
비선형 슬라이딩 평면을 이용한 슬라이딩 제어

한종길*

The Sliding Control using Nonlinear Sliding Surfaces

Jong-Kil Han*

요약

본 논문은 최적제어에 기초하여 비선형 슬라이딩 평면을 설계하는 것이다. 최적제어입력에 의한 상태 궤적을 Frobenius 정리와 matrix decomposition 방법에 의해 구하였고, 이 궤적을 시스템의 슬라이딩 평면으로 설정하였다. 상태는 초기부터 슬라이딩 평면을 유지하며, 그 결과 초기상태 단계로부터 전 영역까지 시스템의 강인성은 보장 받을 수 있으며, 도달시간 동안 발생 될 수 있는 불확실성과 외란의 영향을 제거되고, 큰 제어 입력의 문제도 해결할 수 있었다. 그리고 최적경로를 슬라이딩 평면으로 설정함으로써 추적시간을 줄일 수 있었다. 역진자 시스템을 사용하여 그 타당성을 보인다.

ABSTRACT

In the paper, design of nonlinear sliding surfaces which are based on optimal control is studied, The state trajectory by the input of optimal control was obtained by Frobenius theorem and matrix decomposition method, was set the nonlinear sliding surfaces of the system. The states is maintained to sliding surfaces from initial states. As the result, robustness of the system can be guaranteed throughout an entire response of the system starting from the initial time instance, the uncertainty and external disturbance that can occur during the reaching time is removed, the problem of large control input was solved, and setting the sliding surfaces optimal path was able to reduce the tracking time. The validity of the proposed control scheme is shown in computer simulation for inverted pendulum.

키워드

Sliding Control, Nonlinear Sliding Surfaces, Optimal control, Frobenius theorem.
슬라이딩 제어, 비선형 슬라이딩 평면, 최적제어, 프로베니우스 정리

I. 서론

슬라이딩 제어기는 선형시스템은 물론 비선형 시스템, 파라미터 변동 시스템, 시변 시스템 등 미지의 파라미터나 미지의 외란을 갖는 시스템에서 용이하게 적용되며 원하는 특성을 상태전환 면으로서 미리 설정하면 시스템은 증가적으로 원하는 특성에 구속되어

적용된다. 이 결과 슬라이딩 제어는 제어입력이 연속적으로 변화하는 비선형제어 성격과 슬라이딩 모드가 존재하며 원하는 특성으로 적용하는 적응제어 성격의 양면을 가진다. 그러나 슬라이딩 모드에서 벗어나면 일반적으로 강인성을 보장할 수 없고 슬라이딩 모드에서는 채터링 현상이 발생한다. 이러한 채터링의 문제점을 해결하기 위하여 슬라이딩 모드에 구간 연속

* 한려대학교 멀티정보통신학과(jakan0@yahoo.co.kr)

접수일자 : 2012. 09. 03

심사(수정)일자 : 2012. 09. 20

게재확정일자 : 2012. 10. 05

적인 기법[2]과 일차함수를 이용한 연속적인 이동 슬라이딩 방법[3], 그리고 퍼지논리를 이용한 이동 슬라이딩 방법[4], 슬라이딩 벡터를 이용하는 방법 등[5]이 있다. 기존의 논문들은 채터링의 문제를 해결할 수 있지만, 초기에 슬라이딩 모드에서 많이 벗어난 위치에 있기에 슬라이딩 모드에 빠른 접근을 위하여 큰 채터링과 슬라이딩 모드에서 멀리 있을 때 강인성을 보장할 수 없다. 본 논문에서는 비선형 시스템에 대하여 최적 제어입력을 구하고, 그 입력에 의한 시스템의 비선형 상태제어를 슬라이딩 평면으로 설정하였다. 그리고 처음부터 상태가 슬라이딩 평면에 유지하도록 가변구조 입력을 가함으로써 기존의 슬라이딩 이론에서 슬라이딩 평면에 도달시간 동안 발생될 수 있는 불확실성과 외부잡음의 영향을 제거하고 초기상태로부터 강인성을 달성 할 수 있다.

본 논문에서는 비선형 슬라이딩 평면을 설정하기 위한 방법을 제안한다. 본 논문의 구성은 II장에서는 Frobenius 정리와 matrix decomposition 방법에 의하여 비선형 스위칭 평면을 설계하고, III장에서는 상태가 초기상태부터 비선형 스위칭 평면에 머물도록 제어입력을 설계한다. IV장에서는 논문의 타당성을 검증하기 위하여 제안한 제어법칙의 타당성 및 그에 대한 성능을 분석하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

II. 최적 비선형 스위칭 평면

일반적인 불확실한 비선형 동력학 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A_L + A_R(t,x) + \Delta A(t,x))x(t) + f(t,x,u) + (B + \Delta B(t,x,u))u \quad (1)$$

여기에서 A_L 은 A 의 선형화한 항이고, $A_R(t,x)$ 는 A 의 선형화 후 나머지 항이며, $\Delta A(t,x)$ 는 시스템의 불확실한 항이고, $f(t,x,u)$ 는 시스템의 모든 외란을 고려한 항이며, ΔB 는 입력의 불확실성을 고려한 항이다.

모든 선형화 후 나머지 항 및 불확실성과 잡음이 정합조건을 만족한다고 가정하면, 식(2)은 존재한다.

$$A_R(t,x) = Br(t,x), \quad \Delta A(t,x) = Bh(t,x,u) \quad (2)$$

$$\nabla B(t,x)u = Bw(t,x,u), f(t,x,u) = Bd(t,x,u)$$

$\eta(t,x,u)$ 에 대하여 다음과 같은 함수가 존재한다고 가정한다.

$$\eta(t,x,u) = r(t,x)x(t) + h(t,x,u)x(t) + w(t,x,u) + d(t,x,u) \quad (3)$$

$$\rho(x) \geq |\eta(t,x,u)|$$

식(1)에 식(3)식을 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A_L x(t) + Bu(t) + B\eta(t,x,u) \quad (4)$$

식(4)에 대하여 nominal항만 고려하여 최적 제어입력을 구하기 위해 다음과 같이 목적함수를 설정한다.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5)$$

Hamilton-Jacobi-Bellman의 방정식으로 최적제어 입력을 구할 수 있다.

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (6)$$

여기서 P 는 최적제어의 Riccati 방정식의 해이다.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q \quad (7)$$

식(4)식에 nominal항만 고려한 시스템에 최적제어 입력 (6)식을 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A_L - R^{-1}B^T P)x \quad (8)$$

식(8)으로 비선형 슬라이딩 평면을 설계한다.

Frobenius 정리를 사용한 방법

비선형 슬라이딩 평면을 설계하기 위해서 벡터필드(vectorfield)와 디스트리뷰션(distribution), 코디스트리뷰션(codistribution)의 관계를 알아 본다. R^n 의 개집합 U 에서 정의된 독립적인 벡터필드 ($\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)\}$)에 의하여 스패(span)되는 R^n 의 subspace를 디스트리뷰션($\Delta(x)$)이라 하고, distri-

bution의 듀얼 스페이스(dual space)인 코디스트리뷰션($\Delta^\perp(x)$)을 각각 다음과 같다.

$$\Delta(x) = span \{ f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x) \}$$

$$\Delta^\perp(x) = span \{ w_1(x), w_2(x), \dots, w_{n-d}(x) \}$$

distribution과 codistribution은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

$$\dim(\Delta) + \dim(\Delta^\perp) = n$$

$$\langle w_j(x), f_i(x) \rangle = 0$$

$$, \forall \quad 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n-d,$$

Frobenius 정리[1]를 도입하면, 다음과 같은 식을 만족하는 편미분 방정식으로부터 $n-d$ 개의 독립적인 해, 즉 $\lambda_j(x)$ 을 찾을 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} [f_1(x), \dots, f_d(x)] = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} F(x) = 0$$

여기서 $F(x) = [f_1(x), \dots, f_d(x)]$, $w_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$ 이다.

다음과 같은 2차 선형시스템을 고려하자

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{9}$$

식(8)이 식(9)와 같은 $n=2, d=1$ 인 선형 시스템이라면 $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ 를 만족하는 1개의 해, 즉 다음 편미분 방정식을 만족하는 일반해, $\lambda(x_1, x_2) = c$ 를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \lambda(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2 (c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0 \tag{10}$$

편미분 방정식의 일반해를 구하는 방법은 다음과 같다.

$$f_1(x) = [x_2 \ c_1 x_1 + c_2 x_2]^T, f_2(x) = [1 \ 0]^T \tag{11}$$

여기서 $f_2(x)$ 는 $[f_1(x) \ f_2(x)]$ 가 full rank가 되도록 정한다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = F(z_1, z_2) = \Phi_{z_1}^{f_1} \cdot \Phi_{z_2}^{f_2}(x^0) \tag{12}$$

여기서 $\Phi_t^f: x \mapsto \Phi_t^f(x)$, x^0 는 초기상태이고, 함수의 composition을 나타낸다.

이 경우, x_1, x_2 와 z_1, z_2 사이에 다음과 같은 관계식이 성립하며, z_2 가 편미분 방정식의 해가 되고, 일반해 $\lambda(x_1, x_2)$ 는 $z_2 + c$ 이다.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F^{-1}(x_1, x_2) \tag{13}$$

본 논문에서는 구해진 일반해, 즉 $\lambda(x_1, x_2) - c$ 중에서 초기상태 (x_1^0, x_2^0) 를 지나는 비선형 상태궤적을 슬라이딩 평면으로 설정하였으며, 그 상태궤적은 그림 1과 같고 세 영역으로 나누어 제어입력을 가할 수 있다

$$s = \lambda(x_1, x_2) - \lambda(x_1^0, x_2^0) \tag{14}$$

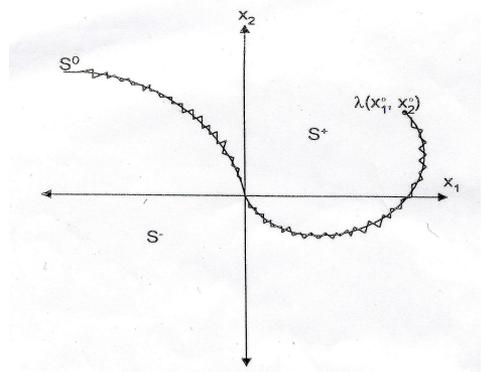


그림 1. 비선형 슬라이딩 평면
Fig. 1 Nonlinear sliding surface

Matrix decomposition 방법

상태궤적을 구하기 위해 2차 선형 시스템인 식(9)을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x} = Mx \tag{15}$$

다음과 같은 좌표변환을 통하여 행렬 M 을 대각행렬로 만들 수 있다.

$$z = Px, \quad P = [v_1 \ v_2]^{-1} \tag{16}$$

여기서 $z = [z_1 \ z_2]^T$ 이고 v_1, v_2 는 고유치벡터이다. 좌표변환에 의해서 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\dot{z} = PMP^{-1}z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

λ_1, λ_2 는 고유치이다

다음과 같이 상태궤적에 대한 방정식을 구할 수 있다.

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$$

$$\frac{dz_1}{z_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{dz_2}{z_2}$$

$$z_1 = cz_2^\alpha$$

여기서 $\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 이다.

$$s(x_1, x_2) = (P_{11}x_1 + p_{12}x_2) - \frac{p_{11}x_1^0 + p_{12}x_2^0}{(p_{21}x_1^0 + p_{22}x_2^0)^\alpha} (P_{21}x_1 + p_{22}x_2)^\alpha \tag{18}$$

식(18)을 슬라이딩 평면으로 설정하고, 초기상태의 값에 따라 다른 슬라이딩 평면을 구할 수 있다.

III. 제어기 설계

제어입력은 다음과 같은 도달조건(reaching condition) $\dot{s} < -\eta|s|$ 를 만족하도록 설계되어야 한다.

그러므로 식(4)에 관한 제어입력을 다음과 같이 설계하였다.

$$u = \begin{cases} u_{opt} + u_{vss} & x \in S^+ \text{ or } x \in S^- \\ u_{opt} & x \in S^0 \end{cases} \tag{19}$$

$$u_{opt} = u^*$$

$$u_{vss} = -\rho \operatorname{sgn}(s \frac{\partial s}{\partial x} B) - \operatorname{sgn}(\frac{\partial s}{\partial x} B)ks$$

여기서 $k > 0$

[증명]

$$\begin{aligned} \dot{s} &= s \frac{\partial s}{\partial x} (A_L x + B\eta + B(u_{opt} + u_{vss})) \\ &= s \frac{\partial s}{\partial x} (A_L x + B u_{opt} + B(\eta + u_{vss})) \\ &= s \frac{\partial s}{\partial x} B(\eta + u_{vss}) \\ &= s \frac{\partial s}{\partial x} B(\eta - \rho \operatorname{sgn}(s \frac{\partial s}{\partial x} B) - \operatorname{sgn}(\frac{\partial s}{\partial x} B)ks) \\ &\leq -ks | \frac{\partial s}{\partial x} B | s \end{aligned} \tag{20}$$

$A_L x + B u_{opt}$ 는 슬라이딩 평면이므로 $s = 0$ 이다. $t = t_0$ 에서 슬라이딩 평면을 유지하면서 제어할 수 있으나 채터링 현상이 발생한다. 이 문제를 해결하기 위하여 슬라이딩 평면의 미소구간 ϵ 내에서 연속적인 입력으로 수정한 다음과 같은 입력을 사용한다.

$$u = u_{opt} - \gamma \tanh(s/\epsilon) \tag{21}$$

이러한 입력을 사용하면 비이상적인 슬라이딩 모션이 발생한다. 그러나 ϵ 의 크기를 아주 작게 설계된다면 이상적인 슬라이딩 모션의 궤적과 거의 일치할 수 있다.

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

본 장에서는 제안된 제어법칙에 대한 타당성을 보이기 위해 비선형 시스템의 예로 많이 사용되는 역진자 시스템에 대한 제어결과를 살펴본다.

$$\ddot{\theta} = (g \sin \theta - \cos \theta) \left(\frac{ml}{m_c + m} \theta^2 \sin \theta - \frac{1}{m_c + m} u(t) \right) / \left(\frac{4}{3} l - \frac{ml}{m_c + m} \cos^2 \theta \right) \quad (22)$$

슬라이딩 평면에 도달하는 패턴을 보기 위해 초기 조건은 $\theta = 0.9$, $\dot{\theta} = 0.6$ 로 설정하였다. 그림4는 슬라이딩 평면에서 상태의 모습이다. 빠르게 슬라이딩 평면에 도달하는 것을 볼 수 있다. 이것은 최적제어 입력에 의한 상태 궤적을 슬라이딩 평면으로 설정함으로 가능하다. 그림3은 제어입력으로서 전체적으로 작은 제어 입력이라고 볼 수 있다. 이것은 슬라이딩 제어에서 초기상태와 슬라이딩 평면과 거리가 멀 때 빠르게 슬라이딩 평면에 도달하기 위해서 입력이 커지는데 이러한 큰 제어입력의 문제점도 해결할 수 있었고, 슬라이딩 평면에서 채터링 현상을 줄이기 위해서 미소구간에서 연속함수를 사용하여 채터링 슬라이딩 제어의 문제점인 채터링 현상을 줄였다. 그림2는 원하는 각도로 잘 수렴하는 것을 볼 수 있다.

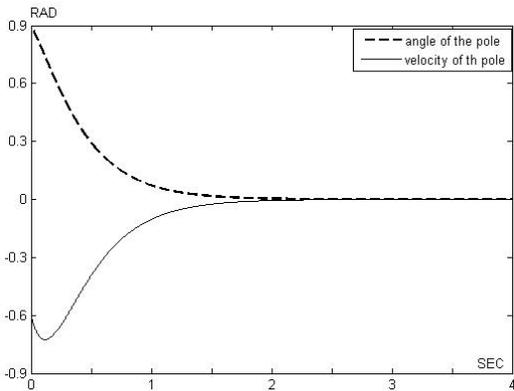


그림 2. 진자의 각도와 각속도
Fig. 2 Angle of velocity of the pole

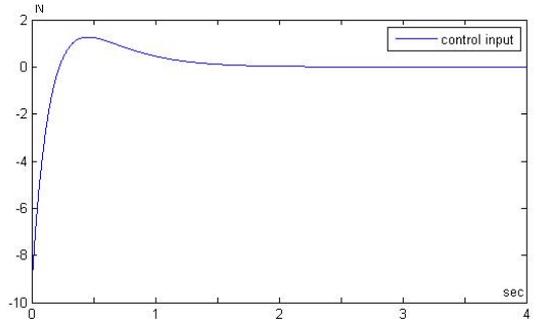


그림 3. 제어입력
Fig. 3 Control input

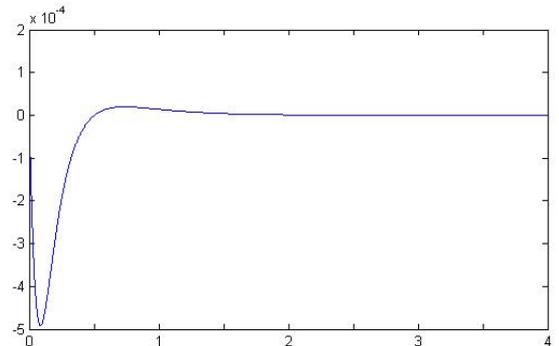


그림 4. 슬라이딩 평면
Fig. 4 Sliding surface

V. 결론

본 논문에서는 최적제어입력에 의한 상태 궤적을 Frobenius 정리와 matrix decomposition 방법에 의해서 구하였고, 이 궤적을 시스템의 슬라이딩 평면으로 설정하였다. 이 비선형 슬라이딩 평면을 이용함으로써 빠르게 슬라이딩 평면에 도달하고 상태가 슬라이딩 평면에 유지하도록 가변구조 입력을 가함으로써 기존의 슬라이딩 이론에서 도달시간 동안 발생 될 수 있는 불확실성과 외란의 영향을 제거하고, 시스템의 초기상태와 슬라이딩 평면과 거리가 크면 슬라이딩 평면에 도달시간이 길어지며 빠르게 도달하기 위해서 입력이 커지는데 이러한 큰 제어입력의 문제점도 해결할 수 있었고, 채터링 현상을 줄이기 위해서 슬라이딩 평면의 미소구간에서 연속함수를 사용하였다. 그리고 최적경로를 슬라이딩 평면으로 설정함으로 추적

시간을 줄이고 초기부터 강인한 제어를 설계할 수 있었다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 본 논문의 타당성을 입증하였다. 추후에 실제의 시스템에 제어를 적용할 예정이며, 모든 파라미터가 불확실한 시스템에 대한 연구를 진행할 예정이다.

참고 문헌

[1] Isidori Alberto, "Nonlinear Control SysTems" Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1989.

[2] Boiko,I, "analysis of chattering in continuous sliding mode control", Amer. Cont. Confe., Vol. 4, pp. 2439-2444, 2005.

[3] Y.Ferhun, K.Hasan, "Single-input fuzzy-like moving sliding surface approach to the sliding mode control", Electrical Engi., Vol. 90, pp. 199-207, 2008.

[4] H.Komurchgil, "Fuzzy Moving Sliding Surface approach to the hierarchical Sliding Mode Control", Indu. Elect. Soc. 33rd conf. of the IEEE, pp. 659-664, 2007.

[5] K. Furuta, Y.Pan, "Variable structure control with sliding sector for hybrid systems", VSS'06. Inter. Wor., pp. 286-291, 2006.

[6] W.J. Cao, "Nonlinear integral-type Sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems", IEEE Trans. Autom. con., Vol. 49, pp. 1355-1360, 2004.

[7] S.Modai, C.Mahanta, "Nonlinear Sliding surface based second order sliding mode controller for uncertain linear systems", Elsevier, Vol. 16, pp. 3760-3769, 2011.

[8] B.B, D.Fulwani, "High-performance tracking controller for discrete plant using nonlinear sliding surface", Ind. Elec. IEEE Trans., Vol. 56, pp. 3628-3637, 2009.

[9] 한종길, 손영수, "채터링 감소를 위한 퍼지 슬라이딩 섹터 제어", 한국전자통신학회논문지, 4권, 3호, pp. 211-216, 2009.

[10] 이원부, 박수홍, "Gyro Sensor 제어용 Servo Motion 제어기 개발", 한국전자통신학회논문지, 5권, 5호, pp.493-497, 2010.

[11] 배영철, 박종규, "카오스 이론에 기반한 포메이션 제어를 위한 다중 카오스 로봇의 장애물 회피 및 동기화에 관한 연구", 한국전자통신학회 논문지, 5권, 5호, pp. 534-540, 2010.

[12] 김광진, 고낙용, 박세승, "시뮬레이션을 이용한 이동 로봇의 충돌회피 알고리즘 비교", 한국전자통신학회논문지, 7권, 1호, pp. 187-194, 2012.

[13] A. Ghaffari, M.J.Y, "Computing optimized nonlinear sliding surfaces", con. and dec. con., pp. 5273-5278, 2008.

[14] 정광순, "뉴로-퍼지 제어를 이용한 로봇 매니퓰레이터의 궤적 추적", 한국정보기술학회, 2권, 2호, pp. 151-156, 2004.

저자 소개



한종길(Jong-Kil Han)

1992년 전북대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1994년 전북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)

2002년 전북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

1997년 한려대학교 멀티정보통신 교수

※ 관심분야 : 자동제어, 로봇제어