대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.14, No.2 233-253. June. 2012

예비교사의 미분영역에 관한 내용지식의 분석[1)]

조 완 영*

본 연구의 목적은 예비교사의 미분영역 수학내용 지식을 조사하는 데 있다. 이를 위해 수학교사가 알아야 할 수학내용 지식을 학교수학의 내용지식과 과정지식, 학교수학과 연결된 학문적 수학으로 구분하고, 이를 교육과정과 연결하여 검사지를 개발하였다. 연구대상은 예비교사 70명이었으며 연구결과 어떤 교사교육 프로그램을 경험하는지에 따라 예비교사의 수학내용 지식의 수준이 달라질 수 있음을 시사한다. 특히 예비교사들은 익숙하지 않은 문제 상황에 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 특히 평균값 정리의 활용에 관한 문제나 미분의 활용 문제에서 해석학적 수준으로 볼 때 어려운 내용이 아님에도 불구하고 정답률이 특히 낮은 것으로 나타났다.

2)

Ⅰ. 서론

훌륭한 수학교사가 알아야 할 지식에서 수학내용에 대한 지식은 매우 중요하다. 특히 교사 양성 과정에서 어떤 수학을 어떻게 배우는가에 따라 수학교사의 전문성 수준이 달라진다. 예비교사가 배우는 수학은 수학을 배우는 목적의 차이 때문에 예비 수학자가 배우는 수학과 달라야 한다. Dewey(1902, 29-30)의 다음 설명은 이러한 차이를 잘 나타낸다(Sowder, 2007, 162-163에서 재인용).

> 모든 학문 또는 교과는 두 가지 측면이 있다. 하나는 과학자를 위한 것이고 다른 하나는 교사를 위한 것이다. 이러한 두 가지 측면이 결코 상반되거나 갈등상태에 있는 것은 아니다. 그러나 두 가지 측면이 동일하지도 않다. …

20세기 초 Felix Klein도 수학 교사교육의 '이중단절' 문제를 지적한 바 있다. 예비 수학교사는 교사 교육과정에서 학교수학과 차원이 다른 순수 수학을 배우면서 한 번의 단절을 경험하고, 현직교사가 되면 대학에서 배운 학문적 수학과 차원이 다른 학교수학을 가르치면서 또 한 번의 단절을 경험한다는 것이다(박경미, 2009; 조완영, 2010에서 재인용).

이러한 이중단절의 문제는 여전히 해결되지 않고 있다. 예비 수학교사들은 소위 '수학내용학' 전공분야에서 학교수학과 학문적 수학 사이의 관계를 충분히 탐구할 기회를 갖지 못하고 있다. 여기에는 대학에서 배우는 학문적 수학을 잘 이해하면 학교수학을 큰 어려움 없이 잘 가르칠 수 있다는 믿음이 배경으로 작용하고 있다. 예를 들어 사범대학에서 해석학을 '잘 배우면' 고등학교에서 미적분학을 잘 가르칠 수 있다는 것이다. 완전히 틀린 주장은 아니다. 그러나 문제는 어떤 내용을 어떻게 '배우느냐'에 달려 있다.

최근 한국과 중국에서 예비교사를 위한 '수학내용학'에서 학교수학과 학문적 사이를 연결시키려는 시도가 있어 왔다(조완영, 2010에서 재인

* 충북대학교 (wycho@cbu.ac.kr)
1) 이 논문은 2010학년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의해 연구되었음

용). Li와 Haung, Shin(2008)의 중등 예비교사를 위한 수학 교과 지식에 대한 최근의 동향을 비교한 연구에 따르면 중국과 한국에서 전통적, 혁신적 교사교육 프로그램 모두 기본적으로 학문적인 수학 지식과 논리적인 추론을 강조하고 있다.

중국의 경우 혁신적인 수학 과정에서 추상대수와 해석기하 그리고 해석학 등에서는 여전히 어려운 학문적인 수학 내용을 유지하고 있었지만, 현대수학과 학교수학, 중등 대수 연구, 중등 기하 연구, 중등 확률과 통계 연구 등의 교과에서는 학문적 수학과 학교수학 사이의 연결을 다루고 있다. 한국의 혁신적인 예비수학교사 교육 프로그램에서는 수학 내용학과 수학 교수법 모두 중요하다는 인식 아래 학문적 수학과 학교수학 사이의 내적 연결과 수학과 그 수학내용의 교수법 사이의 관련성 모두를 포함시키려고 노력하였다(Li · Haung · Shin, 2008, 83쪽).

수학교사가 알아야 할 수학내용 지식이 무엇인가에 대한 본질적인 질문은 여전히 남아 있다. 단순히 학문적인 수학을 배우고 그 예로 학교수학을 다루는 정도로는 부족하다. 조완영(2010, 2011)은 수학교사의 내용지식을 학교수학의 내용과 문제해결, 추론과 증명, 표현과 의사소통, 연결성 등의 과정, 학교수학과 연결된 학문적 수학으로 개념화한 바 있다. 그렇지만 수학내용 지식이 무엇인가에 대한 논의는 수학철학과도 관련이 있으며 수학교육에 대한 사회의 요구와도 무관하지 않다. 예를 들어, 수리논술, 수학 영재교육, 융복합 인재교육에 필요한 수학교사의 내용 지식이 무엇인가도 지속적으로 연구되어야 할 것이다.

본 연구는 조완영(2010, 2011)이 제시한 교사의 수학내용 지식을 토대로 예비교사의 미분영역 내용 지식을 조사하는데 목적이 있다. 이러한 연구는 수학 교사 교육 프로그램 개선에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것이라 기대한다.

Ⅱ. 미분 영역의 MCK

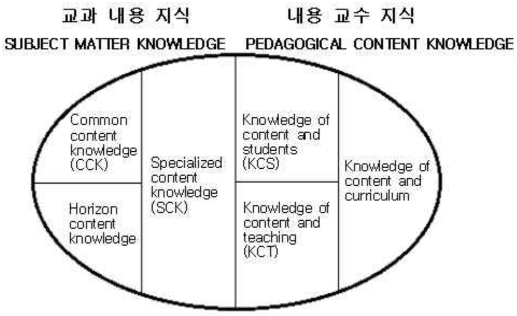
1. MCK[2)]

MCK의 개념은 학자에 따라 다소 다르게 정의된다. Ponte와 Chapman(2006)은 1977년부터 2005년까지 PME에 보고된 논문을 ⅰ) 교사의 수학지식, ⅱ) 수학 수업에 대한 교사의 지식, ⅲ) 교사의 신념과 개념, ⅳ) 교사의 실행으로 영역을 구분하여 분석하였다. 여기서 수학지식은 학문적인 교과 영역에 관한 것으로 사회적 · 교육적 조건과 가치, 교육과정의 방향, 공학적 자원에 따라 달라지는 전문적 지식으로서의 수학 수업에 대한 지식과 구분된다. Ponte와 Chapman(2006)에 따르면 같은 기간 동안 이 분야에 대한 연구는 "교사의 수학 지식에서 부족한 것은 무엇인가?"라는 질문으로 주로 기하, 함수, 곱셈과 나눗셈, 분수, 문제해결 등의 영역에서 이루어졌다. 대부분의 경우 학교수학의 범주를 벗어나지 않았다.

Shulman은 MCK를 "수학 그 자체"로 학문의 실체론적 구조와 구문론적 구조를 포함하는 지식(Schwab, 1978; Grossman, 1990)으로 정의하였다. 여기서 실체론적 지식은 수학적 사실, 개념, 원리, 법칙 그리고 설명 형식을 의미하며, 구문론적 지식은 현재 수학자들에 의해 받아들여지는 새로운 지식의 정립 과정, 패러다임, 규준, 합의에 관한 지식을 의미한다(이기영, 2009에서 인용).

Ball et al.(2008)은 교과내용 지식(SMK)을 공통내용지식(Common Content Knowledge: CCK)과 특수내용지식(Specialized Content Knowledge: SCK)으로 구분하였다([그림 Ⅱ-1]).

2) Shulman이 제시한 교과내용 지식(SMK)를 수학교과에 적용한 수학내용 지식(Mathematical content knowledge, 이하 MCK)을 의미한다.



[그림 Ⅱ-1] MKT의 구성
Ball, D. L., Bass, H., Hill, C., & Phelps, M. (2006)(조선아, 2010에서 재인용)

공통내용 지식은 학습자에게 가르칠 수학 지식을 의미하는 것으로 어떤 수학문제에 대해 단순히 답을 계산하거나 수학 문제를 옳게 해결하는 것을 나타낸다. 조선아(2010)은 미분 단원에서 공통내용 지식을 측정할 수 있는 문항으로 평균변화율과 순간변화율의 차이를 묻는 문제를 예로 제시하고 있다. 공통내용 지식은 학교수학의 내용에 초점을 둔 개념이다.

특수 내용 지식은 학습자에게 직접 가르치지 않지만 교사가 이해하고 있어야 할 수학 지식을 포함하는 개념으로 수학을 가르치는데 필요한 고유한 기술이라 할 수 있다. 교사의 수업은 일상적으로 반복되는 작업이지만 동시에 고유한 수학적 이해와 추론이 요구되며 교사는 학생들이 알아야 하는 지식보다 더 많은 수학 지식을 알아야 한다. 여기에는 수학을 필요로 하는 다른 직업 예를 들면 회계사나 엔지니어들이 사용하는 수학은 물론 왜 그런지를 설명하고 이를 위한 문제를 만드는 지식이 포함된다.

Ball et al.(2008)이 제시한 MKT의 교과지식이나 Shulman이 제시한 교과지식의 실체적 지식과 구문적 지식에 학교수학 자체는 물론 수학적 추론과 증명, 표현과 연결, 문제해결 등이 포함되는 것은 분명하다. 그러나 학문적 수학의 범위나 학교수학과의 관련성은 명확히 드러나지 않는다.

PCK에 관한 국내의 연구에서도 수학내용 지식을 다양하게 정의하고 있다. 김구연(2007)은 PCK를 수학에 대한 지식, 학습자의 이해에 대한 지식, 교수법에 대한 지식으로 구분하고 수학 교과내용 지식을 "각 개념과 주제 사이의 연계성, 다양한 형태의 문제해결력, 교과서에 대한 이해"를 포함하는 것으로 정의하였다. 조성민(2006)은 교과 내용 지식을 "교과의 내용이 본질적으로 가지고 있는 부분 즉 수학에 대한 지식을 의미하는 것"으로 정의하면서 학교수학 교육과정에 대한 전반적인 지식을 기반으로 개념에 대한 정의와 사례의 구분, 연결성에 대한 지식을 포함하고 있다고 주장하였다. 김구연과 조성민이 제시한 교과 지식에서도 학문적 수학을 어느 범위까지 포함할 것인지에 대한 주장은 보이지 않는다. 반면 신현용과 이종욱(2004)은 "수학과 학교수학에 대한 포괄적 이해로 수학 개념과 절차 및 연결성, 개념과 절차에 대한 다양한 표현, 추론을 통해 문제를 해결하고 의사소통하는 방법을 포함한다."고 교과지식을 정의하여 학문적 수학이 교과지식에 포함되어야 함을 함축하고 있다.

Stacey(2008)는 중등수학을 가르치는데 필요한 수학을 '수학'을 아는 것, 활동으로서의 수학을 경험하는 것, 수학사와 수학철학 등과 같은 수학에 관하여 아는 것, 학습 방법을 아는 것 등 네 가지로 구분하였다. 특히 Stacey(2008)는 교사가 알아야 할 '수학'에 대하여 예비 수학교사들이 배우는 학문적 수학과 학교수학과의 연결을 이해하는 것이 중요하다고 주장하였다.

조완영(2010, 2011)은 Stacey(2008)의 연구에서 제시한 교사가 알아야 할 '수학'을 보다 구체화하여 학교수학의 내용과 과정, 학교수학의 배경이 되는 학문적 수학 등으로 제시하고 이를 교사가 알아야 할 MCK라 명명한 바 있다. 암묵적으로

교육과정의 범위 내를 학교수학의 내용의 경계로 다루고 있지만 수리논술, 영재교육, 통합교육 등을 고려할 때 수학교사의 학교수학에 대한 지식은 교육과정 범위를 벗어날 수도 있다. 학교수학의 과정은 다양하게 논의할 수 있지만 2009 개정 교육과정에 따라 수학 내·외적 문제해결, 추론, 표현을 포함한 의사소통으로 정의한다. 여기서의 문제는 학문적 수학을 어느 정도까지 포함시켜야 하는 것을 결정하기 어렵다는 데 있다. 수학교사가 알아야 할 학문적 수학과 수학자가 알아야 할 학문적 수학은 목적이 다르기 때문에 그 내용과 방법도 다를 수밖에 없다는 점이다. 학문적 수학을 많이 알수록 좋겠지만 본 논문에서는 수학교사가 알아야 할 학문적 수학을 잠정적으로 '학교수학의 배경지식으로 작용하는 학문적 수학'이라는 최소 기준 개념을 적용한다.

2. 미분 영역의 MCK[3)]

2009 개정수학과 교육과정에서 미분은 미적분1과 미적분2에서 다룬다([표 Ⅱ-1], [표 Ⅱ-2]).

[표 Ⅱ-1] 미적분Ⅰ 내용체계

영 역	내 용
수열의 극한	· 수열의 극한
	· 급수
함수의 극한과 연속	· 함수의 극한
	· 함수의 연속
다항함수의 미분법	· 미분계수
	· 도함수
	· 도함수의 활용
다항함수의 적분법	· 부정적분
	· 정적분
	· 정적분의 활용

[표 Ⅱ-2] 미적분Ⅱ 내용체계

영 역	내 용
지수함수와 로그함수	· 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프
	· 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	· 삼각함수의 뜻과 그래프
	· 삼각함수의 미분
미분법	· 여러 가지 미분법
	· 도함수의 활용
적분법	· 여러 가지 적분법
	· 정적분의 활용

미적분Ⅰ의 다항함수의 미분법에서는 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을 다루고 있다. 미분계수에서는 미분계수의 뜻, 기하학적 의미, 미분가능성과 연속성을, 도함수에서는 도함수의 의미와 다항함수의 도함수 구하기를, 도함수의 활용에서는 접선의 방정식, 평균값정리, 극대와 극소 판정, 방정식과 부등식, 속도와 가속도 문제를 다루고 있다. 미적분Ⅱ에서는 여러 가지 미분법과 지수함수와 로그함수, 삼각함수의 미분을 다루고 있다.

본 연구에서는 수학교사가 알아야 할 미분 영역의 MCK 모두를 다루지는 않는다. 선행연구(김정희, 2005; 조선아, 2010 등)에서 제시된 학생들이 어려워하거나 수학교사가 특히 알아야 할 내용지식을 중심으로 다룬다. 미분 계수 개념의 통합적 이해, 미분가능성, 도함수의 그래프를 이용한 원함수의 그래프 개형 그리기, 역함수의 미분법, 로피탈의 정리, 평균값정리, 극값의 정의, 도함수의 활용 등이다.

미분계수 개념은 대수적이고 절차적인 측면을 강조하는 경향이 있다. 미분개념을 이해하고 활용하는 것이 단순히 미분계수를 구할 줄 아는 것

[그림Ⅱ-2] 미분계수의 통합적 이해

3) 미분영역에서 교사들이 알아야 할 모든 MCK를 논의하지는 않는다. 2009 개정 수학과 교육과정의 미적분학Ⅰ을 중심으로 중요한 개념을 중심으로 논의한다.

이상으로 중요하다. 교육과정에서 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 분리해서 다루지만, 미분계수 개념은 본래 접선문제와 속도문제에서 비롯된 것이고 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기가 곧 미분계수이다. 따라서 미분계수 개념을 수학적으로 정의하기 전에 접선의 기울기와 순간속도 문제를 해결하고 이를 수학화하는 과정으로 미분계수의 뜻을 이해하는 것이 미분의 활용에 도움이 된다. 즉, 미분계수 개념의 통합적 이해가 필요하다[4]([그림 Ⅱ-2]).

도함수 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$는 $\Delta x\to 0$일 때 비 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한값이다. 이를 구하는 과정에서 처음에는 Δx가 0이 아닌 것으로 취급되지만 나중에는 $\Delta x=0$을 대입하게 되어 학생들에게는 매우 혼란스럽다(정상권, 2004). 예를 들어, $f(x)=x^2$에서 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$를 구하면

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\Delta x\neq 0$으로 생각하여 식을 간단히 한 다음 $\Delta x=0$을 대입하여 계산하게 된다. 이러한 혼란은 $\epsilon-\delta$를 이용하여 미분계수와 미분가능성을 다룸으로써 해결되지만 학교수학에서는 이것을 엄밀하게 다루기 어렵다. 그렇지만 교사는 직관적으로 다루는 미분계수와 도함수 개념의 어려움을 이해하고 이에 대한 $\epsilon-\delta$에 의한 엄밀한 정의와 그 의미를 알아야 한다.

미분가능성의 문제는 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한값이 존재하느냐의 문제이다. 고등학교 교과서에서는 좌미분계수와 우미분계수를 대수적으로 계산하거나 좌우에서의 접선의 기울기를 조사하여 미분가능성을 설명하고 있다. 미분가능성과 연속의 관계가 중요하게 다루어진다. 함수의 연속성은 미분가능성의 충분조건이 아니다. 특히 함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3x)$는 모든 실수에서 연속이지만 모든 점에서 미분가능하지 않은 함수이다.

최나영(2001)은 고등학교 자연계열 2학년 학생 98명을 대상으로 미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 조사연구에서 학생들이 도함수의 그래프에서 함수의 그래프를 유도하는 과정에서 오류를 보이고 있음을 보고하였다. 미적분 영역의 학습이 대수적, 절차적 지식 중심이고 개념적 이해는 부족하다는 연구 결과(김정희, 2005)를 볼 때, 도함수의 그래프가 주어졌을 때 원함수의 그래프의 개형을 그려보는 활동은 매우 중요한 의미를 갖는다.

본 연구에서는 여러 가지 함수의 미분법 중 연쇄법칙으로 알려진 합성함수의 미분법에 대해 논의한다. 고등학교에서 합성함수의 미분법은 일반적으로 다음과 같이 정리된다(류희찬 외, 2010).

합성함수의 미분법 익힘책 p.124

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

[그림Ⅱ-3] 합성함수의 미분법

연쇄법칙을 증명하는 과정에 조심해야 할 조건이 있다. 함수 $y=f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하고 $y=g(x)$가 $x=f(c)$에서 미분가능하면, 연쇄법칙은 $(g\circ f)'(c)=g'(f(c))f'(c)$가 된다. 연쇄법칙은 $x\to c$일 때,

$$\frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c}=\frac{g(f(x))-g(f(c))}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

의 값을 구하는 것과 관련이 있다. 여기서 문제는 $f(x)-f(c)=0$이 될 수도 있다는 점이다. 고등학교 교과서에서는 $f(x)-f(c)\neq 0$이라고 선언한 후 증명을 한다. 그러나 해석학에서는 Caratheodory의

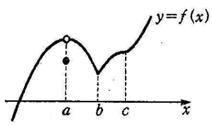
4) 통합적 이해란 수학 개념을 이해할 때 맥락과 연결된 개념정의, 대수적·기하적 표현, 간단한 응용상황을 포함하여 수학을 이해하는 것을 의미하는 것으로 본 연구자가 제안하는 대안적인 용어이다.

정리[5])를 이용하여 이 어려움을 피하고 있다(Bartle와 Sherbert, 2000). 이러한 조건을 학생들에게 설명하기는 어렵지만 수학에서는 매우 중요하다. 예를 들어, 미적분학의 기본정리는 '폐구간에서 연속'인 함수에 대하여 성립하는데 이런 조건을 소홀히 하는 경우 다음과 같은 오류를 범할 수 있다. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$은 $x=0$에서 불연속이기 때문에 미적분학의 기본정리를 적용할 수 없다.

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^4}dx=[-\frac{1}{3}x^{-3}]_{-1}^{2}=-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{8}$$

고등학교 수준에서는 연속인 함수를 전제로 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 극값을 설명한다. 이러한 설명 방식은 닫힌구간의 양 끝 점이나 상수함수 등에서 극값을 갖는지를 판단하기 어렵게 만든다. 그러나 대학 수준의 미적분의 정의[6])에 따르면 상수함수는 정의역의 모든 점에서 극댓값과 극솟값을 갖는다. 수학교사는 이런 정의에서의 차이를 알아야 한다. 특히 다음과 같은 문제는 문제 오류의 도전을 받을 수 있다(조완영, 2011 참조).

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 주어질 때, 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? 그 이유를 간단히 설명하시오.



㉠ $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분불가능하고, $x=b$에서 미분가능하다. ㉡ 이 그래프의 극값은 두 개다. ㉢ $x=a$ 에서 불연속이며, 접선이 존재하지 않는다. ㉣ 구간 (a,b)에서 $f'(x)<0$임을 보여 주고 있다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉡,㉢ ④ ㉢,㉣ ⑤ ㉡,㉢,㉣

2009 개정 수학과 교육과정에서는 미적분 I 에서 평균값정리를 다루도록 되어 있다. 평균값정리는 롤의 정리를 이용하여 도입하고 "함수의 그래프를 이용하여 나타내고 그 정리가 성립함을 이해"(교육과학기술부, 2011)하는 정도로 다루도록 제시되어 있다. 학생들이 평균값정리를 통합적으로 이해하기 위해서는 평균값정리가 무엇인지를 대수적, 기하적 표현으로 나타내고 설명할 수 있으며, 평균값정리가 구간단속의 원리가 됨을 알아야 한다. 또한 평균값정리가 성립하는 이유를 롤의 정리와 관련하여 설명할 수 있어야 한다. 또한, 평균값정리를 이용하여 도함수 f'으로부터 함수 f의 성질을 추론할 수 있다([그림Ⅱ-4]). 이러한 학교수학의 내용과 과정은 평균값정리와 관련된 수학교사의 MCK에 포함된다.

한편, 학교수학에서 평균값정리의 설명에서는 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$를 만족하는 점 $c\in(a,b)$의 존재성만 보장해 줄 뿐, 그 값이 구체적으로 무엇인지는 말해주지 않는다(정상권, 2004). 이 정리를 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$로 나타낼 수 있으므로, 부등식

$$|f(b)-f(a)|\le|f'(c)||(b-a)|$$

이 성립하며 이 부등식으로부터 두 함숫값의 차이를 알 수 있다(정상권, 2004, 348쪽). 즉, 평균값의 정리는 두 함수의 차를 구하는데 중요한 역할을 한다. 미분의 평균값정리와 마찬가지로 적분의 평균값정리가 존재한다. 학교수학에서 적분의 평균값정리를 다루고 있지 않지만 교사는 이를 알고 있어야 하며 미분의 평균값정리와 적분

---

5) f가 구간 $I(\ni c)$에서 정의된다고 하자. (i) f가 c에서 미분가능하다. (ii) c에서 연속이고 다음을 만족하는 $I(\ni x)$에서의 함수 φ가 존재한다. $f(x)-f(c)=\varphi(x)(x-c)$이고 $\varphi(c)=f'(c)$ 이 때, (i) $\Leftrightarrow$ (ii). 여기서 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} & (x\neq c)\\ f'(c) & (x=c)\end{cases}$임을 알 수 있다(Bartle와 Sherbert, 2000).

6) 모든 $x\in V\cap I$에 대하여 $f(x)\le f(c)$[또는 $f(x)\ge f(c)$]가 되는 c의 근방 $V=V_\delta(c)$가 존재하면 함수 $f:I\to R$는 $c\in I$에서 극댓값[또는 극솟값]을 갖는다고 한다(Bartle와 Sherbert, 2000).

의 평균값정리는 미적분학의 기본정리를 통해 연결되어 있음을 알아야 한다.[7] 이러한 내용을 학생들에게 직접 가르칠 필요가 있는 것은 아니지만 평균값정리가 수학내의 다른 내용과 어떻게 연결되어 있는지를 수학교사는 알 필요가 있다.

예제 2

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하며 $f'(x)=0$일 때, 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$는 상수함수임을 보여라.

풀이 $a<x\le b$인 임의의 x에 대하여 닫힌 구간 $[a, x]$에서 평균값의 정리를 적용하면

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, x) 안에 적어도 하나 존재한다.
그런데 $f'(c)=0$이므로 $f(x)-f(a)=0$에서 $f(x)=f(a)$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

[그림Ⅱ-4] 평균값정리의 활용 문제
(유희찬 외, 2010)

2009 개정 수학과 교육과정의 미적분Ⅰ의 도함수의 활용에서 접선의 방정식, 평균값정리, 극값 판정, 방정식과 부등식에의 활용, 속도와 가속도를 다루고 있다. 평균값정리와 극값 판정 문제는 앞에서 논의를 했다. 여기서는 다양한 수학외적 상황에서의 도함수의 활용에 대해 논의한다. 교과서의 도함수의 활용 문제들은 단순히 도함수를 구하는 문제가 대부분으로 도함수 또는 미분계수를 구하여 상황을 해석하는 문제는 매우 드물다. 실제 수학교사들은 다음과 같은 유형의 문제를 어려워한다(조완영, 2011). 조완영(2011)에 따르면 조사대상 43명의 교사 중 압축률을 $\beta=-\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$로 옳게 설명한 교사는 매우 드물었다. 이 문제는 '단위 부피를 기준으로', '압력에 관한 부피의 변화율', '양수로 나타낸 값'이라는 세 가지 요소를 결합하여 수학적으로 표현하는 문제이다.

<문제> 온도가 일정할 때, 단위 부피를 기준으로 압력에 관한 부피의 변화율을 양수로 나타낸 값을 압축률(β)이라고 한다. 25°C에서 표본 공기의 부피 V(m^3)와 압력 P(kilopascal) 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다고 할 때 압축률β를 정의하고 $P=50kPa$일 때의 압축률을 구하여라.

$$V=\frac{5.3}{P}$$

지금까지 논의된 내용이 교사에게 필요한 수학내용 지식의 전부는 아니다. 그렇지만 선행 연구의 결과와 연구자의 교수와 관찰 경험을 토대로 미분 영역에서 중요한 내용 요소들을 요약한 것이다. 이를 토대로 예비교사의 미분 영역 수학내용을 검사하였다(<표 Ⅲ-1> 참조).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

본 연구는 C 대학 사범대학 수학교육과 2-4학년 학생을 대상으로 교사가 알아야 할 수학내용 지식을 검사하였다. 2학년은 21명, 3학년은 14명, 4학년은 35명이 검사에 참여하였다. 3학년 학생의 경우 검사에 참여하지 않은 학생들이 있었고, 4학년 학생이 특히 많은 이유는 컴퓨터교육과 소속으로 수학교육 복수전공을 하는 학생들과 실제로는 5학년인 학생들이 포함되어 있기 때문이다. 소수의 학생들에서는 약간 차이가 있지만 2학년 학생 대부분은 수학Ⅰ·Ⅱ, 기초해석학을 수강하였고, 해석학Ⅰ은 현재 수강 중이지만 확인한 결과 미분까지는 진도를 마친 상태였다. 즉, 본 연구의 검사지 문항에 관련된 내용을 해석학에서 최근 배운 상태다. 3학년 학생들은 해석학 관련 과목을 수학Ⅰ·Ⅱ, 기초해석학, 해석학Ⅰ·Ⅱ, 미분방정식을 수강하였고, 복소해석학Ⅰ을 수강 중에 있다. 4학년은 수학Ⅰ·Ⅱ, 기초해석학, 해

7) 서울대 2010 논술문제에 출제됨

석학Ⅰ·Ⅱ, 복소해석학Ⅰ·Ⅱ, 미분방정식을 수강하였으며 현재 실해석학을 수강 중에 있다. 조사 대상 학생들은 미분과 관련이 있는 해석학 분야의 수학내용학을 4-9개 과목을 수강하였거나 수강 중에 있다.

2. 검사 문항

조완영(2011)이 제시한 수학 교사가 알아야 할 수학 내용 지식과 교육과정을 기반으로 예비교사의 수학 내용 지식을 측정하기 위한 문항을 구성하였다. 문항은 6개의 내용 영역으로 구분하였으며 모든 문항이 2-5개의 하위문항으로 구성되었다. 6개 문항 모두에 학교수학의 내용과 과정을 묻는 하위문항이 포함되어 있으며, 미분가능성(2-2), 합성함수의 미분법 증명(4-2), 평균값의 정리(5-4, 5-5)에 관한 문항에서는 학교수학과 관련된 학문적 수학 수준의 문항을 하위문항으로 구성하였다. 6번 문항은 미분을 수학내(6-3)·외적(6-1, 6-2) 상황에 응용하는 문제해결력 문제를 제시하였다. 본 검사지는 연구자가 개발하거나 선택한 것이며 해석학 전공 교수 2명과 교사 4명의 검토를 거쳐 최종 확정되었다.

1번 문항은 미분계수를 다루기 전에 접선(1-1)과 순간속도(1-2)를 정의할 수 있는지를 묻는 문항이다. 2번 문항은 1번 문항과 관련된 미분가능성의 정의를 고등학교 수준과 대학 해석학 수준에서 묻는 문항(2-1)과 도함수를 구하는 문항(2-2)으로 구성되어 있다. 특히 문항 2-2는 도함수의 정의를 아는지를 알아보고자 제시한 문항이다[8]. 미분계수의 문항은 미분계수를 통합적으로 이해하고 있는지를 측정하고자 하는 의도로 구성하였다. 미분계수의 통합적 이해란 역사발생적 근원 문제인 접선문제와 속도문제와 관련시켜 미분계수의 의미를 알고, 대수적, 기하적 표현으로 설명할 수 있으며, 미분계수의 활용을 통합적으로 이해하는 것을 의미한다.

3번 문항은 도함수의 그래프를 보고 원함수의 그래프의 개형을 그리는 문항(3-1), 극값에 관한 문항(3-2), 위로 오목인 구간을 구하는 문항(3-3)으로 구성되었다(Stewart, 2008 참조). 이 문항은 학교수학의 내용과 과정에 관한 지식을 측정하기 위한 문항이다. 제시된 f'의 그래프는 $x=6$에서 미분불가능이고 이에 대한 학생들의 해석을 관찰하고자 하였다. 특히 문항 3-3은 주어진 f'의 그래프를 보고 f''에 관한 정보를 파악한 후 다시 함수 f이 위로 오목인 구간을 찾는 문제로 그래프 해석을 묻는 문항이다.

4번 문항은 합성함수의 미분법을 증명하는 문제로 고등학교 수준(4-1)과 대학 수준(4-2)에서의 증명을 요구하였다. 증명 능력과 더불어 $x \to c$일 때,

$$\frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c}=\frac{g(f(x))-g(f(c))}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

의 값을 구하는 과정에서 $f(x)-f(c)=0$이 될 수도 있다는 점을 어떻게 고려하고 있는지를 측정하고자 하였다.

5번 문항은 미분의 평균값정리에 관한 문항으로 평균값정리의 내용과 기하학적 의미를 묻는 문항(5-1), 미분의 평균값정리가 구간 과속 단속을 어떻게 설명하는지를 묻는 문항(5-2), $f'(x)=0$이면 상수함수임을 증명하는 문항(5-3)(유희찬 외, 2009 참조), 미분의 평균값정리와 적분의 평균값정리 사이의 관계(5-4), 미분의 평균값정리의 수학 내 활용 예에 관한 문항(5-5)로 구성되었다. 특히 5-2문항은 평균값정리의 실세계 활용 능력을 측정하는 문제이고 5-3은 미적분학의 기본 정리를 이용하여 미분의 평균값정리와 적분의 평균값정리의 관계를 묻는 문항이다. 특히 5-5 문항은 평균값정리의 수학 내 활용 예를 제시하는 문항으로 학문적 수학의 범주에 포

8) 검사문항의 구체적인 내용은 Ⅵ. 결과 분석 및 논의에서 제시한다.

함된다. 평균값정리에 관한 이러한 문항 구성은 평균값정리의 통합적 이해와 관련된다. 평균값정리를 통합적으로 이해한다는 것은 평균값정리가 무엇인지를 알고 이를 대수적, 기하적 표현으로 설명할 수 있으며, 수학 내외의 상황에서 어떻게 활용되는지를 동시에 이해하는 것을 의미한다.

6번 문항은 도함수의 활용에 관한 문제이다. 6-1은 선형밀도를 구하는 문제로 어느 한 점에서의 선형밀도가 평균 선형밀도의 극한임을 해석할 수 있어야 해결할 수 있는 문제이다(Stewart, 2008 참조). 6-2와 6-3은 교과서나 익힘책 등에서 볼 수 있는 문제로 6-3은 수학외적 문제이고 6-3은 수학내적 문제로 공통접선을 구하는 문제이다. 검사 문항을 요약하면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

3. 자료수집 및 분석방법

본 연구는 조완영(2011)이 제시한 수학 교사가 알아야 할 수학 내용 지식을 기반으로 검사지를 개발하여 예비교사들의 미분영역 내용 지식을 조사한 연구이다.

선행연구를 바탕으로 교사의 수학 내용 지식을 개념화하였으며 이를 근거로 미분영역에 관한 예비교사의 수학내용 지식을 조사하기 위한

<표 Ⅲ-1> 미분 영역의 수학내용 지식

내용요소	문항		학교수학		학문적 수학
			내용	과정	
미분계수의 통합적 이해	1	1-1	○	문제해결 표현과 의사소통	
		1-2			
미분가능성	2	2-1	○	추론과 증명 표현과 의사소통	○
		2-2	○		
함수와 도함수의 그래프 관계	3	3-1	○	표현과 의사소통	
		3-2			
		3-3			
미분법	4	4-1	○	추론과 증명	
		4-2		추론과 증명	○
평균값정리	5	5-1	○	표현과 의사소통	
		5-2	○	문제해결	
		5-3	○	추론과 증명	
		5-4		추론과 증명	○
		5-5			○
도함수의 활용	6	6-1	○	수학외적 문제해결	
		6-2			
		6-3	○	수학내 문제	

검사지를 개발하였다. 2012년 5월 예비교사 70명을 대상으로 검사를 실시하여 70명 전원의 자료를 수집하였다.

검사지 분석은 반응 유형별 빈도수를 중심으로 각 문항에 대한 반응을 분석하였으며 필요한 경우 백분율을 제시하였다. 검사지는 3명이 공동으로 분석하였으며 해석이 다른 경우는 논의를 통해 합의하여 처리하였다. 정답률과 더불어 특이한 반응 유형에 대한 분석이 동시에 이루어졌다

Ⅳ. 결과분석 및 논의

1-1과 1-2는 미분계수를 정의하기 전에 접선과 순간속도를 정의할 수 있는지를, 2-1은 고등학교 수준과 대학 수준에서 미분가능성의 의미를 아는지를 조사하였다. 2-2는 도함수의 정의 능력을 측정하는 문제이다. 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기와 순간속도는 본질적으로 그 점에서의 미분계수이다. 문항1과 문항2는 미분계수의 통합적 이해라는 측면에서 분석하였다.

<문항 1>

1. 미분 개념은 접선 문제와 속도 문제로부터 시작되었다. **미분계수를 배우지 않았다는 가정 하**에 다음을 정의하시오.

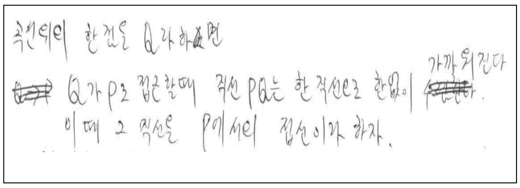
1-1. 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $P(1,1)$에서 곡선에 그은 접선

1-2. 여의도에 있는 63빌딩 옥상에서 농구공을 떨어뜨린다고 할 때, $t=5$에서의 순간속도 (t초 후의 낙하거리를 $s(t)$라 하면 갈릴레오의 법칙은 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$으로 나타낼 수 있다. 공기저항은 무시하며 비례상수는 중력가속도 $g=9.8m/s^2$이다.)

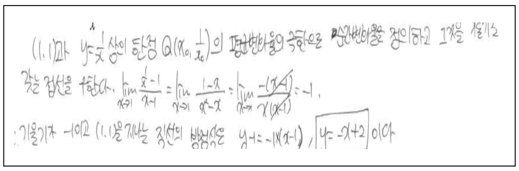
1-1에서 접선을 할선의 극한으로 정의한 학생은 32명(47%)으로 나타났다(<표 Ⅳ-1>). ‘할선의 기울기의 극한을 기울기로 하고 그 점을 지나는 직선’이라는 표현과 유사한 표현을 사용한 경우는 모두 14명이었는데 이 중에는 직관적인 표현을 사용한 학생도 있었다([그림 Ⅳ-1]). 기울기 $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$을 구하여 접선의 방정식을 구한 학생은 19명으로 나타났다([그림 Ⅳ-2]). 부적절한 접선의 정의를 제시하거나 무응답 또는 오류는 모두 39명(53%)으로 나타났다. ‘스치며 만나는 직선’이라는 미적분 수준에서는 부적절한 답을 한 학생이 14명이었으며([그림 Ⅳ-3]), 무응답 또는 오류인 학생은 25(36%)명이었다. 특히 무응답이나 오류로 분류된 학생 중 극한이나 변화율 개념이 아닌 판별식을 이용하여 접선을 정의하려고 시도한 학생도 3명이 있었다([그림 Ⅳ-4]).

<표 Ⅳ-1 > 문항 1-1에 대한 반응

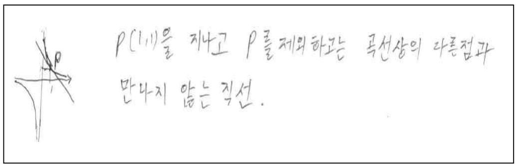
구분 / 학년	할선의 극한	$m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	스치는 직선	무응답 또는 오류	계
2	8	6	1	6	21
3	1	1	3	9	14
4	5	12	8	10	35
계	14	19	14	25	72



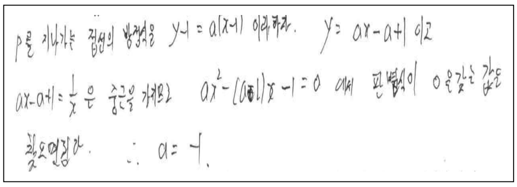
[그림 Ⅳ-1] 할선의 극한으로 설명



[그림 Ⅳ-2] 극한값을 이용하여 접선의 방정식을 구한 경우



[그림 Ⅳ-3] 스치며 지나는 직선으로 설명



[그림 Ⅳ-4] 할선의 극한을 이용하여 접선의 방정식을 구한 경우

1-2 문항에서는 순간속도를 평균속도의 극한으로 정의한 학생이 11명으로 나타났다(<표 Ⅳ-2>). 미분계수를 배우지 않았다는 가정을 제시하였음에도 불구하고 순간속도를 정의하는 대신 미분계수를 이용하여 순간속도를 구한 학생이 25명(36%)이었다. 무응답 또는 오류를 보인 학생이 34(49%)명으로 나타났다. 무응답 또는 오류의 반응 비율이 높은 것은 예비교사들이 속도문제와 접선문제로부터 미분계수를 수학화한 것이 아니라 도함수의 활용 단원에서 미분계수의 응용으로 순간속도를 학습하였기 때문으로 추정된다.

<표 Ⅳ-2 > 문항 1-2에 대한 반응

구분 / 학년	평균속도의 극한	미분계수 이용	무응답 또는 오류	계
2	5	11	5	21
3	1	4	9	14
4	5	10	20	35
계	11	25	34	70

<문항 2>

2-1. 미분가능성을 고등학교 수준과 대학의 해석학 수준으로 구분하여 정의하시오.
고등학교 수준
대학 해석학 수준

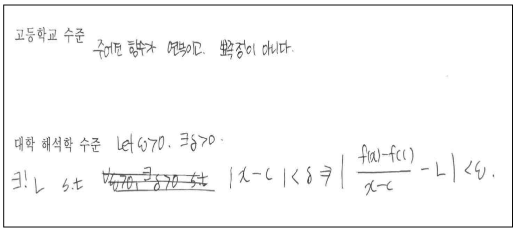
2-2. 함수 $f(x)=x|x|$의 도함수를 구하시오.

문항 2-1은 미분가능성에 대한 고등학교 수준과 대학 수준에서의 정의를 측정하기 위한 문항이다. 미분계수는 평균변화율인 비 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한값 $\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$이기 때문에 미분이 가능하냐의 문제는 본질적으로 $\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 값이 존재하느냐의 문제로 귀결된다. 따라서 미분가능성의 정의는 극한의 정의로 환원된다. 2007개정 수학과 교육과정 교수・학습 상의 유의점에서는 "미분가능성과 연속성의 관계는 그래프를 통하여 확인하게 한다."(교육과학기술부, 2009)고 제시하여 미분가능성을 그래프를 이용하여 직관적으로 탐구할 것을 권장하고 있다. 그래프를 이용한 설명도 적절한 응답에 포함시켜 분석하였다. 고등학교 수준과 대학 해석학 수준에서 미분가능성을 옳게 설명한 학생은 28명(40%)으로 나타났다. 고등학교 수준에서는 적절하게 응답했지만 해석학 수준에서는 무응답 또는 오류를 보인 학생이 14명이며 대학 해석학 수준에서만 옳게 응답한 학생은 6명이었다. 무응답 또는 오류도 22명(31%)으로 나타났다. 이러한 현상은 미분가능성이 곧 극한값 $\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 존재 문제라는 것을 인식하지 못한 데서 온 것으로 보인다. 해석학 수준에서는 극한으로, 고등학교 수준에서는 그래프에 대한 개념 이미지를 토대로 설명을 시도한 학생도 있었다([그림 Ⅳ-5]).

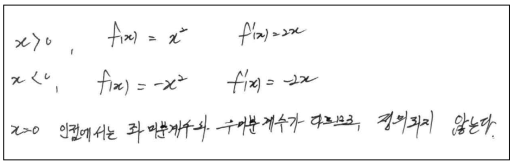
2-2에서는 56명의 학생들이 도함수를 옳게 구했다. 그러나 $x=0$에서 미분가능함에도 불구하고 $x=0$을 제외한 학생이 8명이고 무응답 또는 오류도 6명으로 나타났다. 특히 $x=0$에서 '미분불가능하기 때문에'라는 이유를 명확히 제시한 학생도 있었다([그림 Ⅳ-5]). 그러나 이 학생은 미분가능성에 대한 정의를 고등학교 수준과 대학 수준에서 정확히 기술한 것으로 볼 때 단순한 오류로 보인다.

<표 Ⅳ-3 > 문항 2-1에 대한 반응

구분 \ 학년	고등o / 해석o	고등o / 해석x	고등x / 해석o	무응답 또는 오류	계
2	4	4	5	8	21
3	5	5	0	4	14
4	19	5	1	10	35
계	28	14	6	22	70



[그림 Ⅳ-5] 미분가능성의 설명



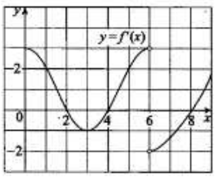
[그림 Ⅳ-6] $x=0$ 제외

문항 3은 도함수의 그래프를 해석하여 원함수의 그래프의 특징을 분석할 수 있는지를 묻는 문항이다. 2-2는 극값의 판단에 관한 문제이고 2-3은 도함수의 증가와 감소를 토대로 곡선의 오목 또는 볼록을 판단하는 문제이다.

<문항 3>

3. 다음은 도함수 $y=f'(x)$그래프이다. 물음에 답하시오.(단 $f(0)=0$)

(Stewart, 2008)



3-1. 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리시오.

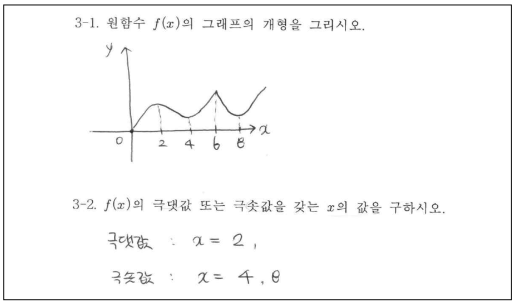
3-2. $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값을 갖는 x의 값을 구하시오.

3-3. $f(x)$가 위로오목인 구간을 구하시오.

이 문항에서 미분불능인 $x=6$에서의 그래프 해석이 분석의 초점이다. 즉 3-1에서는 $x=6$ 근방에서 그래프가 어떻게 변하는지를 해석해야 하고, 문항 3-2에서는 $x=6$에서 극값을 갖는지를 판단해야 하며 3-3에서는 위로오목을 어떻게 해석해야 할지가 중요한 검사 요소이다. 3-1에서 그래프 개형을 옳게 그린 학생은 55명(79%), 3-2에서 극값을 옳게 판정한 학생은 45명(64%)이었다. 그러나 $x=6$에서 극댓값을 갖지 않는다고 판단한 학생이 19명(27%)이었고 무응답 또는 오류를 보인 학생도 6명이었다(<표 Ⅳ-4>). 19명 중에는

<표 Ⅳ-4 > 문항 3-2에 대한 반응

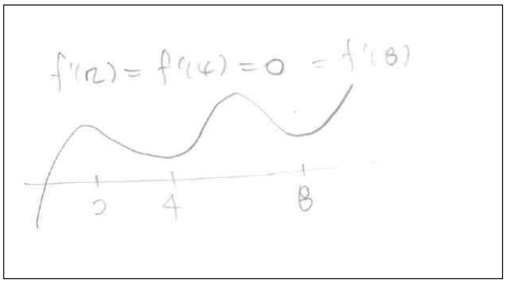
구분 \ 학년	정답	x=6 제외	무응답 또는 오류	계
2	12	7	2	21
3	9	5	0	14
4	24	7	4	35
계	45	19	6	70



[그림 Ⅳ-7] $x=6$에서 A 학생의 극값 판단사례

3-1 문항에서 그래프를 옳게 그렸음에도 불구하고 $x=6$에서 극댓값을 갖지 않는다고 판단한 학생이 대부분이었다. A 학생의 경우 그래프의 개형은 옳게 그렸지만 $x=6$에서 극댓값을 갖는다

는 것을 기술하지 않았다([그림 Ⅳ-7]). 이 학생의 검사지에 나타난 풀이 과정을 보면 첨 점에서의 극값을 고려하지 않고 있음을 추정할 수 있다. 이 학생은 미분계수가 0인 점에서 극값을 갖는다고 생각한 것으로 보인다([그림 Ⅳ-8]).



[그림 Ⅳ-8] A 학생의 풀이과정

<표 Ⅳ-5> 문항 3-3에 대한 반응

구분 / 학년	3<x<6, x>6	$(3,\infty)$	무응답 또는 오류	계
2	1	4	16	21
3	1	1	12	14
4	6	4	25	35
계	8	9	53	70

3-3은 도함수의 그래프를 보고 위로오목인 구간을 찾는 문제이다. 그래프가 위로오목인 경우는 접선의 기울기가 증가하는 경우 즉 도함수가 증가함수인 경우이고 이것은 이계도함수가 양이 됨을 의미한다. 위로 오목에서 아래로 오목으로 바뀌는 점을 변곡점이라고 한다. 어떤 점이 변곡점이면 그 점에서 $f''=0$가 된다. 이 문제에서 $f''(3)=0$이다. 또한 $3<x<6, 6<x<\infty$에서 $f'(x)>0$이기 때문에 이 구간이 위로 오목인 구간이 된다. $x=6$에서는 오목, 볼록을 판정하지 않는다. 3-3의 경우 53명(76%)의 예비교사들이 무응답 또는 오류를 보였다. 오목인 구간을 찾기는 했지만 $x=6$을 제외시키지 않은 예비교사도 9명이었다. 결국 위로 오목인 구간을 정확하게 답한 예비교사는 8명(11%)에 불과했다(<표 Ⅳ-5>). 학교수학의 수준에서 그리 어려운 문제가 아니지만 도함수의 그래프를 해석하는 활동 경험이 부족한데서 비롯된 것으로 보인다. 오류를 보인 학생 중 위로 오목인 구간을 $x=2$부터라고 응답한 학생이 16명이나 되었는데 이는 f''에 대한 정보를 이용하여 변곡점을 구하지 않고 그래프의 개형을 보고 직관적으로 판단했기 때문인 것으로 해석된다([그림 Ⅳ-9]).

3-3. $f(x)$가 위로오목인 구간을 구하시오.

$2\leq x<6$, $6<x$

[그림 Ⅳ-9] $x=2$부터라고 답한 사례

<문항 4>

4. 다음은 어느 교과서에 제시된 합성함수의 미분법이다. 물음에 답하시오(유희찬 외 2009).

합성함수의 미분법 익힘책 p.124

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

4-1. 고등학교 수준에서 합성함수의 미분법이 유도되는 과정을 설명하시오.

4-2. 해석학 수준에서 합성함수의 미분법을 증명하시오. 필요하면 Caratheodory의 정리를 이용하시오. 이 경우 Caratheodory의 정리를 이용하는 이유를 간단히 기술하시오.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$ $(\Delta u\neq 0)$

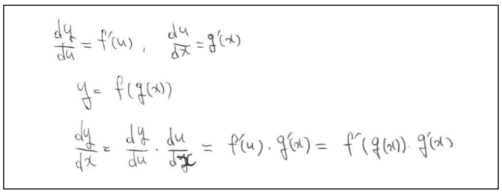
$\Delta x\to 0$ 이면 $\Delta u\to 0$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

[그림 Ⅳ-10] 예비교사 K($\Delta u\neq 0$을 표현)

문항4는 합성함수의 미분법을 증명하는 문제로, 고등학교 수준과 해석학 수준에서의 증명 능력을 측정하고자 하였다. 특히, 증명과정에서 $f(x)-f(c)=0$이 될 수도 있다는 것을 어떻게 처리하는지에 주목하였다. 4-1은 고등학교 수준에서 합성함수의 미분

법을 증명하는 문제이다. 증명과정에서 $\Delta u \neq 0$을 표현한 예비교사는 4학년 3명뿐이었다([그림 Ⅳ-10]). $\Delta u \neq 0$을 언급하지 않고 증명을 한 예비교사는 24



[그림 Ⅳ-11] $\Delta u \neq 0$을 언급하지 않은 경우

<표 Ⅳ-6> 문항 4-1에 대한 반응

구분 / 학년	$\Delta u \neq 0$ 표현	$\Delta u \neq 0$ 표현 없음	무응답 또는 오류	계
2	0	7	14	21
3	0	1	13	14
4	3	16	16	35
계	3	24	43	70

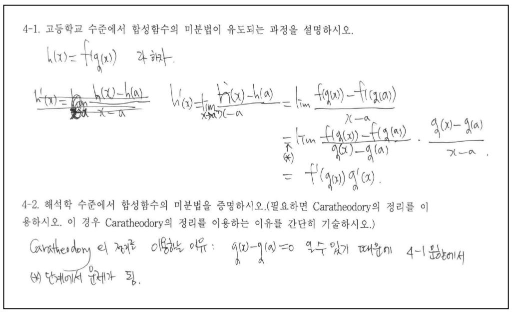
<표 Ⅳ-7> 문항 4-2에 대한 반응

구분 / 학년	$f(x)-f(c)=0$ 고려	$f(x)-f(c)=0$ 고려하지 않음	무응답 또는 오류	계
2	4	1	16	21
3	0	6	8	14
4	2	6	27	35
계	6	13	51	70

명으로 나타났다([그림 Ⅳ-11]). 무응답 또는 오류는 61%(70명 중 43명)로 나타났다(<표 Ⅳ-6>).

해석학 수준의 증명 문제인 4-2에서는 무응답 또는 오류가 73%로 4-1보다 늘어났다(<표 Ⅳ-7>). $f(x)-f(c)=0$인 경우를 고려해야 한다고 응답한 예비교사는 6명이며 이 중 2학년 4명은 증명을 하지 않고 $f(x)-f(c)=0$인 경우를 고려해야 한다고 선언한 경우이고, 4학년 2명은 4-1 문제에서 $\Delta u \neq 0$을 표현한 예비교사이다. 예비교사 L의 경우 "$f(x)-f(c)=0$일 수 있기 때문에" Caratheodory의 정리를 이용해야 한다고 기술하였다([그림 Ⅳ-12]).

예비교사 K는 고등학교 수준과 해석학 수준 모두에서 $f(x)-f(c)=0$인 경우를 고려하며 증명을 한 학생이다([그림 Ⅳ-10], [그림 Ⅳ-13]).



[그림 Ⅳ-12] 예비교사 L의 사례

[그림 Ⅳ-13] 예비교사 K의 사례

<문항 5>

5. 미분의 평균값정리에 대한 다음 물음에 답하시오.

5-1. 미분의 평균값정리를 쓰고 기하학적 의미를 설명하시오.
미분의 평균값정리
기하학적 의미

5-2. 미분의 평균값정리를 이용하여 구간단속(과속 단속의 한 가지 방법)의 원리를 예를 들어 설명하시오.

5-3. 미분의 평균값정리를 이용하여 다음 명제를 증명하시오(유희찬 외 2009).

명제: 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능하며 $f'(x)=0$이면,

f는 폐구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

5-4. 미분의 평균값정리를 이용하여 적분의 평균값정리를 유도하시오.
적분의 평균값정리:
폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 f에 대하여 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$를 만족하는 c가 a 와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

5-5. 미분의 평균값정리가 활용되는 수학적인 예를 해석학 수준에서 제시하시오.

문항 5는 평균값의 정리에 관한 문제로 다른 문제보다 하위 문항이 많다. 5-1은 평균값정리의 대수적·기하적 표현을 묻는 문제이고, 5-2는 평균값정리의 수학외적 활용문제, 5-3은 수학내적 활용 문제로 고등학교 수준의 문제이다. 5-4는 미분의 평균값정리와 적분의 평균값정리 사이의 관계를 묻는 문제이며 5-5는 해석학 수준에서 평균값정리가 수학 내에서 어떻게 활용되는지를 묻는 문제이다.

5-1에서 평균값정리를 대수적 표현과 기하적 표현을 이용하여 옳게 설명한 학생이 61%로 나타났다. 그래프 해석 없이 설명한 학생은 7명이며 그래프 해석만을 기술한 학생은 1명이었다. 어렵지 않은 문제임에도 불구하고 무응답 또는 오류도 27%(19명)로 비교적 높게 나타났다(<표 Ⅳ-8>).[9]

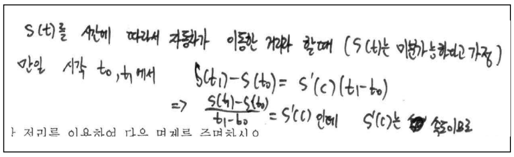
<표 Ⅳ-8 > 문항 5-1에 대한 반응

	대수 유 기하 유	대수 유 기하 무	대수 무 기하 유	무응답 또는 오류	계
2	11	4	0	6	21
3	9	2	0	3	14
4	23	1	1	10	35
계	43	7	1	19	70

5-2에서 자동차의 이동거리 s는 시간 t의 함수로 $s = f(t)$로 나타낼 수 있다. $s = f(t)$는 단속구간(닫힌구간)에서 연속이고 (열린구간에서)미분가능하기 때문에 평균값정리를 적용할 수 있다. 따라서 단속구간에서의 평균속도와 같은 순간속도를 갖는 어느 시각 t가 존재한다. 평균값정리가 적용될 수 있는 조건을 고려하는 시도를 보이며 옳게 설명한 예비교사는 3명뿐이었으며[그림 Ⅳ-14], 조건을 기술하지 않고 “평균속력과 같은 순간이 존재”한다고 설명한 학생이 33%(23명)로 나타났다. 무응답 또는 오류가 63%(44명)로 나타났다. 5-1에서 평균값정리의 내용을 이해한 것으로 해석되는 예비교사가 73%인 것과 비교하면 평균값정리의 내용을 이해한 학생 중 평균값정리가 구간단속의 원리로 어떻게 이용될 수 있는지를 이해하지 못한 학생이 많은 것으로 해석된다.

<표 Ⅳ-9> 문항 5-2에 대한 반응

구분 / 학년	조건을 고려한 설명	설명	무응답 또는 오류	계
2	1	5	15	21
3	0	5	9	14
4	2	13	20	35
계	3	23	44	70



[그림 Ⅳ-14] 예비교사 S의 사례

고등학교 수준의 평균값정리를 활용한 증명문제인 5-3에서는 69%(48명)의 예비교사가 옳게 증명하였으며 무응답 또는 오류는 31%(22명)로 나타났다. 5-4는 미적분학의 기본정리를 활용하여 미분의 평균값정리로부터 적분의 평균값정리를 유도하는 문제이다. 미분과 적분 사이의 관계를 이

9) ‘대수 유’는 대수적인 설명이 포함된 경우이고 ‘대수 무’는 대수적인 설명이 기술되지 않은 것을 의미한다. ‘기하’의 경우도 같다.

용하여 증명을 한 학생은 54%(38명), 무응답 또는 오류를 보인 학생은 46%(32)명으로 나타났다. 미분의 평균값정리로부터 적분의 평균값정리를 유도한 학생 38명 중 11명의 학생들은 이 조건을 고려하였으며[그림 Ⅳ-15], 27명의 학생은 “함수 f $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분가능 할 때”라는 미분의 평균값정리가 성립하기 위한 조건을 고려하지 않았다.

<표 Ⅳ-10> 문항 5-4에 대한 반응

구분 / 학년	조건 고려 증명	증명	무응답 또는 오류	계
2	1	5	15	21
3	0	8	6	14
4	10	14	11	35
계	11	27	32	70

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라하자.

$F(x)$는 $[a.b]$에서 연속이고 $(a.b)$에서 미분가능.

평균값정리에 의하여 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)$ 인 c가 $a.b$ 사이에 존재

그런데 $F(a)=0$. $F(b)=\int_a^b f(t)dt$ 이고 $F'(c)=f(c)$.

[그림 Ⅳ-15] 예비교사 Y의 사례

평균값정리(Mean Value Theorem)의 영어 약자는 처음 자를 따서 MVT라고도 하는데 MVT를 Most Value Theorem로 풀어 ‘최우수정리’라고 이해할 만큼 해석학에서 가장 많이 쓰이는 정리이다(정동명 · 조승제, 2004). 또한 평균값정리를 통합적으로 이해한다는 의미에서 평균값정리가 수학내외에 어떻게 이용되는지를 아는 것은 중요하다. 그렇지만 5-5문항에 대해 83%(58명)의 학생이 무응답 또는 오류로 나타났으며 17%의 학생(12명)만이 1-2가지의 예를 제시하였다.

<문항 6>

6. 미분계수는 수학뿐만 아니라 자연과학, 공학 그리고 사회과학 분야에서도 널리 응용되는 중요한 개념이다. 물음에 답하시오.(풀이과정과 답을 기술하시오)

6-1. 막대나 전깃줄이 균일한 경우에 선형밀도는 일정하며 (질량/단위길이)로 정의된다. 여기서 길이와 질량의 단위는 각각 미터와 킬로그램이다. 어떤 금속막대기가 왼쪽 끝에서 오른쪽 방향으로 $x(m)$떨어진 점까지의 질량이 $3x^2(kg)$이라 한다. $x=2(m)$인 점에서의 선형밀도를 구하시오(Stewart, 2008).

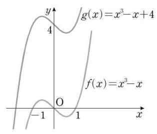
6-2. 길이 5m의 사다리가 수직인 벽면에 기대어 있다. 사다리 밑은 벽면으로부터 1m/s의 비율로 미끄러진다고 한다. 사다리의 밑이 벽에서 3m 떨어질 때 사다리의 위쪽 끝은 얼마나 빨리 벽면 아래로 미끄러지겠는가?

6-3. 다음 문제를 해결하시오(유희찬 외. 2010).

오른쪽 그림은 두 함수

$$f(x)=x^3-x,\ g(x)=x^3-x+4$$

의 그래프를 나타낸 것이다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선을 공통접선이라고 한다. 이 공통접선의 방정식을 구하여라.

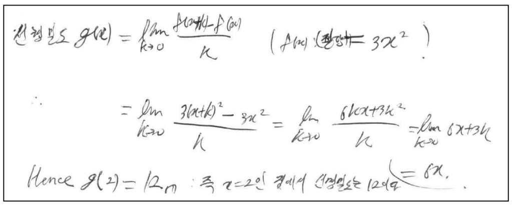


문항6은 미분을 이용한 수학 내 · 외적 상황의 문제해결 능력을 측정하기 위한 문항이다. 6-1과 6-3은 예비교사들에게 다소 생소한 문제 상황이고 6-2는 비교적 익숙한 문제 상황이다. 6-3은 수학내적 문제해결을 요구하는 문제이지만 드물게 공통접선의 방정식을 구하는 문제여서 고등학생들의 수준에서는 매우 어려운 문제이다.

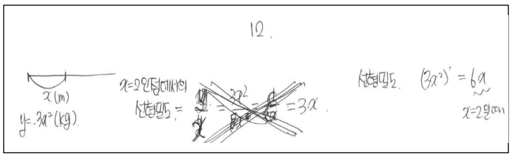
6-1에서 2m 떨어진 점에서의 선형밀도는 평균밀도 $\frac{\Delta m}{\Delta x}$의 극한으로 정의될 수 있으며, 함수 $m=3x^2$의 $x=2$에서의 미분계수와 같다. 옳게 설명한 학생이 22명(31%)으로 이 중 5명은 의미를 기술하였고[그림 Ⅳ-16], 17명의 학생들은 미분계수를 계산하였다[그림 Ⅳ-17]. 무응답 또는 오류를 보인 학생의 비율은 69%(48명)로 비교적 높게 나타났다(<표 Ⅳ-11>).

<표 Ⅳ-11> 문항 6-1에 대한 반응

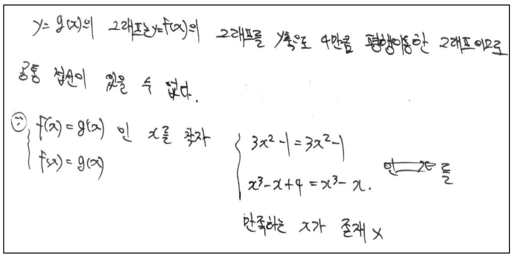
학년 \ 구분	의미+정답	정답	무응답 또는 오류	계
2	2	7	12	21
3	0	4	10	14
4	3	6	26	35
계	5	17	48	70



[그림 Ⅳ-16] 예비교사 B의 사례



[그림 Ⅳ-17] 예비교사 Y의 사례



[그림 Ⅳ-18] 예비교사 LP의 사례

6-2에서는 옳게 답한 경우가 54%(38명), 무응답 또는 오류를 보인 경우가 46%(32명)로 나타났다. 특히 정답으로 분류했지만 답을 '$\frac{3}{4}(m/s)$의 속도로 바닥을 향해 내려온다.'로 해석하지 않고 $-\frac{3}{4}(m/s)$로 기술한 학생도 있었으며, 오류 중에는 $\frac{1}{3}(m/s)$로 응답한 학생이 8명이나 되었다. 6-3은 난이도가 높지만 고등학교 익힘책에 나오는 수학 문제임에도 불구하고 옳게 해결한 학생이 29%(20)에 불과했으며 무응답 또는 오류가 71%(50명)으로 나타났으며 이 중에는 "공통접선이 존재하지 않는다."라고 응답한 학생도 있었다[그림 Ⅳ-18].

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구는 조완영(2010, 2011)이 제시한 교사의 수학내용 지식을 토대로 예비교사의 미분영역 내용 지식을 조사하는데 목적이 있다. 이를 위해 학교수학의 내용과 과정, 학교수학의 배경이 되는 해석학 내용을 고려한 검사지를 개발하여 C 대학 예비수학교사 70명을 대상으로 미분영역의 내용 지식을 조사하였다. 조사 결과는 다음과 같다.

첫째, 미분계수의 통합적 이해를 묻는 문항에서 예비교사들은 익숙한 문제인 미분가능성의 정의(2-1), 도함수 구하기(2-2)에 대해서는 옳게 반응한 비율이 각각 60%, 80%로 높게 나타났다. 그러나 미분계수를 이용하지 않고 접선과 순간속도를 정의하는 문제(1-1, 1-2)에서는 정답률이 각각 47%, 16%로 낮은 편이었다. 특히 순간속도를 정의하는 1-2에서는 문제의 의도와 다르게 미분계수로 속도를 계산한 예비교사가 36%로 비교적 높게 나타났다. 이러한 이유는 수학과 교육과정이나 교과서에서 미분계수를 먼저 정의한 후 도함수의 활용 단원에서 속도 구하는 문제를 다루고 있기 때문인 것으로 해석된다.

둘째, 도함수 그래프의 정보를 이용하여 원함수의 그래프의 개형과 극값을 해석하는 문제인 3-1, 3-2에서는 옳게 답한 비율이 각각 79%, 64%로 높게 나타났다. 그러나 $x=6$에서 극댓값을 갖지 않는다고 판단한 학생이 27%로 비교적 높게 나타났으며 $x=6$에서 연속이 아니라고 생각하거나 연속이지만 첨점이기 때문에 극값이 아니라고 판단했기 때문으로 해석된다. 위로오목을 판정하는 3-2에 대한 무응답 또는 오류의 비율이 위로

오목인 구간에 $x=6$도 포함시킨 학생들(13%)을 포함하면 89%에 달하는 것으로 나타났다. 특히 위로오목인 구간을 $x=2$부터라고 응답한 학생이 23%로 나타났는데 이 학생들은 변곡점을 고려하지 않고 그래프의 개형을 보고 직관적으로 판단했기 때문으로 보인다.

셋째, 고등학교 수준과 해석학 수준에서 합성함수의 미분법을 증명하는 4-1과 4-2에서 $f(x)-f(c)=0$ (또는 $\Delta u=0$)이 될 수 있음을 고려하여 옳게 증명한 학생은 각각 3명, 6명으로 나타났으며, 이를 고려하지 않은 경우도 타당한 증명으로 볼 경우 정답 비율은 각각 하게 증명한 학생은 47%, 27%로 나타났다. 수학을 이해할 때 왜 그런지 그 이유를 알아야 한다는 관점에서 볼 때 수학 교사교육 프로그램에서 이러한 문제점을 반영해야 할 것이다.

넷째, 평균값 정리에 관한 문항5는 5개의 하위 문항으로 구성되어 있다. 5-1은 내용과 표현, 5-3은 증명을 묻는 문제이며, 5-2는 고등학교 수준에서의 평균값정리의 활용, 5-4와 5-5는 해석학 수준에서의 활용을 묻는 문제이다. 5-1과 5-3은 정답률이 각각 61%, 69%로 나타났다. 미분의 평균값정리에서 적분의 평균값 정리를 유도하는 5-4에서는 옳게 유도한 학생의 비율은 54%였다. 그러나 고등학교 수준에서 평균값정리를 활용하는 문제인 5-2에서는 조건을 고려하지 않고 옳게 설명한 경우도 포함하여 37%, 해석학 수준에서 평균값정리가 활용되는 예를 요구하는 5-5에서는 17%의 예비교사만이 1-2가지의 예를 제시하였다.

다섯째, 미분의 활용에 관한 문제에서 6-1과 6-3은 예비교사들이 많이 경험하지 못한 문제 상황이다. 선형밀도를 구하는 6-1은 정답률이 31%, 수학내적 문제지만 공통접선의 방정식을 구하는 6-3은 정답률이 29%로 매우 낮았다. 정답률이 낮은 것은 예비교사들이 이러한 문제 상황에 대한 수학 활동 경험이 많지 않았기 때문인 것으로 해석할 수 있다. 비교적 익숙한 6-2의 정답률은 54%로 나타났다. 답을 해석하지 않고 $-\frac{3}{4}(m/s)$라고 기술한 경우도 정답에 포함시켰다.

본 연구는 고등학교 미분영역에 관한 예비교사들의 수학내용 지식을 조사하고 이를 토대로 수학 교사 교육 프로그램을 어떻게 개선할 것인지에 대한 시사점을 찾기 위한 연구이다.

조사결과를 일반화하기는 어렵지만 예비교사의 미분 영역 수학내용 지식 이해가 제한적임을 알 수 있었다. 특히 예비교사들은 미분계수를 이용하지 않고 접선과 속도를 정의하는 문제(1-1, 1-2)와 같은 익숙하지 않은 문제, 평균값정리의 활용에 관한 문제나 미분의 활용 문제에서 해석학적 수준으로 볼 때 어려운 내용이 아님에도 불구하고 정답률이 특히 낮았다는 것은 대학에서 고등학교의 미분영역과 관련된 교과목을 4-9과목을 수강했거나 수강중임으로 고려할 때 수학교사 교육 프로그램에 문제가 있음을 시사한다.

학교수학과 연결된 학문적 수학을 어떻게 이해하고 있는지를 고려한 합성함수의 미분법을 증명하는 문항(4-1, 4-2)에서 $f(x)-f(c)=0$(또는 $\Delta u=0$)을 고려하여 옳게 증명한 학생이 3명, 6명으로 나타난 것은 대학에서 수강하는 해석학 관련 강좌가 예비교사들의 학교수학 이해에 별다른 영향을 주지 못함을 시사한다. 즉 수학교사 교육 프로그램에서 학교수학과 학문적 수학 사이의 연결이 강조될 필요가 있다. 윤현경・권오남(2011)은 Ball et al. (2008)의 수학을 가르치는데 필요한 수학지식(MKT)에 기초하여 벡터 개념과 '기하와 벡터' 교과목의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 조사한 연구에서 사범대학 교육과정에서 공통내용지식(common content knowledge)을 특수내용지식(specialized content knowledge)과 내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students)으로 연결할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 주장한 바 있다. 강현영 외

(2011)도 좋은 수학수업을 위해 수학교사에게 필요한 역량과 교사교육에 대한 현직교사의 인식을 조사한 결과 “우리나라 현직 수학교사들이 대학의 수학학습을 통해 고등수학적 개념의 습득보다는 학교수학 전체를 조망할 수 있는 체계와 구조를 학습하여 학교수학과 대학수학을 연계하여 볼 수 있는 안목을 갖추기를 희망”하고 있음을 보고하였다.

미분 영역의 모든 내용을 조사한 것은 아니지만 결과 분석에 따르면 사범대학의 수학 교사교육 프로그램을 개선할 필요가 있다. 특히 예비교사들은 학교수학의 내용과 과정에 대한 통찰은 물론 학교수학의 배경 지식으로서의 학문적 수학을 경험할 기회를 충분히 가져야 할 것이다.

예비교사 또는 현직 수학교사의 다양한 내용영역에 대한 수학내용지식을 조사하는 연구가 광범위하게 이루어질 필요가 있으며, 더불어 수학 교사교육 프로그램의 개선에 대한 연구가 요구된다.

참고문헌

강현영・고은성・김태순・조완영・이경화・이동환(2011). 좋은 수학수업을 위해 수학교사에게 필요한 역량과 교사교육에 대한 현직교사의 인식조사. **학교수학, 13**(4), pp. 633-649.

교육과학기술부(2009). **교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 고등학교 교육과정 해설 5- 수학**.

박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 48**(1), 93-105.

유희찬 외(2009), **수학 Ⅱ 교과서**. 서울: 미래엔 컬처, 176(익힘책 160).

윤현경・권오남(2011). 예비교사와 현직교사의 벡터 개념에 대한 이해: MKT 중심으로. **학교수학**, 13(4), pp. 615-632.

정동명・조승제(2004). **실해석학 개론**. 서울: 경문사.

정상권(2004). **교사를 위한 해석학**. 서울: 교우사.

조선아(2010). **고등학교 2학년 미분 단원에서 교사에게 필요한 수학적 지식에 관한 연구**. 이화여자대학교 석사학위 논문.

조성민(2006). **교육과정 실행의 관점에서 본 수학교사 지식과 수업의 관련성 연구: 고등학교 함수내용을 중심으로**. 이화여자대학교 박사학위 논문.

조완영(2010). 예비교사의 수학내용 지식. **교육연구논총, 31**(2), pp. 141-156.

조완영(2011). 중등 수학교교사의 수학내용 지식. **학교수학, 13**(2), pp. 347-364.

Ball, D. L., Bass, H., Hill, C., & Phelps, M. (2006). What is special about knowing mathematics for teaching and how can it be developed? Presentation made at the Teachers' Program and Policy Council, American Federation of Teachers, Washington, DC, May 31, 2006

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), p.389-407.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 강수철(역) (2006). 실해석학개론. 서울: 범한서적주식회사.

Dewey, J. (1902). *The child and the curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, Teachers College Press.

Grossman, P. L., Wilson, S, M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher*, pp. 23-36. New York: Pergamon.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, pp. 461-494. Rotterdam: Sense Publishers.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1, 3rd ed. E. R. Hedrick & C. A. Noble, trans) New York: Macmillan.

Li, S., Huang, R., & Shin, H.(2008). Discipline knowledge preparation for prospective secondary mathematics teachers: An east perspective. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume* 1, pp. 63-86. Rotterdam: Sense Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬 외(2000). 7). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. & Ball, D. L. (2007). Assessing teacher's mathematical knowledge. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 111-155. Reston, VA: NCTM.

Boero, P. & Guala, E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers: The role of cultural analysis of the content to be thaught. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume 1*, pp. 223-244. Rotterdam: Sense Publishers.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the discipline, in I. Estbury and N. J. Wilkof (Eds). *Science, curriculum and liberal education*, 229-272. Chicago: University of Chicago.

Shulmann, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), pp.1-22.

Shulmann, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15, pp.4-14.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 157-223. Reston, VA: NCTM.

Stacey, K.(2008). Mathematics for secondary teaching: Four components of discipline knowledge for a changing teacher workplace. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume 1*, pp. 88-111. Rotterdam: Sense Publishers.

Stewart, J. (2008). *Calculus. Albert Complex*: Brooks/Cole. 수학교재편찬위원회(역)(2009). 미분적분학. 서울: 청문각.

Analysis of Prospective Teachers' Mathematical Content Knowledge about Differential area

Cho, Wan-Young (Chungbuk National University)

The purpose of the study investigate mathematics content knowledge(MCK) of prospective teachers in differential area. 70 prospective teachers were asked to perform six questions based on Cho's MCK (2010, 2011).

The results show that depending on whether they experience any teacher education program, the level of prospective teachers' mathematics content knowledge may vary. In particular, prospective teachers struggled with an unfamiliar problem situations. We also found that prospective mathematics teachers have some difficulty in solving problem about the use of mean value theorem and derivative.

* key words : prospective teacher(예비교사), MCK(mathematics content knowledge: 수학내용 지식), differential area(미분 영역)

논문접수 : 2012. 5. 8
논문수정 : 2012. 5. 30
심사완료 : 2012. 6. 8