [18] Maes, J., McClain, J.O. and Van Wassenhove, L.N., “Multilevel capacitated lot sizing complexity and LP-based heuristics”, *European Journal of Operational Research*, 53(2), 131 - 48, 1991.
- [19] Missbauer, H. “Aggregate order release planning for time-varying demand”, *International Journal of Production Research*, vol. 40, no. 3, 699-718. (2002)
- [20] Srinivasan A., M. Carey, and T. E. Morton, “Resource Pricing and Aggregate Scheduling in Manufacturing Systems”, in Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1988.
- [21] Tempelmeier, H. and Derstroff, M., “A Lagrangean-based Heuristic for Dynamic Multilevel Multiitem Constrained Lotsizing with Setup Times”, *Management Science*, 42, 738-757, 1996.
- [22] Trigeiro, W.W., Thomas, L.J. and McClain, J.O., “Capacitated Lot Sizing with Setup Times”, *Management Science*, 35, 353-366, 1989.
- [23] Upasani, A., & Uzsoy, R., “Integrated production planning and pricing decisions in congestion-prone capacitated production systems”, Research report, Laboratory for Extended Enterprises at Purdue, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, 2005.
- [24] Wagner, H. M., & Whitin, T. M., “Dynamic version of the economic lot size model”. *Management Science*, 5, 89 - 96, 1958.
- [25] Wilhelm, W.E., “A technical review of column generation in integer programming”, *Optimization and Engineering*, 2, 159-200, 2001.

강 용 하(Yong-Ha Kang)

[정회원]



- 2003년 2월 : 고려대학교 일반대학원 산업공학과 (공학석사)
- 2008년 2월 : 고려대학교 일반대학원 산업시스템정보공학과 (공학박사)
- 2008년 8월 ~ 2011년 12월 : North Carolina State University, Industrial Systems Engineering, Post Doc
- 2012년 1월 ~ 현재 : 삼성 SDS 책임연구원

<관심분야>

Production Planning, Scheduling, Supply Chain Management