

# 완전 궤환 비선형 계통에 대한 자기 구조화 퍼지 시스템을 이용한 상태변수 및 출력 궤환 적응 제어기

## State- and Output-feedback Adaptive Controller for Pure- feedback Nonlinear Systems using Self-structuring Fuzzy System

박 장 현\* · 김 성 환† · 장 영 학\*\* · 유 영 재\*\*

(Jang-Hyun Park · Seong-Hwan Kim · Young-Hak Jang · Young-Jae Ryoo)

**Abstract** - Globally stabilizing adaptive fuzzy state- and output-feedback controllers for the fully nonaffine pure-feedback nonlinear system are proposed in this paper. By reformulating the original pure-feedback system to a standard normal form with respect to newly defined state variables, the proposed controllers require no backstepping design procedures. Avoiding backstepping makes the controller structure and stability analysis to be considerably simplified. For the global stability of the closed-loop system, the self-structuring fuzzy system whose membership functions and fuzzy rules are automatically generated and tuned is adopted. The proposed controllers employ only one fuzzy logic system to approximate unknown nonlinear function, which highlights the simplicity of the proposed adaptive fuzzy controller. Moreover, the output-feedback controller of the considered system proposed in this paper have not been dealt with in any literature yet.

**Key Words** : Pure-feedback nonlinear system, Adaptive fuzzy controller, Self-structuring fuzzy system

### 1. 서 론

현대의 제어대상 계통은 점점 더 고도로 복잡해지고 있으며 이러한 계통에 대해서 수학적 모델식을 세우는 것조차도 난해한 경우가 많다. 이렇게 잘못 모델링되거나 간략화된 모델식에는 필연적으로 실제 계통과는 다른 비구조화된 불확실성이 내포되게 마련이고 그러한 경우에 적절히 대응해야 하는 제어기의 설계가 필수적이다. 전통적인 제어기법인 가변 구조 제어, 적응 제어, 그리고 강인 제어 기법들 [1-3]은 그러한 불확실성에 대응할 수 있으나 매우 한정된 비선형 계통에만 적용가능하다는 단점이 있다.

과거 약 30여년 동안 많은 연구자들이 불확실한 비선형 계통에 대한 지능 제어 기법에 대해 매우 활발히 연구하고 있다. 지능 시스템 중에서도 신경망(neural network, NN)과 퍼지 논리 시스템(fuzzy logic system, FLS)이 주로 적응 제어 알고리즘과 결합되었는데 이러한 NN과 FLS와 같은 지능 시스템은 학습 능력, 전문가의 지식 반영, 병렬 처리 등의 장점을 가지고 있기 때문이다. 특히 FLS의 범용 근사기 특성을 이용하여 미지의 비선형성을 포함한 계통에 대한 연구가 매우 활발해 진행되었다.[4-12] 이러한 연구에서는 FLS의 범용 근사기 특성을 안정도 증명에 사용하여 페루프 계통의 안정도나 강인성에 대한 해석을 수행하였으나

계통식이 정규식(normal form)으로 기술되는 비선형 계통을 집중적으로 다루었다. 최근에는 일반적인 계통으로 그 고려 대상이 확대되고 있는데, 백스테핑(backstepping) 제어기 설계 기법[13]과 범용 근사기의 개념을 결합하여 순궤환(strict-feedback) 혹은 완전궤환(pure-feedback) 비선형 계통에 대한 새로운 신경망 백스테핑 제어기가 제안되었다.[14-20] 그러나 기존의 백스테핑 기법 기반의 적응 신경망 제어 기법에는 단점들이 있다. 각 설계 단계마다 가상 제어항(virtual control term)들을 결정하고 그 이후 단계에서 그것들의 미분을 계산하는 것이 매우 복잡하고 난해한 계산 과정을 거쳐야 한다는 것이다. 그 결과식은 '복잡성 폭발'(explosion of complexity)로 언급될 정도로써 계통의 차수가 증가할수록 복잡도는 지수 함수적으로 증가하며 실용적인 측면에서는 반드시 해결해야 할 문제로 인식되고 있다.

좀 더 최근에는 다음과 같은 완전궤환(pure-feedback) 비선형 계통의 제어기법에 대해서 활발하게 연구되고 있다.[21-28]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\mathbf{x}_i, x_{i+1}), i=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f_n(\mathbf{x}_n, u) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $f_i(\cdot, \cdot)$ 는 미지의 평활 함수이고,  $x_i, i=1, \dots, n$ 은 상태 변수이며,  $\mathbf{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ 이다. 이 완전궤환(pure-feedback) 비선형 계통은 기존에 고려되던 계통에 비해 더 일반적인 계통이며 가상 제어 항으로 쓰일 상태 변수와 제어 입력이 모든 식에서 음함수형태로 나타나는 비어파인(nonaffine) 계통이다. 그러나 [21-28]의 기본 알고리즘인 백스테핑 기반의

\* 정 회 원 : 목포대 공대 제어로봇공학과 부교수

\*\* 정 회 원 : 목포대 공대 제어로봇공학과 교수

† 교신저자, 정회원 : 목포대 공대 제어로봇공학과 교수

E-mail : shkim@mokpo.ac.kr

접수일자 : 2012년 2월 10일

최종완료 : 2012년 8월 9일

지능 제어기의 가장 큰 단점은 매 설계 단계에서 제시되는 가상 제어항과 그 시간 도함수의 계산이 매우 복잡하다는 점이다. 모든 설계 단계에서 하나 혹은 두 개의 근사기가 사용되어 가상 제어식을 구성하는데 이러한 방법은 결국  $n$  차 시스템의 최종 제어식에서는  $n$ 개 혹은  $2n$ 개의 다수의 근사기가 필요하게 된다. 더욱이 근사기의 출력식의 시간 도함수(혹은 편미분)가 매 설계 단계에서 사용되는데 이것에 실제 제어기의 구현을 더욱 어렵게 한다. 따라서 지능 시스템을 근사기로 이용하는 지능 제어 알고리즘이 백스테핑에 기반하는 경우 계통의 차수  $n$ 이 커질수록 그 복잡도는 지수 함수적으로 증가하므로 모의실험을 수행하는 것조차 극도로 난해하며, 따라서 계산량의 문제 등으로 실제통에 적용한다는 것은 더더욱 어려운 것이다.

본 논문에서는 비선형 계통식 (1)에 대한 적응 퍼지 제어기를 제안하며 [12]에서 제안된 자기 구조화 알고리즘을 채용하여 계통식 (1)를 대역적으로 안정화시키는 상태변수 케환 및 출력 케환 제어식과 적응 법칙을 제시한다. 기존의 [21-28]는 모두 백스테핑 기반의 제어기법들이며 또한 상태변수 케환 제어기만을 다루고 있다. 제안하는 적응 퍼지 제어기는 백스테핑이 필요치 않으며 그로 인해서 제어식과 안정도 증명이 상대적으로 매우 간결해진다. 또한, 입력의 개수가  $n+2$ 개인 오직 하나의 자기 구조화 FLS가 사용되며 이것이 제안하는 제어기법의 간결성을 대변한다. 본 논문에서 제안하는 계통식 (1)에 대한 출력 케환 적응 제어 알고리즘은 현재까지의 어떠한 연구결과에서도 다루지 않은 내용이다.

## 2. 문제 정의

본 논문의 제어대상 계통식 (1)이 가제어성을 가지기 위해서 다음과 같은 가정이 필요하다.

**가정 1** . 계통식 (1)에서 편미분  $\partial f_i / \partial x_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, n-1$ 과  $\partial f_n / \partial u$ 의 곱은  $\forall (\mathbf{x}, u) \in R^n \times R$ 에 대해서 0이 아니다. 즉, 따라서 함수는 strictly positive이거나 strictly negative이어야 하므로 다음과 같이 양의 값을 갖는다고 가정한다.

$$\left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right) \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u} > 0 \quad (2)$$

$$\forall (\mathbf{x}, u) \in R^n \times R$$

본 논문과 유사한 계통을 다루는 다른 문헌들[21-28]의 함수  $f_i$ 에 대한 가정은 보통 다음과 같이 각각의 미분이 양이고 유계라고 가정한다.

$$0 < \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} < \infty, \quad i=1, \dots, n-1 \quad (3)$$

$$0 < \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u} < \infty$$

하지만 본 논문에서는 오직 조건식 (2) 하나만이 사용되며 이후에 제어기가 이 가정만을 이용하여 설계된다.

본 논문은 계통식 (1)의 출력이 원하는 출력  $y_d(t)$ 를 잘 추종하고 모든 시변신호를 유계로 만드는 제어식과 FLS의 적응 법칙을 도출하는 것이 목적이다.

## 2.1 원 계통의 정규식 기술

계통식 (1)은 출력  $y$ 와 그 시간 도함수들에 대한 정규식으로 재기술됨은 잘 알려져 있다. 즉,  $z_i \equiv y^{(i-1)}$ ,  $i=1, \dots, n$ 라고 정의하면 다음과 같은 일반식을 유도할 수 있다.[29]

$$\begin{aligned} z_i &= a_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1}) + b_{i-1}(\mathbf{x}_i) \\ \dot{z}_i &= a_i(\mathbf{x}_i) + b_i(\mathbf{x}_{i+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $a_1=0$ 이고  $b_1=f_1(\mathbf{x}_2)$ 이며 일반적으로 다음과 같이 재귀적으로 정의되는 미지의 함수이다.

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{x}_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i-1} + b_{i-1}) f_j(\mathbf{x}_{j+1}) \\ b_i(\mathbf{x}_{i+1}) &= \frac{\partial b_{i-1}}{\partial x_i} x_i \\ &= \left( \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_{j+1})}{\partial x_{j+1}} \right) f_i(\mathbf{x}_{i+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{x}_{n+1} = [\mathbf{x}^T \ u]^T$ 이다. 이 결과로 원래의 완전케환 계통식 (1)은 출력과 그 도함수에 대한 다음과 같은 정규식으로 재기술될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i=1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n &= a_n(\mathbf{x}) + b_n(\mathbf{x}, u) \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (6)$$

위에서 기술한 결과로부터 원래 계통식 (1)의 상태 케환 제어 문제는 정규식 (6)의 출력 케환 제어문제로 변환하여 접근할 수 있다는 결과를 얻을 수 있으며, 변환된 계통식 (6)에는 대응 불확실성(matched uncertainty)만 존재하므로 백스테핑을 회피할 수 있다. 그 반대급부로서 출력  $y$ 의 도함수는 측정이 불가능하므로 이들을 추정하기 위한 도함수 관측기가 필요하다. 이후로  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T$ 로 표기한다.

## 2.2 이상적인 제어식

이상적인 출력 벡터  $\mathbf{y}_d$ , 추종오차벡터  $\mathbf{e}$ , 그리고 필터링된 추종 오차  $s$ 를 다음과 같이 결정한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_d &= [y_d \ \dot{y}_d \ \dots \ y_d^{(n-1)}]^T \\ \mathbf{e} &= \mathbf{z} - \mathbf{y}_d \\ s &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \mathbf{e} = [A^T \ \mathbf{1}] \mathbf{e} \\ e &= y - y_d \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\lambda > 0$ 은 설계 상수이며  $\mathbf{A} = [\lambda^{n-1}(n-1)\lambda^{n-2} \dots (n-1)\lambda]^T$ 이다. 필터링된 신호  $s$ 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{s} = a_n(\mathbf{x}) + b_n(\mathbf{x}, u) + v \quad (8)$$

여기서  $v = -y_d^{(n)} + [0 \ A^T] \mathbf{e}$ 이다.

**보조정리 1:** 만약 가정 1이 성립한다면, 다음 부등식을 만족하는 유일한 함수  $u^*(\mathbf{x}, v, s)$ 가 존재한다

$$a_n(\mathbf{x}) + b_n(\mathbf{x}, u^*(\mathbf{x}, v, s)) + v = -ks \quad (9)$$

여기서  $k > 0$ 은 입력 이득으로서 설계 상수이다.

**증명:** 이후에는  $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{x}^T v s]^T \in R^m$ 으로 표기하며  $m \triangleq n + 2$ 이다. 증명 과정은 식 (10)과 같이 정의되는 함수  $h(\boldsymbol{\eta}, u^*)$ 에 대해서  $h(\boldsymbol{\eta}, u^*) = 0$ 을 만족하는  $\boldsymbol{\eta}$ 의 함수  $u^*$ 가 존재함을 보이는 것이다.

$$h(\boldsymbol{\eta}, u) \triangleq a_n(\mathbf{x}) + b_n(\mathbf{x}, u) + v + ks \quad (10)$$

음함수 정리(implicit function theorem)에 의하면  $u$ 에 대한  $h$ 의 기울기(gradient)인  $\partial h / \partial u$ 가 가역적(invertible)이라면, 즉, 0이 아니라면  $h(\boldsymbol{\eta}, u^*) = 0$ 을 만족하는  $u^*$ 가 존재하며  $u^*$ 는  $\boldsymbol{\eta}$ 의 함수라는 것이 증명된다. 그런데 (5)를 이용하면  $\partial h / \partial u$ 은 다음과 같으며

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial b_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right) \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \quad (11)$$

이 함수는 가정 1에 의해서 모든  $(\mathbf{x}, u) \in R^n \times R$ 에 대해서 0이 아니다. 따라서  $h(\boldsymbol{\eta}, u^*) = 0$ 을 만족하는  $u^*(\boldsymbol{\eta})$ 가 항상 존재한다. ■

보조정리 1로부터 이상적인 제어항  $u^*$ 가 리아푸노프(Lyapunov) 함수  $L_s = s^2/2$ 를 점근적으로 안정시킨다는 사실을 알 수 있으며  $L_s$ 가 유계이면 추종오차벡터  $\mathbf{e}$ 가 유계임은 [32]의 7.1.1절에 증명되어 있다. 본 논문에서는 다음과 같이 이상적인 제어항을 재배열한다.

$$u^* = -ks - (-ks - u^*(\boldsymbol{\eta})) \triangleq -ks - u_{ad}^*(\boldsymbol{\eta}) \quad (12)$$

이는 선형제어항  $-ks$ 가 제어 입력에서 표면적으로 나타나 그 기능을 수행토록 하기 위함이며 FLS로의 입력  $\boldsymbol{\eta}$ 에  $s$ 가 포함되어 있으므로 퍼지 근사기의 구성이나 안정도 증명에는 영향을 끼치지 않기 때문이다. 본 논문에서는 하나의 FLS를 이용하여 미지의 함수  $u_{ad}^*$ 를 근사화하게 된다. 주지할 사실은  $s$ 와  $v$ 는 상태 변수 궤환 제어기의 경우라 하더라도 측정불가이므로 이후에 추정치로 대신하게 될 것이며 그때까지 FLS의 입력은  $\boldsymbol{\eta}$ 로 가정한다. 또한 본 논문에서는 벡터  $\mathbf{v}$ 의 2-노름(2-norm)을  $|\mathbf{v}|$ 로 표기한다.

### 3. 자기 구조화 FLS

#### 3.1 퍼지 논리 시스템과 퍼지 기저 함수

FLS는 퍼지화기, 퍼지 규칙, 퍼지 추론, 비퍼지화기의 네 구성 요소로 이루어진다. 각각의 구성 요소를 어떤 것으로

선택하는가에 따라 다양한 조합이 나온다. 결과적으로 FLS는 비선형 계통이며 이러한 특성은 비선형 계통의 모델링이나 제어에 응용될 수 있다는 단초를 주게 된다.

그림 1은 적응 퍼지 논리 시스템(adaptive FLS, AFLS)을 도시하고 있다. AFLS는 고전적인 FLS에 학습 능력을 추가한 것으로서 학습 정보를 이용하여 FLS의 특정 파라미터들을 튜닝(tuning)시키는 시스템이다. AFLS는 학습 과정을 거쳐서 퍼지 규칙을 자동적으로 생성해 나간다.

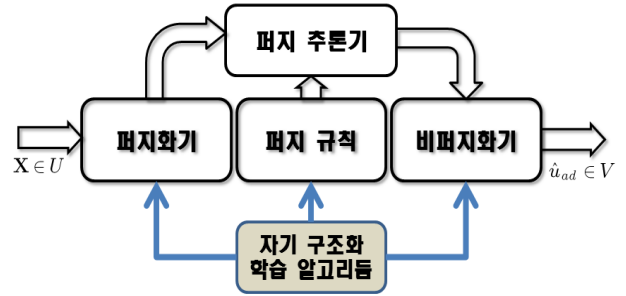


그림 1 적응 퍼지 논리 시스템  
Fig. 1 Adaptive fuzzy logic system

본 논문에서 고려하는 FLS는 다입력 단일출력 계통으로서 다음과 같이 기술되는 총  $N = \prod_{j=1}^m N_j$ 개의 퍼지 규칙을 가진다고 설정한다.

$$R_{i_1, i_2, \dots, i_m} : IF X_1 \text{ is } A_{i_1}^1 \text{ and } X_2 \text{ is } A_{i_2}^2 \dots \text{ and } X_m \text{ is } A_{i_m}^m \text{ THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{i_1, i_2, \dots, i_m}$$

여기서  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1, i_2 = 1, 2, \dots, N_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, N_m$ 이고  $X_j, j = 1, \dots, m$ 은 입력 변수,  $\hat{u}_{ad}$ 는 출력 변수, 그리고 퍼지 집합  $A_{i_j}^j \in U_j$ 과  $C_{i_1, i_2, \dots, i_m} \in V$ 은 퍼지 소속 함수  $A_{i_j}^j(X_j), C_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\hat{u}_{ad})$ 로 기술되는 언어적 항들이다. 싱글톤(singleton) 퍼지화기, 곱추론법(product inference), 무게중심 비퍼지화기를 사용하면 FLS의 출력은 다음 식과 같이 기술된다.

$$\hat{u}_{ad}(X) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} \left[ \frac{\prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(X_j)}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} \prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(X_j)} \right] w_{i_1, i_2, \dots, i_m} \quad (13)$$

$$= \frac{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(X) w_{i_1, i_2, \dots, i_m}}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} \prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(X_j)}$$

여기서  $A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(X) = \prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(X_j)$ 이고  $w_{i_1, i_2, \dots, i_m} \in V$ 은  $C_{i_1, \dots, i_m}$ 이 최대값을 갖는 점이다. 일반적인 퍼지 집합의 정의에 의해서  $C_{i_1, \dots, i_m}(w_{i_1, i_2, \dots, i_m}) = 1$ 이다. 식 (13)으로부터 FLS는 퍼지 기저 함수(fuzzy basis function, FBF)라고 불리는 다음 함수들의 선형 결합의 형태로 나타내진다는 것을 알 수 있다.

$$\phi_{i_1, \dots, i_m}(X) = \frac{A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(X)}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} \prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(X_j)} \quad (14)$$

$$i_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, m$$

이제 FLS의 출력식 (13)은 다음과 같이 기술된다.

$$\hat{u}_{ad}(X) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in I} \phi_{i_1, \dots, i_m}(X) w_{i_1, \dots, i_m} \quad (15)$$

$$= \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Phi}(X)$$

FLS의 학습 알고리즘을 기술하기 앞서서 퍼지 집합  $A_{ij}^j(X_j)$ 에 대한 퍼지 소속 함수를 특정할 필요가 있다. 본 논문에서는 다음과 같이 기술되는 삼각형 소속 함수를 사용한다.

$$A_{ij}^j(x_j, p_{ij}, q_{ij}) = \begin{cases} x_j - p_{ij} + q_{ij} & , p_{ij} - q_{ij} \leq x_j < p_{ij} \\ -x_j + p_{ij} + q_{ij} & , p_{ij} \leq x_j < p_{ij} + q_{ij} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

여기서  $p_{ij}$ 는 중심이고  $q_{ij}$ 는 너비의 절반값이다.

### 3.2 자기 구조화 알고리즘

식 (15)로 기술되는 FLS가  $R^m$  공간 전체에 대해서 근사화 기능을 가지려면 무한개의 소속 함수와 퍼지 규칙이 필요할 것이다. 그러나 만약 식 (16)과 같은 삼각형 소속 함수를 사용한다면 FLS가 무한개의 소속 함수와 퍼지 규칙을 가진다 해도 유한개 즉  $2^m$ 개의 퍼지 규칙만이 0이 아닌 값을 가지게 된다. 이러한 점에 착안하여 [11, 12]에서 간단한 자기 구조화 알고리즘이 제안된 바 있으며 여기에 간략히 소개한다.

**1단계** : 초기에 주어진 입력값  $X_0 = [X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0m}]^T$ 에 대해서 모든  $X_i, i=1, \dots, m$ 에 대해서 각각 두 개의 소속 함수를 생성한다. (그림 2)

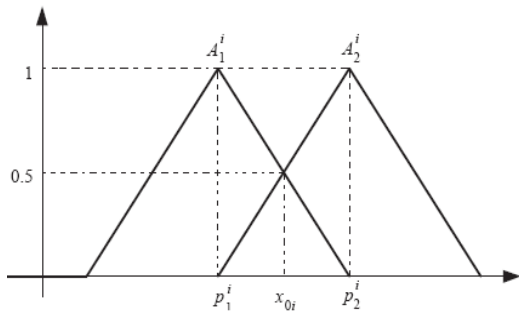


그림 2 초기값  $X_0$ 에 의해 초기에 생성되는 소속 함수.  
Fig. 2 Membership functions that are created by initial input vector  $X_0$ .

**2단계** : 1단계에서 생성된 퍼지 소속 함수를 이용하여  $2^m$ 개의 퍼지 규칙을 생성한다.

$$\begin{aligned} R_{1,1,\dots,1} &: \text{IF } X_1 \text{ is } A_1^1 \text{ and } X_m \text{ is } A_1^m \text{ THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{1,1,\dots,1} \\ R_{1,1,\dots,2} &: \text{IF } X_1 \text{ is } A_1^1 \text{ and } X_m \text{ is } A_2^m \text{ THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{1,1,\dots,2} \\ &\vdots \\ R_{2,2,\dots,2} &: \text{IF } X_1 \text{ is } A_2^1 \text{ and } X_m \text{ is } A_2^m \text{ THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{2,2,\dots,2} \end{aligned} \quad (17)$$

이렇게 구성된 FLS를 이용하여 제어가 시작된다.

**3단계** : 입력  $X_i$ 에 대한 가장 좌측의 소속 함수의 중심을  $p_L^i$ , 가장 우측의 소속 함수의 중심을  $p_R^i$ 이라고 하자. 제어가 수행되는 도중에  $X_i$ 가  $[p_L^i, p_R^i]$  범위를 벗어나면 그 순간에 새로운 소속 함수  $A_k^i$ 를 생성한다. (그림 3)

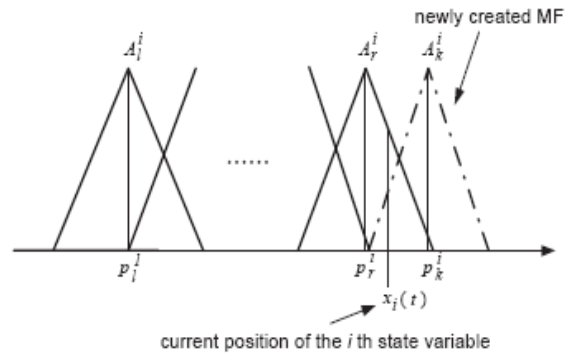


그림 3 새로이 생성되는 소속 함수.

Fig. 3 Newly created membership function

**4단계** : 만약 3단계에서 새로운 소속 함수가 생성되었고 현재 입력  $X_j$ 에 대한 소속 함수가  $N_j$ 개라면  $(\prod_{j=1}^m N_j) / N_i$ 개의 새로운 퍼지 규칙을 생성해야 한다

$$\begin{aligned} R_{1,\dots,k,\dots,1} &: \text{IF } X_1 \text{ is } A_1^1 \cdots X_i \text{ is } A_k^i \cdots X_m \text{ is } A_1^m \\ &\text{THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{1,\dots,k,\dots,1} \\ R_{1,\dots,k,\dots,N_m} &: \text{IF } X_1 \text{ is } A_1^1 \cdots X_i \text{ is } A_k^i \cdots X_m \text{ is } A_{N_m}^m \\ &\text{THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{1,\dots,k,\dots,N_m} \\ R_{N_1,\dots,k,\dots,N_m} &: \text{IF } X_1 \text{ is } A_{N_1}^1 \cdots X_i \text{ is } A_k^i \cdots X_m \text{ is } A_{N_m}^m \\ &\text{THEN } \hat{u}_{ad} \text{ is } C_{N_1,\dots,k,\dots,N_m} \end{aligned} \quad (18)$$

**5단계** : 3단계로 돌아가서 반복한다.

이 알고리즘을 사용하면 초기의 FLS는  $2^m$ 개의 퍼지 규칙으로 시작하지만 입력 변수의 변화에 따라 점차로 소속 함수와 퍼지 규칙을 늘려가게 된다. 또한 이 자기 구조화 알고리즘을 채용하면 FLS가 초기부터 무한개의 소속 함수와 퍼지 규칙을 포함하고 있는 효과를 가지게 된다.

**정리 1** : (범용 근사화 이론)  $R^m$  공간에서 정의된 연속인 실 함수  $u_{ad}^*(\boldsymbol{\eta})$ 와 임의의 실수  $\epsilon_{re} > 0$ 에 대해서 다음의 부등식을 만족하는 식 (15)와 같이 기술되는 FLS과 최적의 파라미터 벡터  $\mathbf{w}^*$ 가 존재한다.

$$\sup_{\boldsymbol{\eta} \in R^m} |u_{ad}^*(\boldsymbol{\eta}) - \hat{u}_{ad}(\boldsymbol{\eta} | \mathbf{w}^*)| < \epsilon_{re} \quad (19)$$

정리 1에서  $\epsilon_{re}$ 는 최적의 파라미터에 대해서도 구조적인 결핍으로 인해 불가피하게 내재하는 재구성 오차 (reconstruction error)를 나타내며 일반적으로 FLS의 소속 함수를 조밀하게 배치한다면  $\epsilon_{re}$ 는 작아진다. 본 논문에서 이후  $\mathbf{w}^*$ 의 추정치를  $\hat{\mathbf{w}}$ 로 표기한다.

### 4. 제어기 설계 및 안정도 증명

#### 4.1 고이득 관측기

유도된 정규식 (6)에서 알 수 있듯이 함수  $a_i(\cdot)$ 와  $b_i(\cdot, \cdot)$ 는 미지의 함수이므로  $z_1$ 을 제외한 나머지 변수들  $z_i$  ( $i=2, \dots, n$ )는 계산이 불가능하다. 따라서 이들을 관측하기 위해서 다음의 정리에서와 같이 고이득 관측기 (high-gain observer, HGO)를 도입한다.[29, 31]

**보조정리 1** : 출력  $y(t)$ 와 그  $n-1$ 차 시간 도함수가 유계라고 가정하고 다음과 같은 선형 계통을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, i=1, \dots, n-1 \\ \dot{\xi}_n &= -d_1\xi_n - d_2\xi_{n-1} \dots - d_{n-1}\xi_2 \\ &\quad - \xi_1 + y(t) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $\epsilon$ 은 양의 설계상수이다. 만약 선형 계통식 (20)의 마지막 식의 계수들  $d_1, \dots, d_{n-1}$ 을  $r$ 에 대한 다항식  $r^n + d_1r^{n-1} + \dots + d_{n-1}r + 1$ 이 Hurwitz 다항식이 되도록 선정하면 다음 부등식 (21)이 모든  $t > t^*$ 에 대해서 성립하는 양의 상수  $h$ 와  $t^*$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\| &\leq \epsilon h \\ \hat{\mathbf{z}} &= \left[ z_1, \frac{\xi_2}{\epsilon}, \frac{\xi_3}{\epsilon^2}, \dots, \frac{\xi_n}{\epsilon^{n-1}} \right]^T \\ \hat{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{y}_d \end{aligned} \quad (21)$$

위의 보조정리1의 증명은 [31]에서 찾아 볼 수 있다. 이제 필터링된 추종오차  $\hat{s}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{v} = -y_d^{(n)} + [0 \ A^T] \hat{\mathbf{e}} \quad (22)$$

$$\hat{s} = [A^T \ 1] \hat{\mathbf{e}} \quad (23)$$

이제 정의식 (22)와 (23)을 이용하여 FLS에 인가되는 실제 입력은  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = [\mathbf{x}^T \ \hat{v} \ \hat{s}]^T$ 로 결정한다.

#### 4.2 상태변수계환 제어기 설계 및 안정도 증명

파라미터 추정치  $\hat{\mathbf{w}}$ 를 위한 학습 법칙은 다음 정리와 같이 결정한다.

**보조정리 2** : 파라미터 추정치  $\hat{\mathbf{w}}$ 의 학습 법칙은 다음식과 같다.

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = \gamma (\hat{s} \boldsymbol{\Phi}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) - \sigma_s(t) |\hat{s}| \hat{\mathbf{w}}) \quad (24)$$

$$\sigma_s(\hat{\mathbf{w}}) = \begin{cases} c_\phi & \text{if } |\hat{\mathbf{w}}| > \epsilon_w \\ \epsilon_w & \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

여기서  $\gamma$ 는 양의 학습률(learning rate)이고  $\epsilon_w$ 는 양의 설계

상수이며 상수  $c_\phi$ 는  $|\phi(\cdot)| < c_\phi$ 를 만족시키는 최소 상수이다. 이 학습법칙은  $|\hat{\mathbf{w}}| \leq \epsilon_w$ 를 보장한다.

**증명** : 리아푸노프 함수를  $L_w = \frac{1}{2\gamma} \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{w}}$ 로 정하고 그 시간 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_w &= \frac{1}{\gamma} \hat{\mathbf{w}}^T \dot{\hat{\mathbf{w}}} \\ &= \hat{\mathbf{w}}^T (\hat{s} \boldsymbol{\Phi} - \sigma_s(\hat{\mathbf{w}}) |\hat{s}| \hat{\mathbf{w}}) \\ &\leq |\hat{s}| |\hat{\mathbf{w}}| c_\phi - \sigma_s(t) |\hat{s}| \|\hat{\mathbf{w}}\|^2 \\ &= -|\hat{s}| |\hat{\mathbf{w}}| (\sigma_s(t) |\hat{\mathbf{w}}| - c_\phi). \end{aligned} \quad (26)$$

마지막 부등식에 의하면 만약  $|\hat{\mathbf{w}}| > \epsilon_w$ 이면  $\dot{L}_w < 0$ 이 되므로  $|\hat{\mathbf{w}}| \leq \epsilon_w$ 가 보장된다. ■

한 가지 주지할 사항은 스위칭 함수  $\sigma_s(\hat{\mathbf{w}})$ 은 FLS가 학습된 정보를 유지시키도록 하기 위해서 도입되었으며, 이것은 고전적인 적응 제어에서의 switching- $\sigma$  기법[13]을 채용한 것이다. 이 기법은 만약  $\epsilon_w$ 가  $\epsilon_w > \mathbf{w}^*$ 를 만족하도록 충분히 크게 선정된다면  $|\hat{\mathbf{w}}|$ 의 유계를 보장하면서 동시에 학습된 정보의 손실도 막을 수 있다.

실제 제어 입력은 다음과 같이 결정한다.

$$u = -k\hat{s} - \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \quad (27)$$

제어입력은 두 부분으로 구성되는데 첫 번째  $k\hat{s}$ 는 선형화된 계통을 안정화시키는 역할을 하고 FLS의 출력  $\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi}(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ 은 미지의 비선형항을 상쇄시키는 역할을 한다.

**정리 2** : 가정 1을 만족하는 계통식 (1)과 제어 입력식 (27) 그리고 적응 법칙 (24)로 이루어진 페루프 계통을 고려하자. 이 계통의 필터링된 추종 오차 신호  $s$ 와 모든 시변 신호는 UUB(uniformly ultimately bounded)이다.

**증명** : 리아푸노프 함수를  $L = s^2/2$ 로 선정하고 그 시간 도함수를 유도해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \dot{s} \dot{s} \\ &= s(a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, u) + v) \\ &= s(a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, u^*) + v \\ &\quad b(\mathbf{x}, u) - b(\mathbf{x}, u^*)) \\ &= -ks^2 + s(b(\mathbf{x}, u) - b(\mathbf{x}, u^*)) \end{aligned} \quad (28)$$

함수  $f_i(\mathbf{x}, u), i=1, \dots, n$ 는 평활함수이므로 함수  $b(\cdot, \cdot)$ 는  $u$ 에 대해서 지역적으로 Lipschitz이다. 따라서 임의의 콤팩트(compact) 집합에 대해 다음을 만족하는 Lipschitz 상수  $l_b$ 가 존재함을 알 수 있다.

$$|b(\mathbf{x}, u) - b(\mathbf{x}, u^*)| \leq l_b |u - u^*| \quad (29)$$

따라서 등식 (28)의 마지막 식에서 다음과 같이 좀 더 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= -ks^2 + l_b |s| |u - u^*| & (30) \\
 &= -ks^2 + l_b |s| \\
 &\quad \times |-k(s - \hat{s}) + \mathbf{w}^{*T} \Phi - \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\Phi}| \\
 &= -ks^2 + l_b |s| \\
 &\quad \times |-k[A^T \ 1] |e - \hat{e}| + \mathbf{w}^{*T} \Phi - \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\Phi}| \\
 &\leq -ks^2 + kl_b l_A |s| |y - \hat{y}| + l_b |s| \epsilon_w c_\phi \\
 &\leq -k |s| \left( |s| - l_b l_A \epsilon h + \frac{l_b \epsilon_w c_\phi}{k} \right)
 \end{aligned}$$

여기서  $\hat{\Phi} = \Phi(\hat{\eta})$ ,  $l_A = |[A^T \ 1]|$ , 그리고  $\epsilon_w = |\mathbf{w}^*| + \epsilon_w$ 이다. 부등식 (30)의 마지막 행으로부터  $s$ 가 다음 집합에 대해서 positive invariant함을 쉽게 알 수 있다.

$$\Omega_1 = \left\{ s \mid |s| \leq l_b l_A \epsilon h + \frac{l_b \epsilon_w c_\phi}{k} \right\} \quad (31)$$

집합  $\Omega_1$ 의 반경은 관측기 설계상수  $\epsilon$ 과 제어 입력 이득  $k$ 를 조절함으로써 충분히 작게 만들 수 있다. ■

본 논문은 [29]에서와 같이 완전 케환 비선형 계통의 제어기 설계에서 백스테핑을 회피했으며 더불어서 자기구조화 FLS를 채용하여 대역적인 안정도를 보장하였다는 장점을 가진다.

### 4.3 출력케환 제어기 및 안정도 증명

본 절에서는 출력 케환 제어식에 대해서 기술한다. 이 경우 상태 케환 제어기와 달리 FLS의 입력으로 실제 상태변수  $\mathbf{x}$ 는 쓸 수 없으며, 오직 출력 변수  $y (= z_1)$ 만이 측정이 가능하다고 간주한다. 정의식 (5)로 부터 계통의 상태 변수  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ 은  $\mathbf{z}$ 의 함수라는 것을 알 수 있다.

**보조정리 3** :  $\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{z})$ 를 만족시키는 벡터 함수  $\alpha(\cdot) : R^n \rightarrow R^n$ 이 존재한다.

증명: 먼저 첫 번째 단계로  $x_1 = z_1 \triangleq \alpha_1(z_1)$ 임은 자명하다. 정의식 (4)에서  $z_2 = a_1(x_1) + b_1(x_1, x_2)$ 이므로 가정 1에 의하면 다음을 만족시키는 함수  $\beta_2(\cdot, \cdot)$ 가 존재한다.

$$x_2 = \beta_2(x_1, z_2) = \beta_2(\alpha_1(z_1), z_2) \triangleq \alpha_2(\mathbf{z}_2) \quad (32)$$

이렇게 순차적으로 모든  $i = 1, \dots, n$ 에 대해서  $x_i = \alpha_i(\mathbf{z}_i)$ 를 만족하는  $\alpha_i(\mathbf{z}_i)$ 가 존재함을 수학적 귀납법으로 쉽게 증명할 수 있으며 벡터함수  $\alpha(\cdot)$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{z}) \triangleq [\alpha_1(z_1), \alpha_2(\mathbf{z}_2), \dots, \alpha_n(\mathbf{z}_n)]^T \quad (33)$$

또한 보조정리 1에서의 동일한 이상적인 제어항을  $u_o^*(\mathbf{z}, v, s) \triangleq u^*(\alpha(\mathbf{z}), v, s) = u^*(\mathbf{x}, v, s)$ 로 재정의할 수 있으며,  $\eta_o \triangleq [\mathbf{z}^T, v, s]^T$ 로 정의하면 상태 케환의 경우와 유사하게 FLS는 미지의 함수  $-ks - u_o^*(\eta_o)$ 을 근사화한다고 할 수 있다.

출력 케환 제어 입력과 FLS 파라미터 갱신 법칙은 다음

과 같다.

$$u = -ks - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi(\hat{\eta}_o) \quad (34)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = \gamma (\hat{s} \Phi(\hat{\eta}_o) - \sigma_s(t) \hat{s} \hat{\mathbf{w}}) \quad (35)$$

여기서  $\hat{\eta}_o \triangleq [\hat{\mathbf{z}}^T, \hat{v}, \hat{s}]^T$ 이다. 이 적응법칙 (35)는 스위칭- $\sigma$ 항의 작용으로  $|\hat{\mathbf{w}}| \leq \epsilon_w$ 임을 보장하며 그 증명은 보조 정리 2의 그것과 유사하므로 생략한다.

**정리 3** : 가정 1을 만족하는 계통식 (1)과 제어기 (34), HGO (20)과 적응 법칙 (35)로 이루어진 출력 케환 제어 시스템을 고려하자. 이 계통의 필터링된 추종 오차  $s$ 는 대역적으로 UUB이다.

증명 : 리아푸노프 함수를  $L = s^2/2$ 으로 선정하고 그 시간도함수를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{L}_s &= s \dot{s} & (36) \\
 &= s \{ a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u + v \} \\
 &= s \{ a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, u_o^*) + v + b(\mathbf{x}, u) - b(\mathbf{x}, u_o^*) \} \\
 &= -ks^2 + s \{ b(\mathbf{x}, u) - b(\mathbf{x}, u_o^*) \}
 \end{aligned}$$

이전과 마찬가지로 가정 1로 부터 부등식 (29)를 만족시키는 Lipschitz 상수  $l_b$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{L}_s &\leq -ks^2 + l_b |s| |u - u_o^*| & (37) \\
 &= -ks^2 + l_b |s| |-k(s - \hat{s}) + \mathbf{w}^{*T} \Phi(\eta_o) - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi(\hat{\eta}_o)| \\
 &= -ks^2 + l_b |s| |-k[A \ 1](\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) + \mathbf{w}^{*T} \Phi(\eta_o) \\
 &\quad - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi(\hat{\eta}_o)| \\
 &\leq -ks^2 + l_b l_A |s| \epsilon h + l_b \epsilon_w c_\phi |s| \\
 &\leq -k |s| \left( |s| - l_b l_A \epsilon h - \frac{l_b \epsilon_w c_\phi}{h} \right)
 \end{aligned}$$

이 결과는  $s$ 가 다음과 같은 집합에 대해 불변(invariant)하다는 것을 보장하며

$$\Omega_s = \left\{ -s \mid |s| \leq l_b l_A \epsilon h + \frac{l_b \epsilon_w c_\phi}{h} \right\} \quad (38)$$

이 집합의 반경은 관측기의 설계 상수  $\epsilon$ 과 제어기의 이득  $k$ 를 조절함으로써 충분히 작게 할 수 있다. ■

상태 변수 케환 제어기와 출력 케환 제어기의 구조적인 차이점은 FLS로의 입력이 전자는 계통의 상태 변수 벡터  $\mathbf{x}$ 이고 후자는 출력의 미분 벡터의 추정치  $\hat{\mathbf{z}}$ 이라는 점이다.

## 5. 결과 고찰 및 모의 실험

### 5.1 백스테핑 기반 제어기와의 제어식 비교

본 절에서는 [21,25-28]에서 제안된 백스테핑 기반의 적응 제어식과 본 논문에서 제안하는 제어식과의 복잡도 비교를 위해서 다음과 같은 3차 계통식에 대해서 각각 제어식을 설

계해 되도록 하겠다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, u) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (39)$$

원하는 출력은  $y_d(t)$ 로, 이것의  $i$ 차 도함수는  $y_{di}$  ( $i=1,2$ )로 표기한다.

### 5.1.1 백스테핑 기반의 적응 제어식 구성

참고문헌 [21, 25-28]에서는 미지의 비선형항을 추종하는 지능시스템으로서 신경망의 일종인 RBFN(radial-basis function network)을 사용하거나 본 논문에서와 같이 FLS를 사용하므로 통칭하여 근사기(approximator)로 표기한다. 첫 번째 단계로 추종 오차를  $e_1 = x_1 - y_d$ 로 정의하고 가상 제어항  $\alpha_1$ 을 다음과 같이 결정한다.

$$\alpha_1 = -k_1 e_1 - \hat{\mathbf{w}}_1^T \Phi_1(\boldsymbol{\eta}_1) \quad (40)$$

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [x_1, y_{d1}, e_1]^T \quad (41)$$

여기서  $\hat{\mathbf{w}}_1, \Phi_1, \boldsymbol{\eta}_1$ 은 첫 번째 근사기의 적응 파라미터 벡터, 기저 함수 벡터, 입력 벡터를 각각 표기하고  $k_1(>0)$ 은 설계상수이다. 첫 번째 근사기의 적응칙은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_1 = \gamma_1 (-\Phi_1 e_1 - \sigma_1 \hat{\mathbf{w}}_1) \quad (42)$$

여기서  $\gamma_1(>0)$ 과  $\sigma_1(>0)$ 은 설계 상수이다. 두 번째 단계로 오차를  $e_2 = x_2 - \alpha_1$ 로 정의하고 두 번째 가상 제어항을 다음과 같이 결정한다.

$$\alpha_2 = -e_2 - k_2 e_2 - \hat{\mathbf{w}}_2^T \Phi_2(\boldsymbol{\eta}_2) \quad (43)$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \left[ x_1, x_2, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}, \phi_1, e_2 \right]^T \quad (44)$$

여기서  $\hat{\mathbf{w}}_2, \Phi_2, \boldsymbol{\eta}_2$ 는 두 번째 근사기의 적응 파라미터 벡터, 기저 함수 벡터, 입력 벡터를 각각 표기하고,  $k_2(>0)$ 는 설계상수이며,  $\phi_1$  함수와 두 번째 근사기의 적응칙은 다음과 같다.

$$\phi_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_{d1}} \dot{y}_{d1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\mathbf{w}}_1} \dot{\hat{\mathbf{w}}}_1 \quad (45)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_2 = \gamma_2 (-\Phi_2 e_2 - \sigma_2 \hat{\mathbf{w}}_2) \quad (46)$$

여기서  $\gamma_2(>0)$ 와  $\sigma_2(>0)$ 도 설계 상수이다. 한 가지 주지할 점은 식 (44)의  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}$  항이나 식 (45)의  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_{d1}}$ 을 계산하는 것이 매우 난해하다는 사실인데, 이는  $\alpha_1$ 에서  $x_1$ 과  $y_{d1}$ 이 근사기의 입력으로 들어가기 때문에 근사기 출력식 전체를 미분

해야 하기 때문이다. 단계가 진행될수록 이러한 편미분항들은 늘어나므로 복잡도는 더 높아진다. 본 예제의 경우 백스테핑 기반의 알고리즘에서 실제 제어식을 구하기 위해서는 세 단계를 거쳐야 하며 일반적으로  $n$ 차 시스템에서는  $n$  단계를 거쳐야 한다.

마지막 세 번째 단계를 위하여 오차를  $e_3 = x_3 - \alpha_2$ 로 정의하며 실제 제어식은 다음 식 (47)과 같다.

$$u = -e_3 - k_3 e_3 - \hat{\mathbf{w}}_3^T \Phi_3(\boldsymbol{\eta}_3) \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \left[ x_1, x_2, x_3, \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}, \phi_2, e_3 \right]^T \quad (48)$$

여기서  $\hat{\mathbf{w}}_3, \Phi_3, \boldsymbol{\eta}_3$ 는 세 번째 근사기의 적응 파라미터 벡터, 기저 함수 벡터, 입력 벡터를 각각 표기하고  $k_3(>0)$ 은 설계상수이다. 또한 함수  $\phi_3$ 와 세 번째 근사기의 적응칙은 다음과 같다.

$$\phi_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_{d1}} \dot{y}_{d1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_{d2}} \dot{y}_{d2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\mathbf{w}}_1} \dot{\hat{\mathbf{w}}}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\mathbf{w}}_2} \dot{\hat{\mathbf{w}}}_2 \quad (49)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_3 = \gamma_3 (-\Phi_3 e_3 - \sigma_3 \hat{\mathbf{w}}_3) \quad (50)$$

여기서  $\gamma_3(>0)$ 와  $\sigma_3(>0)$ 는 설계 상수이다. 전술한 바와 같이 식 (48)과 식(49)에 나타난 편미분항들  $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2},$

$\frac{\partial \alpha_2}{\partial y_{d1}}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_{d2}}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\mathbf{w}}_1}$ 은 계산하기가 고도로 난해하다.

정리하면, 이 제어식에서는 모두 세 개의 근사기가 사용되었으며 각각의 입력은 3, 5, 7개이고 근사기 구조와 상수들도 사전에 미리 결정해 놓아야 한다. 또한, 만약 계통식의 차수가 늘어난다면 근사기의 개수와 가상 제어항의 상태변수에 대한 편미분항이 계속 늘어나므로 그 복잡도는 기하급수적으로 늘어나게 된다. 더욱이, 참고문헌 [21, 25-28]에서는 반대역적(semi-global) 안정도만 보장하며, 출력 궤환 제어기의 경우는 다루고 있지 않다.

### 5.1.2 본 논문에서 제안한 적응 제어식

먼저 2차 HGO식을 다음과 같이 결정한다.

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 / \epsilon \quad (51)$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_3 / \epsilon$$

$$\dot{\xi}_3 = (-d_1 \xi_3 - d_2 \xi_2 - \xi_1 + y) / \epsilon$$

여기서  $d_1$ 과  $d_2$ 는 다항식  $r^3 + d_1 r^2 + d_2 r + 1$ 이 Hurwitz 다항식이 되도록 결정하며  $\epsilon > 0$ 은 설계상수이다. 그리고 상태변수 관측 벡터를  $\hat{\mathbf{z}} = \left[ y, \frac{\xi_1}{\epsilon}, \frac{\xi_2}{\epsilon} \right]^T$ , 추종 오차 벡터를  $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{y}}_d$ 로 정의하면 입력식과 적응식은 다음과 같이 결정된다.

$$u = -k\hat{s} - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta} = [x_1, x_2, x_3, \hat{v}]^T \quad (52)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = \boldsymbol{\gamma}(\Phi \hat{\mathbf{s}} - \sigma_s |\hat{\mathbf{s}}| \hat{\mathbf{w}}) \quad (53)$$

여기서  $\hat{s} = [\lambda^2, 2\lambda, 1]\hat{e}$ 이고  $\hat{v} = -\ddot{y}_d + [0, \lambda^2, 2\lambda]\hat{e}$ 이고  $k(>0)$ 와  $\gamma(>0)$ 은 설계상수이다. 본 논문에서 제안된 제어식을 구하는 데에는 여러 단계를 거칠 필요가 없으며 단 하나의 근사기만 사용된다. 근사기의 구조는 오프라인으로 미리 정할 필요도 없이 자동으로 결정되며 이로 인해 대역적 안정도를 보장한다. 또한 계통식의 차수가 늘어나더라도 변화되는 점은 식 (51)에서 HGO의 차수가 늘어나고 식 (52)의 FLS로의 입력 벡터  $\eta$ 의 차수가 늘어나는 정도이고 복잡도가 현저하게 증가하지는 않는다는 큰 장점이 있다. 더우기, 안정도 증명도 상대적으로 간결하고 [21,25-28]에서는 출력 궤환 제어식은 제시하지 못하였으나 본 논문에서는 제어식 (34)와 적응칙 (35)를 적용하여 출력 궤환 제어기를 구성할 수 있다.

### 5.2 순계환 계통의 모의 실험 결과

제안된 적응 신경망 제어기의 성능을 보이기 위해서 다음과 같은 비선형계통에 대해서 모의실험을 수행한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + 0.2x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 + u + u^3/7 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{54}$$

계통 (54)는 완전궤환 계통이며 가정 1을 만족함을 쉽게 확인할 수 있다. 원하는 출력은  $y_d(t) = 2\sin(t)$ 이다. 예제 계통의 차수가 2차이기 때문에 다음과 같은 2차 HGO를 사용한다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2/\epsilon \\ \dot{\xi}_2 &= (-d_1\xi_2 - \xi_1 + y)/\epsilon \end{aligned} \tag{55}$$

여기서 설계상수는  $\epsilon = 0.01$ ,  $d_1 = 2$ 로 선정하였다.

#### 5.2.1 상태변수 궤환 제어기 모의실험 결과

FLS의 입력변수  $x_1, x_2, \hat{v}, \hat{s}$ 에 대한 퍼지 소속 함수는 자기 구조화 알고리즘에 따라서 자동적으로 만들어지므로 설계자는 단순히 소속 함수의 폭만 사전에 결정해주면 된다.  $x_1$ 과  $x_2$ 에 대해서  $q_i^1 = q_i^2 = 2, \forall i$ 로 선정했고  $\hat{v}, \hat{s}$ 에 대해서는  $q_i^3 = q_i^4 = 10, \forall i$ 로 선정했다. 제어기 상수는  $\lambda = 2, k = 5, \gamma = 20, \epsilon_w = 15$ 로 선정하였다. 초기 상태변수는  $\mathbf{x}(0) = [0.1 \ 0]^T$ 이고 HGO와 FLS의 초기 변수 값은 모두 0으로 하였다. 모의실험 결과를 그림 4-6에 도시하였으며 계통의 출력이 기준 출력을 추종함과 모든 시변신호들이 안정화되는 것을 확인할 수 있다.

#### 5.2.2 출력 궤환 제어기 모의실험

앞 절의 경우와 모든 파라미터는 동일하다. 단 상태 변수를 FLS로의 입력으로 쓰지 못하는 경우이므로  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{v}, \hat{s}$ 로 바뀌었을 뿐이다. 모의실험 결과는 그림 7~9에 도시하였다. 이 결과로부터 제안된 출력 궤환 제어기가 상태 변수 궤환 제어기와 유사한 성능을 보임을 알 수 있다.

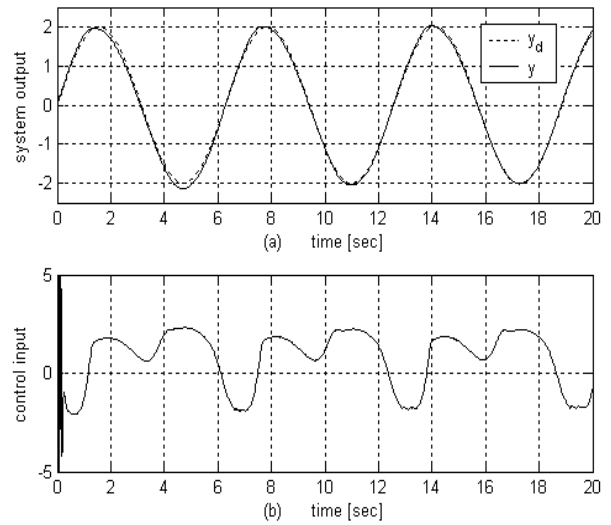


그림 4 (a) 출력과 원하는 출력, (b) 제어입력  
Fig. 4 (a) Output and desired output, (b) control input

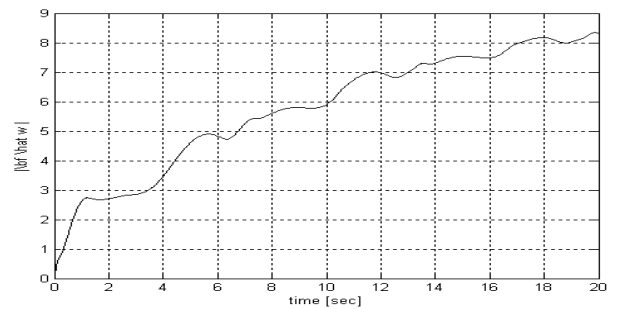


그림 5 |w|의 궤적  
Fig. 5 Trajectory of |w|

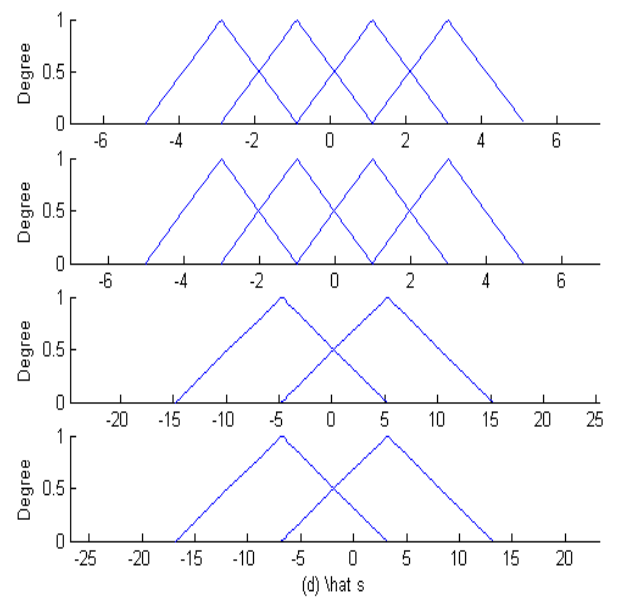


그림 6 자동 생성된 퍼지 소속함수.  
Fig. 6 Fuzzy membership functions that are created automatically.



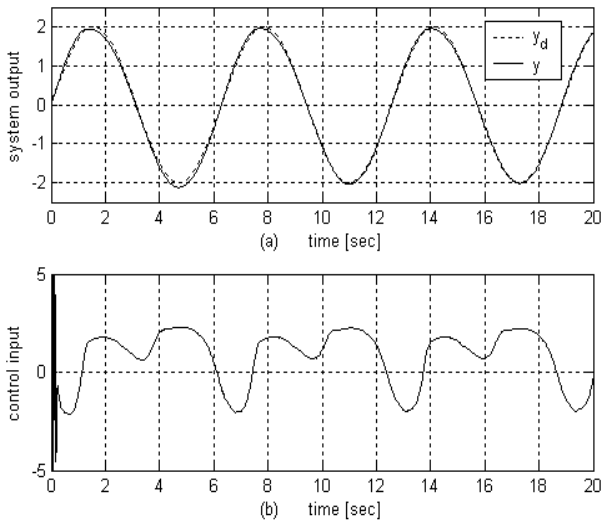


그림 7 (a) 출력과 원하는 출력, (b) 제어입력  
 Fig. 7 (a) Output and desired output, (b) control input

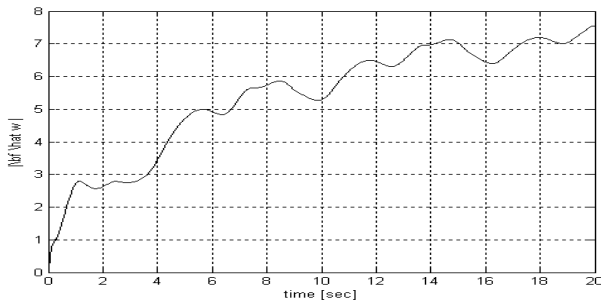


그림 8 |w|의 궤적  
 Fig. 8 Trajectory of |w|

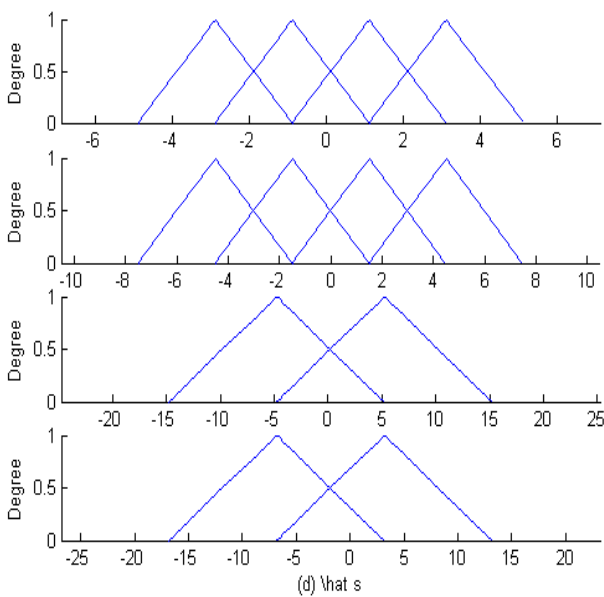


그림 9 자동 생성된 퍼지 소속함수.  
 Fig. 9 Fuzzy membership functions that are created automatically.

## 6. 결 론

본 논문에서는 불확실한 단일 입력 단일 출력 완전 케환 비선형 계통에 대한 적응 퍼지 제어기를 제안하였다. 제어 대상 계통에 대한 기존의 적응 퍼지 제어기 연구 결과들이 모두 백스테핑을 기반으로 한 것과 달리 본 논문은 원래의 계통에 대해서 출력과 그 시간 도함수들에 대한 정규식을 고려하여 제어기를 설계하여 백스테핑을 회피하였다. 그 결과 백스테핑의 고질적인 문제점인 ‘복잡도 폭발’을 해결하고 제어식과 안정도 증명이 현저히 간결해졌음을 보였다. 또한 퍼지 시스템의 퍼지 소속 함수와 퍼지 규칙을 자동적으로 만들어서 구조를 갖추어 나가는 자기 구조화 알고리즘을 채용하여 전체 제어계의 대역적 안정도를 증명하였으며 상태 변수 케환 제어기뿐만 아니라 출력 케환 제어 알고리즘도 제안하였다.

### 감사의 글

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2008 -313-D00329).

### 참 고 문 헌

- [1] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. A Wiley-Interscience publication, 1995.
- [2] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1996.
- [3] S. Behatsh, "Robust output tracking for nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1381-1407, 1990.
- [4] L.-X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 146-155, 1993.
- [5] L.-X. Wang, "Stable adaptive fuzzy controllers with application to inverted tracking," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 5, pp. 677-691, 1996.
- [6] J. T. Spooner, K. M. Passino, "Stalbe adaptive control using fuzzy systems and neural networks," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 339-359, 1996.
- [7] J.-H. Park and G.-T. Park, "Robust adaptive fuzzy controller for nonlinear system Using Estimation of Bounds for Approximation Errors," *Fuzzy Sets & Systems*, vol. 133, no. 1, pp. 19-36, 2003.
- [8] J.-H. Park, G.-T. Park, S.-H. Kim and C.-J. Moon, "Output-feedback control of uncertain nonlinear systems using a self-structuring adaptive fuzzy observer," *Fuzzy Sets & Systems*, vol. 151, no. 1,

- pp. 21-42, Apr., 2005.
- [9] J.-H. Park, S.-H. Huh, S.-H. Kim, G.-T. Park, "Direct Adaptive Controller for Nonaffine Nonlinear Systems Using Self-Structuring Neural Networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 16, no. 2, pp. 414-422, 2005.
- [10] J.-H. Park, S.-H. Kim, "Direct Adaptive Output-Feedback Fuzzy Controller for Nonaffine Nonlinear System," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 1, pp. 65-72, 2004.
- [11] J.-H. Park, G.-T. Park, S.-H. Kim and C.-J. Moon, "Direct Adaptive Self-Structuring Fuzzy Controller for Nonaffine Nonlinear Systems," *Fuzzy Sets & Systems*, vol. 153, no. 3, pp. 429-445, Aug., 2005.
- [12] J.-H. Park and G.-T. Park, "Robust Adaptive Fuzzy Controller for Nonaffine Nonlinear Systems with Dynamic Rule Activation," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, no. 2, pp. 117-139, 2003.
- [13] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 36, no. 11, pp. 1241-1253, 1991.
- [14] M. U. Polycarpou and M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators," *Int. J. Control*, vol. 70, no. 3, pp. 363-384, 1998.
- [15] W.-Y. Wang, M.-L. Chan, T.-T. Lee and C.-H. Liu, "Adaptive fuzzy control for strict-feedback canonical nonlinear systems with  $H^\infty$  tracking performance," *IEEE Trans. System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, vol. 30, no. 6, pp. 878-885, 2000.
- [16] Y. Li, S. Qiang, X. Zhuang, O. Kaynak, "Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using RBF neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 15, no. 3, pp. 693-700, 2004.
- [17] S. S. Ge, C. Wang, "Direct adaptive NN control of a class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 13, no. 1, pp. 214-221, 2002.
- [18] J. Q. Gong, B. Yao, "Neural network adaptive robust control of nonlinear systems in semi-strict feedback form," *Automatica*, vol. 37, pp. 1149-1160, 2001.
- [19] Y. Yang, G. Geng, J. Ren, "A combined backstepping and small-gain approach to robust adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems," *IEEE Trans. System, Man, and Cybernetics-Part A*, vol. 34, no. 3, pp. 406-420, 2004.
- [20] Y. Yang, C. Zhou, "Adaptive fuzzy  $H^\infty$  stabilization for strict-feedback canonical nonlinear systems via backstepping and small-gain approach," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 1, pp. 104-114, 2005.
- [21] S. S. Ge, C. Wang, "Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 671-682, 2002.
- [22] D. Wang, J. Huang, "Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form," *Automatica*, vol. 38, pp. 1365-1372, 2002.
- [23] C. Wang, D. J. Hill, and S. S. Ge, G. Chen "An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 42, pp. 723-732, 2006.
- [24] T. P. Zhang, S. S. Ge, "Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form," *Automatica*, vol. 44, pp. 1895-1903, 2008.
- [25] B. Ren, S. S. Ge, C.-Y. Su, T. H. Lee, "Adaptive Neural Control for a Class of Uncertain Nonlinear Systems in Pure-Feedback Form with Hysteresis Input," *IEEE Trans. Sys. man, and Cybern.-part B: Cybern*, vol , no , pp, 2008.
- [26] M. Wang, S. S. Ge, and K.-S. Hong, "Approximation-Based Adaptive Tracking Control of Pure-Feedback Nonlinear Systems with Multiple Unknown Time-Varying Delays," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 21. no. 11, pp. 1804-1816, 2010.
- [27] A.-M. Zou, Z.-G. Hou, M. Tan, "Adaptive Control of a Class of Nonlinear Pure-Feedback Systems Using Fuzzy Backstepping Approach," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 16, no. 4, pp. 886-897, 2008.
- [28] T.-P. Zhang, H. Wen, Q. Zhu, "Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems in Pure Feedback Form Based on Input-to-State Stability," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 80-93, 2010.
- [29] J.-H. Park, S.-H. Kim, and Y.-H. Chang, "Adaptive Neural Control of Nonlinear Pure-feedback Systems," *Journal of IKEEE*, vol. 14, no. 3, pp. 10-17, 2010.
- [30] J.-H. Park, S.-H. Kim, C.-J. Moon, "Adaptive Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems Without Backstepping," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 20, no. 7, pp. 1204-1209, 2009.
- [31] S. Behatsh, "Robust output tracking for nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1381-1407, 1990.
- [32] J.-J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.

## 저 자 소 개



### 박 장 현 (朴 張 鉉)

1995년 고려대학교 전기공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 2002년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 현재 목포대학교 공대 제어로봇공학과 부교수. 관심분야는 지능제어, 비선형 적응제어, 마이크로프로세서 응용.



### 김 성 환 (金 成 煥)

1991년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1995년 2월 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 1998년 8월 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 현 목포대 공대 제어로봇공학과 교수. 관심분야는 지능제어, AC전동기제어, DSP응용.



### 장 영 학 (張 永 學)

1981년 전남대 계측공학과 졸업. 1984년 전남대 대학원 전기공학과 졸업. (공학석사) 1991년 전남대 대학원 전기공학과 졸업. (공학박사) 1991년 3월~현재 목포대학교 제어로봇공학과 교수. 주관심분야는 전기기기, 전력전자.



### 유 영 재 (柳 泳 材)

1998년 전남대학교 전기공학과 졸업(공학박사). 현재 목포대학교 공대 제어로봇공학과 교수. 관심분야는 이동로봇, 차량제어, 지능제어.