

초기 비틀림각이 고려된 블레이드-축 통합 시스템의 동적 특성 Dynamic Characteristic of Coupled Pre-twist Blade and Shaft System

이 환 희* · 송 지 석* · 나 성 수†

Hwanhee Lee, Ji-seok Song and Sungsoo Na

(2012년 4월 24일 접수 ; 2012년 6월 11일 심사완료)

Key Words : Assumed Mode Method(모드 가정법), Lagrange Equation(라그랑지 방정식), Natural Frequency(고유진동수), Pre-twist Angle(초기 비틀림각), Rotor-blade System(로터-블레이드 시스템)

ABSTRACT

A nonlinear dynamic model for the shaft-disk-blade unit is developed in this study. In this regard, the rotating flexible blade, with a pre-twist angle, attached to a rigid disk driven by a shaft which is flexible in torsion is developed. The rotor-blade coupled model is derived using Lagrange equation in conjunction with the assumed mode method to discretize the blade deformation. The equations of motion are analyzed based on the small deformation theory for the blade and shaft torsional deformation to obtain the system natural frequencies for various system parameters.

1. 서 론

회전 외팔보 구조물들은 잠수함 프로펠러, 터빈 블레이드 그리고 헬리콥터 날개 등 수 많은 실용적인 분야에서 폭넓게 응용될 수 있기 때문에 이러한 구조물들의 진동 해석은 공학적인 측면에서 매우 중요하며 동시에 꼭 필요하다. 주로 터보 기계에서 사용되고 있는 회전 외팔보 구조물을 적합하고 안전하게 설계하기 위해서는 우선 시스템의 진동 및 동적 특성을 정확하게 알고 있어야 하며 회전 운동을 함으로써 원심방향 관성력이 발생되어 구조물의 동적 특성들이 다양하게 변화하기 때문이다. 따라서 많은 연구자들이 회전 외팔보 구조물의 설계 방법 그리고 구조물의 동적 특성을 살펴보기 위한 연구를 지속적으로 진행하고 있다.

회전 외팔보 구조물의 동적 특성 관련 연구는 Southwell과 Gough⁽¹⁾에 의해 최초로 발표 되었다.

Rayleigh 에너지방법을 기반으로 Southwell 방정식을 제안하였으며, 이를 통해 회전 외팔보 구조물의 고유진동수를 해석하였다. 이 후 Schilhansl⁽²⁾은 Rayleigh Ritz방법을 적용하여 Southwell이 제시한 고유진동수 예측을 위한 방정식보다 정확한 고유진동수를 도출하는 방법을 제시하였다. 이와 같은 연구를 통하여 1970년대 회전 외팔보 구조물의 해석을 위한 수치적인 기법들에 초점을 맞춘 많은 문헌들이 발표되었다^(3,4). 이와 같은 문헌들을 토대로 로터-블레이드 시스템에 대한 연구 또한 활발히 진행되었다. Crawley⁽⁵⁾는 블레이드-디스크-축으로 구성된 캔틸레버 터보팬을 수치적·실험적으로 비교 분석한 연구를 발표하였으며, Okabe⁽⁶⁾는 로터-블레이드 시스템에서 블레이드의 굽힘 변형과 축의 비틀림 진동현상을 살펴보는 모델링 방법에 초점을 맞춘 수치적 기법을 제시하였다. 또한 Al-bedoor^(7,8)는 로터-블레이드 시스템에서 축의 비틀림 유연성(*shaft torsional flexibility*)의 중요성을 모사시험(*simulation*)을 통해 언급하였다. 더불어 블레이드의 초기 정착각(*pre-setting angle*)을 고려하였을 때의 시스템 동적 특성을 파악한 연구를 진행하였으며, Na⁽⁹⁾는 축

† 교신저자; 정회원, 고려대학교 기계공학부
E-mail : nass@korea.ac.kr
Tel : (02)3290-3370, Fax : (02)926-9290
* 고려대학교 대학원 기계공학과

의 비틀림 현상과 블레이드의 굽힘 현상과의 연성 관계를 규명하였다.

이 연구에서는 초기 비틀림 각이 고려된 유연체 블레이드가 부착된 디스크와 이를 구동시키는 로터(모터-축)로 구성된 로터-블레이드 시스템을 소개하며 라그랑지 방정식으로부터 운동방정식을 유도하는 과정을 제시하고자 한다. 또한 보다 실제적인 로터-블레이드 시스템을 구축하기 위해 운동방정식을 도출하는데 있어 중력과 원심력에 의한 영향 등 시스템의 세부적인 요소들을 모두 고려하여 모델링하는 기법에 대해서 언급하고자 한다. 이렇게 유도된 운동방정식을 모사시험(simulation)하여 로터-블레이드 시스템의 동적인 특성들을 분석하고자 한다.

2. 로터-블레이드 시스템 : 운동방정식

2.1 시스템 모델링 및 기본가정

이 연구에서 다루는 로터-블레이드 시스템의 형상은 Fig. 1(a), (b)와 같이 초기 비틀림 각이 고려된 유연체 블레이드가 부착된 디스크와 이를 구동시키는 로터와 축으로 구성된 모델로 구성된다.

이 모델에 대한 기본적인 가정은 다음과 같다.

- (1) 디스크는 강체(rigid body)로 가정한다.
- (2) 각 방향에 대한 블레이드의 운동은 모드 가정법(assumed mode method)를 적용, 이산화하여 해석한다.

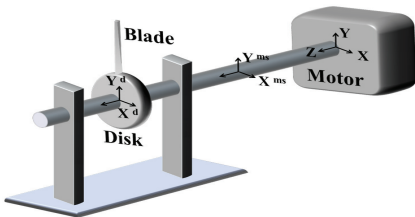


Fig. 1(a) Schematic diagram of rotor-blade system

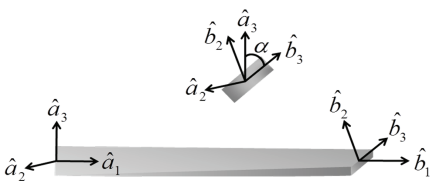


Fig. 1(b) Configuration of a pre-twist blade

(3) 축의 비틀림 변위와 블레이드의 각 방향 변위 모두 소 변위 이론(small deformation theory)을 적용한다.

이 모델의 운동방정식 유도를 위해 적용된 좌표계는 Fig. 2와 같이 로터-블레이드 시스템 축의 단면을 기준으로 설정되었다.

2.2 시스템 운동에너지

로터-블레이드 시스템의 전체 운동에너지는 모터 축의 운동에너지 T_{ms} , 디스크의 운동에너지 T_D 그리고 블레이드의 운동에너지 T_B 로 구성되어 있으며 각각의 표현은 다음과 같다.

$$T_{ms} = \frac{1}{2} J_{ms} \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$T_D = \frac{1}{2} J_D (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \quad (2)$$

$$T_B = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{R}_p^T \dot{R}_p dx \quad (3)$$

여기서 J_{ms} 와 J_D 는 모터 축과 디스크의 관성 모멘트를 나타낸다. 또한 ρ 는 블레이드의 단위길이당 질량, R_p 는 블레이드 표면상의 점 P 의 절대 위치벡터로 아래와 같이 표현된다.

$$R_p = [U(\theta)][V(\psi)]r_p^d \quad (4)$$

여기서 $[U(\theta)]$ 와 $[V(\psi)]$ 는 절대 좌표계로부터 모터 축의 좌표계와 디스크 좌표계로의 회전 좌표변환을 각각 의미하며, r_p^d 는 디스크 좌표계에서 블레이드

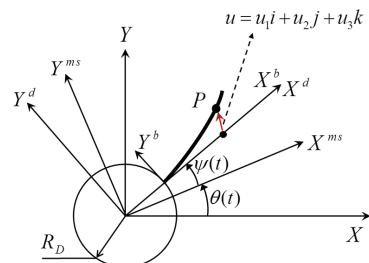


Fig. 2 Shaft cross-sectional view and coordinate system

표면상의 점 P 의 위치벡터를 나타낸다.

$$[U(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[V(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & 0 \\ \psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$r_p^d = (x + R_D + u_1(x, t))i + u_2(x, t)j + u_3(x, t)k \quad (7)$$

여기서 R_D 는 디스크 반지름, θ 는 모터 축의 회전 각 그리고 ψ 는 축의 비틀림 변형 각을 나타낸다.

절대 좌표계에서 바라본 점 P 의 위치벡터 R_p 를 토대로 속도벡터를 구하면 아래와 같이 표현된다.

$$\dot{R}_p = \begin{bmatrix} -\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta \\ \beta \cos\theta - \alpha \sin\theta \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\alpha = \dot{\theta}[\psi(x + R_D + u_1) + u_2] + \dot{\psi}u_2 + (\psi\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (9)$$

$$\beta = \dot{\theta}[(x + R_D + u_1) - \psi u_2] + \dot{\psi}(x + R_D + u_1) + (\psi\dot{u}_1 + \dot{u}_2) \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 식 (3)에 대입함으로써 블레이드의 운동에너지를 구할 수 있으며, 시스템의 전체 운동에너지 T_{total} 는 다음과 같다.

$$T_{total} = T_{ms} + T_D + T_B \quad (11)$$

2.3 시스템 포텐셜 에너지

로터-블레이드 시스템의 전체 포텐셜 에너지는 블레이드의 포텐셜 에너지 V_B , 축의 비틀림 포텐셜 에너지 V_T , 중력에 의한 포텐셜 에너지 V_g 그리고 원심력에 의한 포텐셜 에너지 V_{as} 로 구성되어 있으며, 블레이드의 포텐셜 에너지 V_B 는 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$V_B = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + EI_3 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + EI_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 + 2EI_{23} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) \right] dx \quad (12)$$

여기서 L , E 그리고 A 는 각각 블레이드의 길이, 탄성계수, 단면적을 의미하며, I_2 , I_3 은 블레이드 2차 관성모멘트, I_{23} 은 2차 면적상승모멘트(second area product of inertia)를 의미한다. 이를 주 2차 면적모멘트 I_2^* , I_3^* 로 표현하면 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$I_2(x) = \frac{I_2^* + I_3^*}{2} + \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \cos(2\Theta) \quad (13)$$

$$I_3(x) = \frac{I_2^* + I_3^*}{2} - \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \cos(2\Theta) \quad (14)$$

$$I_{23}(x) = \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \sin(2\Theta) \quad (15)$$

$$\Theta \equiv \alpha \frac{x}{L} \quad (16)$$

여기서 Θ 는 블레이드 임의의 단면에서의 비틀림 각을 의미하며, 자유단에서 $\Theta = \alpha$ 임을 알 수 있다.

다음으로 축의 비틀림 포텐셜 에너지 V_T 와 중력에 의한 포텐셜 에너지 V_g , 그리고 원심력에 의한 포텐셜 에너지 V_{as} 는 아래와 같이 표현된다.

$$V_T = \frac{1}{2} k_T \psi^2 \quad (17)$$

$$V_g = \int_0^L \rho g h dx \quad (18)$$

$$V_{as} = \int_0^L F_p d\delta \quad (19)$$

식 (18)에서 k_T 는 축의 비틀림 강성, h 는 절대좌표계에서 블레이드 표면상의 점 P 의 높이를 의미한다. 또한 식 (19)에서 F_p 는 회전운동에 의해 발생하는 블레이드 표면상의 점 P 의 관성력, $d\delta$ 는 블레이드의 굽힘 변형으로 발생하는 축 방향 길이 감소⁽¹¹⁾를 의미하며 각각의 표현은 다음과 같다.

$$h = (x + R_D + u_1) \sin\theta + (x + R_D + u_1) \psi \cos\theta + (\cos\theta - \psi \sin\theta) u_2 \quad (20)$$

$$F_p = \int_x^L \rho(x + R_D) (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 dx \quad (21)$$

$$d\delta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (22)$$

이를 통해 시스템 전체 포텐셜 에너지 V_{total} 는 아래와 같이 표현된다.

$$V_{total} = V_B + V_T + V_g + V_{as} \quad (23)$$

2.4 운동방정식 유도 : 라그랑지 방정식

시스템의 라그랑지 표현은 다음과 같다.

$$L_{Lag} = T_{total} - V_{total} \quad (24)$$

초기 비틀림 각이 고려된 유연체 블레이드의 각 방향 변위를 평가하기 위하여 블레이드를 외팔보로 가정하고 모드 가정법(assumed mode method)을 적용하였다. 따라서 블레이드 표면상의 점 P 의 각 방향으로의 변위는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_1(x, t) = \sum_{i=1}^{N_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (25)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{N_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (26)$$

$$u_3(x, t) = \sum_{i=1}^{N_3} \phi_{3i}(x) q_{3i}(t) \quad (27)$$

여기서 N_1 , N_2 과 N_3 은 모드의 수이고 $q_{1i}(t)$, $q_{2i}(t)$ 과 $q_{3i}(t)$ 는 시간의 함수로 표현되는 모달 좌표계 상의 벡터이다. 또한 $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 과 $\phi_{3i}(x)$ 는 공간의 함수로 표현되는 가정된 모드로써 직교 특성을 이용하여 다음과 같이 정규화 할 수 있다.

$$\int_0^L \rho [\phi_{ji}(x)] [\phi_{ji}(x)] dx = 1 \text{ where, } j=1,2,3 \quad (28)$$

모드 가정법을 적용하고 다음과 같이 정의되는 계수행렬(coefficient matrix)들을 적용하여 시스템의 라그랑지 표현 L_{Lag} 을 다시 정리할 수 있으며,

$$[a_1] = \int_0^L \rho x [\phi_2(x)] dx \quad (29a)$$

$$[b_1] = \int_0^L \rho [\phi_2(x)] dx \quad (29b)$$

$$[a_2] = \int_0^L \rho x [\phi_1(x)] dx \quad (29c)$$

$$[b_2] = \int_0^L \rho [\phi_1(x)] dx \quad (29d)$$

$$[k_1] = \int_0^L \rho [\phi_1'(x)]^T [\phi_1'(x)] dx \quad (29e)$$

$$[k_2] = \int_0^L \rho [\phi_2''(x)]^T [\phi_2''(x)] dx \quad (29f)$$

$$[k_3] = \int_0^L \rho [\phi_3''(x)]^T [\phi_3''(x)] dx \quad (29g)$$

$$[k_4] = \int_0^L \rho [\phi_2''(x)]^T [\phi_3''(x)] dx \quad (29h)$$

$$[k_{s1}] = \int_0^L \rho (L-x) [\phi_2'(x)]^T [\phi_2'(x)] dx \quad (29i)$$

$$[k_{s2}] = \int_0^L \rho (L^2 - x^2) [\phi_2'(x)]^T [\phi_2'(x)] dx \quad (29j)$$

$$[k_s] = R_D [k_{s1}] + \frac{1}{2} [k_{s2}] \quad (29k)$$

$$[h_1] = [a_1] + R_D [b_1] \quad (29l)$$

$$[h_2] = [a_2] + R_D [b_2] \quad (29m)$$

이를 통해 라그랑지 방정식 (30)을 계산함으로써 시스템 전체의 운동방정식을 도출할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Delta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \Delta} \right) = 0 \quad (30)$$

즉, 시스템의 일반 좌표(generalized coordinates) θ , ψ , $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_3\}$ 에 대해서 각각 라그랑지 방정식을 계산해준다면 아래와 같이 시스템의 전체 운동 방정식을 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & [m_{15}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [m_{51}] & \cdots & [m_{55}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \{\ddot{q}_2\} \\ \{\ddot{q}_1\} \\ \{\ddot{q}_3\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & [c_{15}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [c_{51}] & \cdots & [c_{55}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \{\dot{q}_2\} \\ \{\dot{q}_1\} \\ \{\dot{q}_3\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & [k_{15}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [k_{51}] & \cdots & [k_{55}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \\ \{q_2\} \\ \{q_1\} \\ \{q_3\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \{Q_3\} \\ \{Q_4\} \\ \{Q_5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \{f_3\} \\ \{f_4\} \\ \{f_5\} \end{bmatrix} \quad (31)$$

라그랑지 방정식으로부터 유도된 운동방정식에서 시스템의 일반 좌표 $\theta, \psi, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}$ 에 대한 2계 미분항을 정리하면 시스템 질량 행렬을 구할 수 있으며, 각각의 성분은 다음과 같다.

$$m_{11} = J_{ms} + J_D + J_B(1 + \psi^2) + \{q_2\}^T(1 + \psi^2)[I]\{q_2\} + \{q_1\}^T(1 + \psi^2)[I]\{q_1\} + 2[h_2]\{q_1\} + 2\psi^2[h_2]\{q_1\} \quad (32a)$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{22} = J_D + J_B + \{q_2\}^T[I]\{q_2\} + \{q_1\}^T[I]\{q_1\} + 2[h_2]\{q_1\} \quad (32b)$$

$$[m_{13}] = [m_{31}]^T = (1 + \psi^2)[h_1] + (1 + \psi^2)\{q_1\}^T[I] \quad (32c)$$

$$[m_{14}] = [m_{41}]^T = -(1 + \psi^2)\{q_2\}^T[I] \quad (32d)$$

$$[m_{23}] = [m_{32}]^T = [h_1] + \psi\{q_2\}^T[I] + \{q_1\}^T[I] \quad (32e)$$

$$[m_{24}] = [m_{42}]^T = -\{q_2\}^T[I] + \psi[h_2] + \psi\{q_1\}^T[I] \quad (32f)$$

$$[m_{33}] = [m_{44}] = (1 + \psi^2)[I] \quad (32g)$$

$$[m_{55}] = [I] \quad (32h)$$

여기서 J_B 는 블레이드의 관성모멘트를 의미하며 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$J_B = \int_0^L \rho(x + R_D)^2 dx \quad (33)$$

식 (32a~h)을 살펴보면 질량 행렬은 로터-블레이드 시스템의 자유도들이 서로 연성(coupled)된 비선형 함수로 구성되어 있는 것을 알 수 있다. 예를 들면 질량 행렬 중 시스템 회전 성분을 의미하는 m_{11} 같은 경우, 축의 비틀림 변형 각 ψ 과 블레이드의 길이방향 변형 $\{q_1\}$ 그리고 굽힘방향 변형 $\{q_2\}$ 항들이 서로 연성된 비선형 함수로 구성되어 있는 것을 알 수 있다. 또한 1계 미분항을 정리하면 시스템의 감쇠행렬을 구성할 수 있으며, 이 역시 연성효과가 일어나고 있음을 식 (34a~e)를 통해 알 수 있다.

$$c_{11} = 2\psi\dot{\psi}(J_B + \{q_{2i}\}^T[I]\{q_{2i}\} + \{q_{1i}\}^T[I]\{q_{1i}\}) + 2(1 + \psi^2)\{q_2\}^T[I]\{\dot{q}_2\} + 2(1 + \psi^2)\{q_1\}^T[I]\{\dot{q}_1\} + 2[h_2]\{\dot{q}_1\} + 2\psi^2[h_2]\{\dot{q}_1\} + 4\psi\dot{\psi}[h_2]\{q_1\} \quad (34a)$$

$$c_{12} = c_{21} = 2\{q_2\}^T[I]\{\dot{q}_2\} - 2\psi\{\dot{q}_1\}^T[I]\{q_2\} + 2\psi\{q_1\}^T[I]\{\dot{q}_2\} + 2[h_2]\{\dot{q}_1\} \quad (34b)$$

$$[c_{13}] = [c_{31}]^T = 2\psi\dot{\psi}[h_1] \quad (34c)$$

$$c_{22} = 2\{q_{2i}\}^T[I]\{\dot{q}_{2i}\} + 2\{\dot{q}_{1i}\}^T[I]\{q_{1i}\} + 2[h_2]\{\dot{q}_{1i}\} \quad (34d)$$

$$[c_{33}] = 2\psi\dot{\psi}[I] \quad (34e)$$

마찬가지 방식으로 강성행렬의 성분은 식 (35a~e)과 같이 나타낼 수 있으며, 나머지 성분들의 값은 모두 0임을 확인하였다. 이는 라그랑지 방정식 계산 시 각 성분들에 해당되는 항이 없기 때문이다.

$$k_{22} = k_T - \dot{\theta}^2(J_B + \{q_2\}^T[I]\{q_2\} + \{q_1\}^T[I]\{q_1\}) - 2\dot{\theta}[h_1]\{\dot{q}_2\} - 2\dot{\theta}^2[h_2]\{q_1\} \quad (35a)$$

$$[k_{33}] = \frac{EI_3}{\rho}[k_2] + (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2[[k_3] - [I]] + (\psi^2 - \psi^2\dot{\theta}^2)[I] \quad (35b)$$

$$[k_{35}] = [k_{53}] = \frac{EI_{23}}{\rho}[k_4] \quad (35c)$$

$$[k_{44}] = \frac{EA}{\rho}[k_1] \quad (35d)$$

$$[k_{55}] = \frac{EI_2}{\rho}[k_5] \quad (35e)$$

이를 통해 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬의 성분들은 모두 대칭적(symmetric)임을 알 수 있다.

끝으로 Q 행렬은 속도의 2차 항, 코리올리 가속도, 그리고 중력의 영향으로부터 발생된 관성력을 나타내는 행렬이며 각각의 성분은 식 (36a~d)과 같다.

$$Q_1 = \frac{\rho g}{2}(\cos\theta + \psi \sin\theta)(L^2 + 2LR_D) - g[b_1]\{q_2\}(\psi \cos\theta + \sin\theta) \quad (36a)$$

$$Q_2 = \frac{\rho g \cos\theta}{2}(L^2 + 2LR_D) - g[b_1]\{q_2\} \sin\theta + 2\dot{\theta}\{\dot{q}_1\}^T[I]\{q_1\} \quad (36b)$$

$$\{Q_3\} = g[b_1]^T(\cos\theta - \psi \sin\theta) + 2\psi\dot{\psi}\dot{\theta}[I]\{q_1\} + 2\dot{\theta}(1 + \psi^2)[I]\{\dot{q}_1\} + 2\dot{\psi}[I]\{\dot{q}_1\} \quad (36c)$$

$$\begin{aligned} \{Q_4\} &= 2\psi\dot{\psi}\dot{\theta}[I]\{q_2\} - 2\dot{\theta}(1+\psi^2)[I]\{\dot{q}_2\} \\ &- (\dot{\theta}^2 + \psi^2\dot{\theta}^2)[I]\{q_1\} - \dot{\theta}^2(1+\psi^2)[h_2]^T \\ &+ 2\psi\dot{\psi}[I]\{\dot{q}_1\} + 2\dot{\psi}\dot{\theta}[I]\{q_1\} \end{aligned} \quad (36d)$$

3. 수치해석 및 결과

이 연구에서 모델링한 로터-블레이드 시스템의 기하학적 치수와 물성치는 Table 1에 기술하였으며, 모드 가정법을 적용하여 이산화된 블레이드 변위의 5개 모드들을 기반으로 각각의 모드형상과 계수행렬을 계산하였다. Table 2는 논문에서 다루는 모델의 신뢰성을 검증하기 위해 Al-bedoor⁽¹⁰⁾ 모사시험 조건을 기반으로 비연성(uncoupled)된 축 비틀림 및 블레이드 굽힘 모드 고유진동수를 나타낸 결과물이다.

이를 통해 축의 비틀림 고유진동수 ω_s 와 블레이드의 굽힘 모드 고유진동수 ω_b 를 살펴보기 위하여 시스템 비선형 운동방정식 (31) 중 감쇠행렬과 축의 비틀림 및 블레이드 변위 관련 고차 항들을 배제하여 선형화시킨 운동방정식으로부터 축의 비틀림 및 블레이드 굽힘 모드 고유진동수를 도출하였다.

이는 모델링 기본가정 중 축의 비틀림 및 블레이드 변위 모두 소 변위 이론(small deformation theory)이 적용되었기 때문에 가능하며, 이 같은 방법을 이용하여 Al-bedoor⁽⁸⁾는 유한요소 해석법과 비교 시 시스템의 고유진동수가 거의 일치한다는 문헌을 발표하였다. 이 결과 해석의 용이함을 위해 선형화시킨 시스템의 운동방정식으로 로터-블레이드 시스템의 주요 파라미터 변화에 따른 축의 비틀림 및 블레이드 굽힘 모드 고유진동수를 살펴보았다.

Fig. 3은 회전속도 $\dot{\theta}$ 변화에 의한 초기 비틀림 각

이 고려된 블레이드의 첫 번째 굽힘 모드 고유진동수 ω_{b1} 를 살펴본 결과이다. 이 결과를 통해 회전속도가 증가하면 블레이드의 첫 번째 굽힘 모드 고유진동수 값이 커진다는 것을 알 수 있다. 이는 회전에 의해 생긴 원심력으로 인하여 구조강성이 증가하기 때문이며, 회전속도가 증가함에 따라 고유진동수가 증가하는 것을 간명하게 보여주는 캠벨(Campbell) 방정식 및 캠벨 선도로 설명된다. 또한 디스크의 반지름 R_D , 회전속도 $\dot{\theta}$, 그리고 디스크에 장착된 블레이드의 초기 비틀림각 α 이 시스템에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 회전속도가 각각 50 rad/s, 100 rad/s, 150 rad/s일 때 축의 비틀림 및 블레이드의 굽힘 모드 고유진동수를 분석한 결과를 Figs. 4, 5에 제시하였다. Fig. 4를 통해 축의 비틀림 고유진동수 ω_s 는 디스크 반지름 값의 증가에 대해 연화효과(softening effect)를 보이는 것을 알 수 있으며, 회전속도가 빠를수록 축의 비틀림 고유진동수의 값은 상대적으로 작아지는 것을 알 수 있다. 또한 블레이드의 초기 비틀림 각은 축의 비틀림 고유진동수에 영향을 미치지 않는 것도 알 수 있다. 이와 같은 현상은 축의 비틀림 강성 성분 중 $k_T - \dot{\theta}^2 J_B$ 를 통해 설명된다. 즉, 디스크의 반지름 값이 커질수록 블레이드의 관성모멘트 J_B 값이 커지고, 회전속도가 빠를수록 $\dot{\theta}^2$ 값이 커지므로 Fig. 4와 같은 결과를 얻은 것이다. Fig. 5를 살펴보면, 초기 비틀림 각이 고려된 블레이드의 첫 번째 굽힘 모드 고유진동수가 디스크 반지름 값이 증가함에 따라 경화효과(stiffening effect)를 보이는 것을 알 수 있다. 이 논문에는 삽입하지 않았으나 초기 비틀림 각이 고려되지 않은 블레이드 같은 경우 역시 이와 같은 경향성을 보이지만, 그 값은 비틀림이 고려된 블레이드와 비교 시 작은 값을 가진다는 것을 알

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_{ms} + J_D + J_B & J_D + J_B & [h_1] & 0 & 0 \\ & J_D + J_B & [h_2] & 0 & 0 \\ & & [I] & 0 & 0 \\ & & & [I] & 0 \\ symmetric & & & & [I] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_T - \dot{\theta}^2 J_B & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{EI_3}{\rho} [k_2] + \dot{\theta}^2 [[k_s] - [I]] & 0 & \frac{EI_{23}}{\rho} [k_4] \\ & & & \frac{EA}{\rho} [k_1] & 0 \\ symmetric & & & & \frac{EI_2}{\rho} [k_3] \end{bmatrix} \quad (37a,b)$$

수 있었다. 이는 초기 비틀림 각이 고려된 블레이드는 비틀림 각이 고려되지 않은 블레이드 보다 2차 관성모멘트 값이 더 크기 때문에 이와 같은 결과물을 도출한 것이며, 이 역시도 Putter와 Manor⁽⁴⁾ 및 Al-bedoor⁽⁸⁾ 등에 수록된 결과들과 동일한 경향임을 확인하였다. Fig. 6, Fig. 7은 비틀림 강성 k_t , 회전속도 $\dot{\theta}$ 그리고 초기 비틀림 각 α 의 변화에 따른 시스템의 고유진동수를 제시한 결과이다. 이를 통해 축의 비틀림 강성은 축의 비틀림 고유진동수에는 영향을 미치지만 블레이드의 굽힘 모드 고유진동수

에는 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다. 또한 회전 속도와 초기 비틀림 각의 영향으로 시스템 고유진동수 값이 차이 나는 것을 확인하였다. 이 연구 결과의 경향은 Putter와 Manor⁽⁴⁾ 및 Al-bedoor⁽⁸⁾에 제시된 결과물들과 비교 시 매우 유사한 경향성을 보인다는 것을 확인할 수 있다.

Table 1 Rotor-blade system data

List	Character	Value
Modulus of elasticity(Al)	E	68.0 Gpa
Length of blade	L	0.4 m
Mass per unit length of blade	ρ	1.35 kg/m
Disk radius	R_D	0.05 m
Torsional stiffness	k_T	8283 Nm/rad
Disk moment of inertia	J_D	3.94×10^{-3} kg
Motor-side shaft moment of inertia	J_{ms}	1.257×10^{-4} kg

Table 2 Uncoupled shaft torsional and blade bending mode frequencies

	Shaft torsional frequency (rad/s)	Bending mode frequency (rad/s)				
		1st mode	2nd mode	3rd mode	4th mode	5th mode
Present	491.42	163.14	1025.9	2873.6	5631.6	9309.5
Ref.[10]	491.35	163.36	1026.0	2874.1	5632.1	9305.4

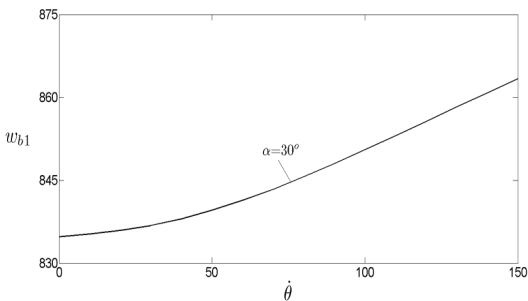


Fig. 3 Variation of the first blade bending mode natural frequency versus rotational speeds

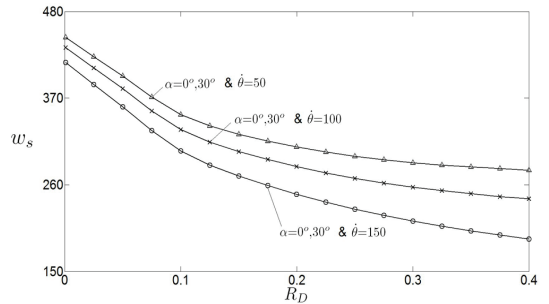


Fig. 4 Variation of the shaft torsional natural frequency versus disk radius for selected rotational speeds and blade pre-twist angle

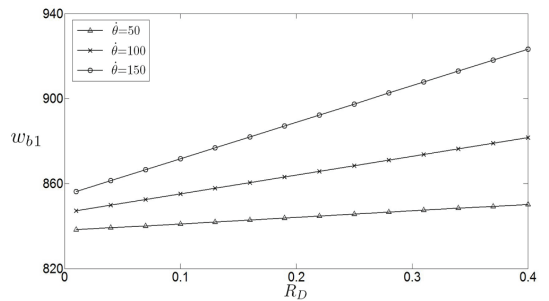


Fig. 5 Variation of the first blade bending mode natural frequency versus disk radius for selected rotational speeds with pre-twist angle($\alpha = 30^\circ$)

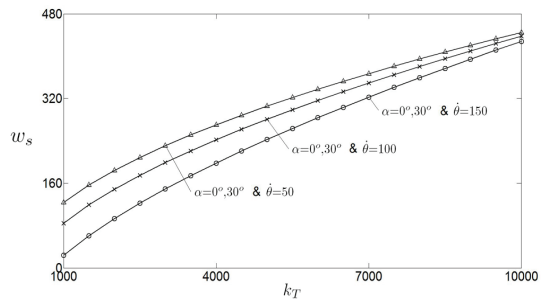


Fig. 6 Variation of the shaft torsional natural frequency versus torsional stiffness for selected rotational speeds

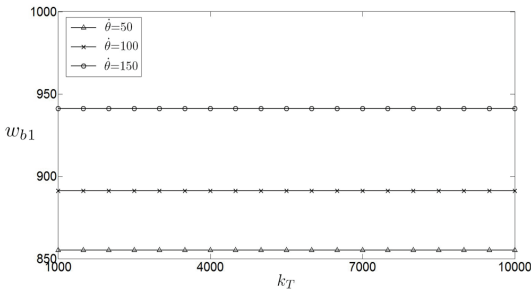


Fig. 7 Variation of the first blade bending mode natural frequency versus torsional stiffness for selected rotational speeds with pre-twist angle ($\alpha=30^\circ$)

4. 결 론

이 논문에서는 회전에 의한 구동축의 비틀림과 초기 비틀림 각이 고려된 블레이드 각 방향 변위간의 연성효과가 고려된 로터-블레이드 시스템을 모델링 한 후 동적 특성을 규명하였다. 시스템 모델에 대하여 라그랑지 방정식을 적용하여 운동방정식을 유도하였으며 모드가정법을 통해 각각의 모드형상을 구하였다. 이 같은 과정으로 로터-블레이드 시스템의 비선형 운동방정식을 도출하였으며, 소 변위 이론을 기반으로 선형화시킨 운동방정식을 통해 시스템의 주요한 파라미터 변화에 따른 축의 비틀림 및 블레이드의 굽힘 모드 고유진동수를 모사시험한 후 시스템의 동적인 특성들에 대해 고찰하였다. 이를 통해 시스템의 고유진동수를 수치적으로 측정 및 예측할 수 있는 기법을 제시하였다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2012-0000785)

참 고 문 헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades, British A.R.C. Reports and Memoranda, No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, Bending Frequency of a

Rotating Cantilever Beam, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 28~30.

(3) Pruehli, D., 1972, Natural Bending Frequency Comparable to Rotational Frequency in Rotating Cantilever Beam, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 602~604.

(4) Putter, S. and Manor, H., 1978, Natural Frequencies of Radial Rotating Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 56, pp. 175~185.

(5) Crawley, E. F., Ducharme, E. H. and Mokadam, D. R., 1986, Analytical and Experimental Investigation of the Coupled Bladed Disk Shaft Whirl of a Cantilevered Turbo Fan, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 108, pp. 567~576.

(6) Okabe, A., Otawara, Y., Kaneko, R., Matsushita, O. and Namura, K., 1991, An Equivalent Reduced Modeling Method and Its Application to Shaft-blade Coupled Torsional Vibration Analysis of a Turbine-generator Set, Proceedings of Institute of Mechanical Engineers, Vol. 205, pp. 173~181.

(7) Al-Bedoor, B. O., 1999, Dynamic Model of Coupled Shaft Torsional and Blade Bending Deformations in Totors, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 169, pp. 177~190.

(8) Al-Bedoor, B. O., 2007, Natural Frequencies of Coupled Blade-bending and Shaft-torsional Vibrations, Shock and Vibration Journal, Vol. 14, pp. 65~80.

(9) Na, S. S., Oh, B. Y., Lee, S. S., Yoon, H. W. and Cha, S. J., 2005, A Study on the Coupled Shaft-torsional and Blade-bending Vibrations in the Flexible Rotor-coupling-blade System, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 9, pp. 1023~1029.

(10) Yoo, H. H., 2001, Vibration Analysis of Rotating Pre-twisted Blades, Computers & Structures, 79, pp. 1811~1819.

(11) Al-Bedoor, B. O., 2001, Reduced-order Non-linear Dynamic Model of Coupled Shaft-torsional and Blade-bending Vibrations in Rotor, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 123, pp. 82~88.