

Lyapunov 안정성을 이용한 구동장치의 강인 최단시간 제어기 설계

Robust Near Time-optimal Controller Design for a Driving System Using Lyapunov Stability

이 성 우*·송 오 섭†

Seongwoo Lee and Ohseop Song

(2012년 4월 3일 접수 ; 2012년 6월 21일 심사완료)

Key Words : Time Optimal Controller(최단 시간 제어기), Bang-bang Controller(뱅뱅 제어기), Sliding Mode Controller(슬라이딩 모드 제어기), Lyapunov Stability(Lyapunov 안정성)

ABSTRACT

This paper proposes a high performance position controller for a driving system using a time optimal controller which has been widely used to control driving systems to achieve desired reference position or velocity in a minimum response time. The main purpose of this research lies in an improvement of transient response performance rather than that of steady-state response in comparison with other control strategies. In order to refine the scheme of time optimal control, Lyapunov stability proofs are incorporated in a controller of standard second order system model. This scheme is applied to the control of a driving system. In view of the simulation and experiment results, the standard second order system model exhibits better minimum-time control performance and robustness than double integral system model does.

기 호 설 명

- α : 회전체의 점성마찰계수와 관성모멘트의 비
- $\tilde{\alpha}$: α 의 추정 파라미터
- β : 회전체의 질량관성모멘트의 역수
- $\tilde{\beta}$: β 의 추정 파라미터
- J : 회전체의 질량관성모멘트[kgm²]
- ω_{max} : 최대 각속도[deg/sec]
- ω_{sat}, s_{sat} : 위치, 속도 및 전환함수의 포화상수
- $\omega(t)$: 각속도[deg/sec]
- $sgn(\cdot)$: 부호 함수
- $sat(\cdot)$: 포화 함수

- $s(\cdot)$: 실제 시스템 파라미터로 구해진 전환 함수
- $\tilde{s}(\cdot)$: 추정 모델 파라미터로 구해진 전환함수
- $\theta(t)$: 회전각[deg]
- u_{max} : 최대 제어입력
- \hat{u}, ϵ, k, b : 강인 최단시간 제어기 설계 파라미터
- $V_1(\cdot), V_2(\cdot)$: Lyapunov 함수
- $X(t), u(t)$: 플랜트의 상태벡터, 제어입력
- $x_0(t)$: 초기 상태

1. 서 론

빠른 응답속도가 요구되는 구동장치나 하드디스크 등의 동적 시스템을 제어하는데 있어서 주어진 명령을 수행하기 위해 필요한 수행시간을 최소화하는 제어기법의 경우, 이론적으로 가장 대표적인 최단시간 제어기(TOC, time optimal controller)는 뱅

† 교신저자; 정희원, 충남대학교 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642
* 정희원, 국방과학연구소

뱅 제어기(BBC, bang-bang controller)⁽¹⁾라 할 수 있다. 뱅뱅 제어기는 제어법칙에 따라 시스템에서 허용할 수 있는 최대 입력값과 최소 입력값으로 제어하는 스위칭 제어기법으로서 매우 이상적인 제어법칙이다. 이런 최단시간 제어 알고리즘들은 시스템의 차수가 고차인 경우 제어법칙을 전환하기 위한 전환함수(switching function)를 정의하기 어려울 뿐만 아니라 대개의 경우, 완전한 선형시스템이 아닌 비선형시스템으로 존재하게 되며, 모델의 불확실성과 외란에 의한 채터링과 발산이 발생하게 되어 시스템은 이론적으로 예측한 제어성능을 만족하지 못하거나, 시스템의 안정성을 만족하지 못하게 되어 실제 적용하기 어렵다⁽²⁾. 이러한 제어 목적을 충족시키기 위하여 시간 최적 제어기와 외란과 모델의 불확실성에 강인한 강인 제어기(robust controller)가 혼합된 제어기가 필요하다.

빠른 구동성능을 요구하는 구동제어 시스템의 변동성 및 외란에 강인한 슬라이딩 모드 제어기(SMC, sliding mode controller) 알고리즘⁽³⁾이 제안되었고 최대 기울기 곡선(maximum slope sliding lines)을 적용하여 최대한 빠른 응답을 얻을 수 있는 최단시간 슬라이딩 모드 제어기 알고리즘⁽⁴⁾과 Lyapunov 강인 안정성 조건을 이용한 강인 최적 뱅뱅 제어기 알고리즘⁽⁵⁾이 제안되었다. 특히, Newman은 로봇 매니퓰레이터를 이중 적분 플랜트로 모델링하여 뱅뱅 제어기의 전환함수를 슬라이딩 모드 제어의 전환함수로 이용하고, 불확실성과 외란 및 채터링에 강인한 제어조건을 부여하기 위해 제어기 설계 파라미터인 포화상수와 포화함수를 이용한 강인 최단시간 제어기(RNTOC, robust near time optimal controller)^(6,7)를 제안하였다. 강인 최단시간 제어기는 뱅뱅 제어기와 슬라이딩 모드 제어를 이용한 혼합제어기로서 초기위치에서 전환곡선에 도달하는 구간에서는 뱅뱅 제어기의 특성을 보이고, 전환곡선을 따라 상태공간 상의 원점에 도달하는 구간에서는 슬라이딩 모드 제어기의 특성을 보이므로 강인성이 보장되면서, 원점 근처에서는 비례미분 제어기(PDC, proportional derivative controller) 특성을 보이는 제어기이다.

그러나 Newman이 적용한 구동장치 모델은 구동장치의 마찰을 무시하고 관성만을 적용한 이중 적분 모델로 정의하였다. 이와 같은 모델을 적용한 이

유는 강인 최단시간 제어기 설계에 필요한 전환함수를 비교적 쉽게 유도할 수 있을 뿐만 아니라 Lyapunov 안정성 정리를 이용한 강인 최단시간 제어기의 안정성에 대한 증명이 쉽기 때문이다. 그러나 이런 근사화된 모델을 적용함으로써 전환함수의 정의와 안정성 판별이 쉽다는 장점이 있는 반면 모델의 불확실성이 커지기 때문에 최적의 제어성능을 이끌어낼 수 없다는 단점을 가지고 있다. 그리고 강인 최단시간 제어기는 뱅뱅 제어기 영역에서 빠른 시스템 응답을 얻기 위해 위치 오차에 대한 매우 큰 이득이 적용된다. 그러나 이렇게 적용된 이득은 비례미분 제어 영역 즉, 정상상태에서도 그대로 적용되기 때문에 작은 위치 오차에 대해 큰 이득이 적용되는 효과로 진동과 소음을 유발하게 된다. 이와 같이 구동장치의 모델 불확실성과 강인 최단시간 제어기의 큰 이득에 의한 진동과 소음은 정밀 구동제어를 목적으로 하는 경우 필연적으로 해결해야 할 문제임에 틀림없다.

따라서 이 논문에서는 구동장치의 위치제어기로 사용되는 강인 최단시간 제어기는 시스템의 빠른 응답특성을 잘 반영하는 뱅뱅 제어기의 장점과 시스템의 불확실성과 외란 및 측정 잡음 등 비선형성에 강인한 슬라이딩 모드 제어기의 장점만을 이용한 혼합 제어기의 형태인 강인 최단시간 제어기를 제안한다. 그리고 구동장치의 모델 불확실성을 줄이기 위해 이중적분 시스템 모델에서 마찰이 고려된 표준형 2차 시스템 모델로 확장하고 이 모델에 대한 강인 최단시간 제어기의 안전성 조건은 Lyapunov 안정성 정리를 이용하여 구한다. 그리고 두 모델에 대한 제어성능은 시뮬레이션과 실험을 통해 확인한다.

2. 강인 최단시간 제어기(RNTOC)

2.1 뱅뱅 제어기(BBC)

구동 시스템을 식 (1)과 같이 간단한 선형 단순화 모델로 표현할 때, 뱅뱅 제어기에 의한 전환함수^(1,8)은 식 (2)와 같다.

$$J\ddot{\theta} = u, |u| \leq u_{\max} \quad (1)$$

$$s(\theta, \omega) = \theta + \frac{\omega|u|}{2u_{\max}/J} \quad (2)$$

제어입력 $u(t)$ 는 전환함수의 조건에 따라 식 (3)과 같이 표현된다.

$$u = \begin{cases} -u_{\max} & \text{for } s > 0 \\ +u_{\max} & \text{for } s < 0 \\ -u_{\max} & \text{for } s = 0 \text{ and } \omega > 0 \\ +u_{\max} & \text{for } s = 0 \text{ and } \omega < 0 \\ 0 & \text{for } \theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

식 (3)에서 보듯이 뱅뱅 제어기의 제어입력은 오차 값이 0일 경우를 제외하고, 모두 최대 제어량을 이용하여 시스템이 동작된다.

Fig. 1과 2는 시스템 모델의 불확실성으로 인해서 식별된 관성값(J)이 실제보다 작을 경우에 감속이 늦게 시작함을 보여준다. 결과적으로 속도가 0에 도달하기 전에 전환곡선을 지나가며 그 후에 전환곡선에 도달하기 위해 반대방향으로 가속되어야 한다. 그러나 지연된 감속 때문에 마찬가지로 오버슈트(overshoot)가 반복적으로 발생한다.

따라서 실제 시스템에 뱅뱅 제어기를 그대로 사용

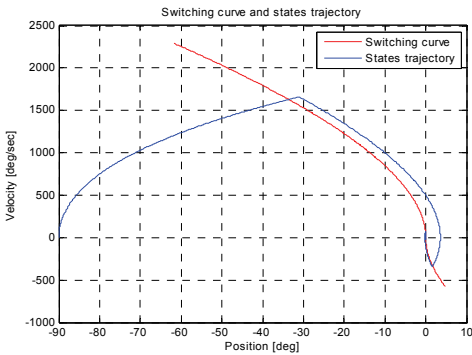


Fig. 1 State space diagram with underestimated J

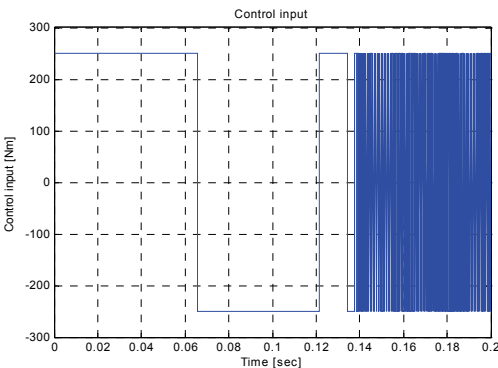


Fig. 2 Control input with underestimated J

할 경우, 시스템 외란 및 노이즈에 의한 영향으로 채터링이 발생할 수 있으므로 비선형 특성 및 모델링 오차를 고려한 슬라이딩 모드 제어를 포함시켜야 한다.

2.2 강인 최단시간 제어기 구조

슬라이딩 모드 제어기의 슬라이딩 평면은 뱅뱅 제어기의 전환함수를 그대로 사용하며 슬라이딩 모드 변환을 위하여 식 (4)와 같이 포화함수 $sat(\cdot)$ 를 도입하여 제어입력을 정한다.

$$u = -u_{\max} sat \left\{ \frac{\hat{u}}{u_{\max}} \left[sat \frac{\omega}{\omega_{sat}} + \epsilon sat \frac{\tilde{s}}{s_{sat}} \right] \right\} \quad (4)$$

여기서 \hat{u} 는 $\hat{u} \leq u_{\max}$ 조건을 만족하게 설정하고 채터링과 외란 및 시스템 불확실성에 강인하게 동작하기 위한 강인 최단시간 제어기 파라미터인 ω_{sat} , s_{sat} 은 다음과 같다.

$$\omega_{sat} = \frac{\hat{u}}{b}, \quad s_{sat} = \frac{\epsilon \hat{u}}{k}$$

여기서 $b > 0$, $k > 0$, $\epsilon > 0$ 이다

시스템은 초기 상태에서 뱅뱅 제어기의 특성을 갖고 목표치에 수렴할 즈음에 슬라이딩 모드 제어기로 부드럽게 전환된다. 어떤 미지의 변수 x 에 대하여 포화함수 $sat(x)$ 의 정의는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \forall |x| > 1: sat(x) &= sgn(x) \\ \forall |x| \leq 1: sat(x) &= x. \end{aligned} \quad (5)$$

2.3 동작 조건별 제어기의 변화

시스템의 동작 상태에 따른 제어입력의 변화를 살펴보면 다음과 같다.

가. 뱅뱅 제어기(BBC)

$|\tilde{s}(\theta, \omega)| > s_{sat}$ 인 경우: 포화함수의 정의에 의하여 식 (4)는 식 (5)와 같이 아래의 조건 중 하나에 해당한다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -u_{\max} sat \left\{ \frac{\hat{u}}{u_{\max}} [1 \pm \epsilon] \right\} \\ u(t) &= -u_{\max} sat \left\{ \frac{\hat{u}}{u_{\max}} [-1 \pm \epsilon] \right\} \end{aligned}$$

여기서, ϵ 이 1보다 충분히 큰 양의 상수로 가정하면 식 (6)과 같이 표현된다. 즉 \tilde{s} 의 부호에 의한 최대 제어 입력량 u_{\max} 가 제어입력이 되는 뱅뱅 제어기로 동작하게 된다.

$$u = -u_{\max} \text{sgn}(\tilde{s}) \quad (6)$$

나. 슬라이딩 모드 제어기(SMC)

$|\tilde{s}(\theta, \omega)| < s_{\text{sat}}$ and $\omega > \omega_{\text{sat}}$ 인 경우: 속도에 의한 포화함수만 포화되므로,

$$u = -\hat{u} \left[\text{sgn}(\omega) + \epsilon \left(\frac{\tilde{s}}{s_{\text{sat}}} \right) \right] \quad (7)$$

이며, 식 (7)은 일반적인 슬라이딩 모드 제어기와 유사한 형태를 갖는다.

다. 비례 미분 제어기(PDC)

$|\tilde{s}(\theta, \omega)| < s_{\text{sat}}$ and $\omega < \omega_{\text{sat}}$ 인 경우: 모든 항이 포화되지 않으므로, 식 (4)는 식 (8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -b\omega - k\tilde{s} \\ &= -k\theta - b\omega - kI \frac{\hat{\omega}|\omega|}{2\hat{u}} \\ &= -k\theta - b\omega - \text{sgn}(\omega)\rho\omega^2 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 식 (8)의 마지막 줄은 선형 비례 미분 제어기와 유사한 형태로서, 속도의 제곱항과 비례하는 제어입력항 즉, $\text{sgn}(\omega)\rho\omega^2$ 을 제외하면 순수한 비례 미분 제어기로 생각할 수 있다. 제어기가 모두 포화되지 않는 상태의 제어입력으로서 제어단계 중 최종단계에 해당하며, 비례 미분 제어기와 유사한 형태로 강인 최단시간 제어기의 정상상태 성능을 좌우하는 제어특성이라 할 수 있다.

3. 표준형 2차 시스템 모델과 안정성

표준형 2차 구동시스템을 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t), \quad |u| \leq u_{\max} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)로 표현되는 표준형 2차 구동 시스템 모델에 대한 전환함수를 구해보면 A행렬의 모든 고유치 ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\alpha$, 여기서 $\alpha \geq 0$)가 양의 실수를 갖지 않기 때문에 임의의 초기 상태 $x_0(t=0$ 인 시점)에서 원점으로 이동시킬 수 있는 최적시간 제어가 존재하고, 극값을 갖는 최적제어가 존재한다면 그 최적제어는 유일하다. 또한 표준형 2차 시스템 모델의 차수가 2차이므로 최대 한 번의 제어입력의 전환으로 모든 초기상태에 대해 원점으로 이동시킬 수 있다.

임의의 초기상태 x_0 를 원점으로 이동시킬 수 있는 최단시간이 존재하면

$$|u(t)| \leq u_{\max}, \quad \alpha = -2\zeta\omega_n, \quad \beta = \omega_n^2.$$

뱅뱅 제어기에 의한 표준형 2차 구동 시스템 모델에 대한 전환함수는 식 (10)과 같다.

$$s(\theta, \omega) = \theta - \frac{\omega}{|\omega|} \frac{\beta u_{\max}}{\alpha^2} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta u_{\max}} |\omega| + 1 \right) + \frac{1}{\alpha} \omega \quad (10)$$

시스템 파라미터 오차나 외란이 발생할 경우, 공칭 제어입력 이상의 제어값 ($u_{oh} = u_{\max} - \hat{u}$)은 시스템이 전환곡선 ($s=0$)을 이탈하는 것을 방지하기 위해 가해지는 입력이며, 따라서 공칭 제어입력 \hat{u} 에 의한 공칭 역학을 정의할 수 있으며, u_{\max} 을 초과하지 않는다는, 즉 $\hat{u} \leq u_{\max}$ 제한조건이 주어진다. 만일 표준형 2차 시스템 모델에 대한 시스템 파라미터 오차의 영향을 고려한다면, 실제 정확한 시스템 파라미터 α 와 β 의 추정오차를 포함한 불확실 파라미터들은 $\tilde{\alpha}$ 와 $\tilde{\beta}$ 으로 정의할 수 있으며 이로 인한 불확실 전환함수는 식 (11)과 같다.

$$\tilde{s}(\theta, \omega) = \theta - \frac{\omega}{|\omega|} \frac{\tilde{\beta}\hat{u}}{\tilde{\alpha}^2} \ln \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\hat{u}} |\omega| + 1 \right) + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \omega \quad (11)$$

표준형 2차 시스템 모델에 적용된 식 (4)의 강인 최단시간 제어기 제어입력은 각 포화함수 $\text{sat}(\cdot)$ 의 인자에 의해 포화영역과 선형영역에 따라 3가지 영역으로 구분되고 Fig. 3과 같다. 뱅뱅 제어기 영역 두 가지, 슬라이딩 모드 제어기와 비례미분 제어기는 각각 한 가지 경우를 구성하며 각 경우에 대한 조건은 다음과 같다.

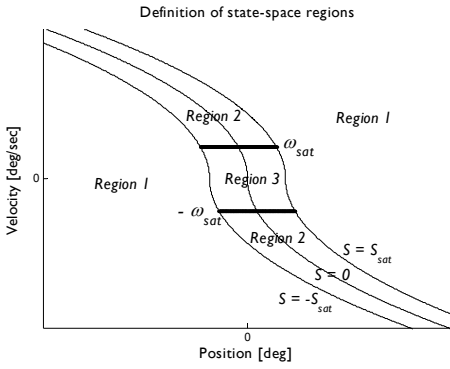


Fig. 3 Definition of state-space regions

가. 영역 1 (뱅뱅 제어기 영역) : $|\tilde{s}| > s_{sat}$

강인 최단시간 제어기에서 물리적인 포화가 발생하지 않는다고 가정하면 식 (4)의 제어입력은

$$u(t) = -\hat{u} \left[sat\left(\frac{\omega}{\omega_{sat}}\right) + \epsilon sat\left(\frac{\tilde{s}}{s_{sat}}\right) \right] \quad (12)$$

와 같이 슬라이딩 모드 제어입력으로 표현된다.

영역 1에서 안정성을 증명하기 위해서 Lyapunov 함수는 양의 정부호 함수(positive definite function)인 $V_1(\theta, \omega) = |\tilde{s}(\theta, \omega)|$ 으로 정의하며 이 함수의 도함수는 식 (13), 표준형 2차 시스템 모델에 대한 전환 함수 식 (11)의 도함수는 식 (14)와 같다.

$$\dot{V}_1 = \dot{\tilde{s}} sgn(\tilde{s}) \quad (13)$$

$$\dot{\tilde{s}}(\theta, \omega) = \omega - \frac{\alpha\omega|\omega| - \beta|\omega|u}{\tilde{\alpha}|\omega| + \tilde{\beta}\hat{u}} \quad (14)$$

영역 1에서 제어법칙의 안정성 조건을 구하기 위한 식 (12)의 등가 제어법칙은

$$u(t) = -\hat{u} \left[sat\left(\frac{\omega}{\omega_{sat}}\right) + \epsilon sgn(\tilde{s}) \right] \quad (15)$$

이고, 식 (15)의 슬라이딩 모드 제어법칙을 Lyapunov 함수의 도함수 식 (14)에 대입하여 $\dot{V}_1 < 0$ 가 되는 등가조건에서 이 식을 ϵ 에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\left[\frac{(\tilde{\alpha} - \alpha)|\omega|}{\tilde{\beta}\hat{u}} + \frac{\tilde{\beta}}{\beta} - sgn(\omega) sat\left(\frac{\omega}{\omega_{sat}}\right) \right] \times sgn(\omega) sgn(\tilde{s}) < \epsilon \quad (16)$$

여기서 위 부등식 조건을 만족시키는 ϵ 에 대한 충분조건을 구하고, 영역 1의 경계조건들에 의해 $|sat(\omega/\omega_{sat})| \leq 1$ 의 관계식으로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\epsilon > \left| \frac{(\tilde{\alpha} - \alpha)|\omega|}{\tilde{\beta}\hat{u}} + \frac{\tilde{\beta}}{\beta} + 1 \right| \quad (17)$$

표준형 2차 시스템의 경우에는 포화 제어입력에 대한 최대 속도가 제한되어 있으며 이에 대한 관계식은 다음과 같다.

$$|\dot{\omega}(t)| \leq \omega_{max} = \frac{1}{\alpha} \beta u_{max}, \quad \forall t \quad (18)$$

여기서 ω_{max} 는 포화 제어입력 u_{max} 에 대한 최대 속도를 나타낸다. 절대값에 대한 부등식의 성질과 ω 의 포화값에 대한 정리로부터 다음과 같은 관계 부등식을 얻을 수 있으며 결과적으로

$$\therefore \epsilon > \left| \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} - 1 \right| \frac{u_{max}}{\hat{u}} + \left| \frac{\tilde{\beta}}{\beta} + 1 \right| \quad (19)$$

이며, 이 조건을 만족하는 ϵ 을 선택한다면 $\dot{V}_1 < 0$ 가 되는 등가조건이 만족된다. 영역 1에 존재하는 모든 상태는 전환함수로 점근 수렴하고 제어법칙에 대한 안정성이 보장되고, 이 영역에 존재하는 모든 임의의 초기 상태는 이 제어법칙에 의해 전환곡선으로 점근 수렴하고 안정성이 보장된다.

나. 영역 2(슬라이딩 모드 제어기 영역): $\{|\tilde{s}| < s_{sat}$
and $|\omega| > \omega_{sat}\}$

영역 2에서 제어법칙의 안정성을 증명하기 위한 Lyapunov 함수는

$$V_2(\theta, \omega) = k \frac{\theta^2}{2} + \frac{\omega^2}{2\beta} \quad (22)$$

와 같이 양의 정부호 함수로 정의한다. 그리고 식 (22)의 도함수는

$$\dot{V}_2 = k\theta\dot{\theta} + \frac{1}{\beta}\omega\dot{\omega} \quad (23)$$

이고, 식 (23)에 $\dot{\omega} = -\alpha\omega + \beta u$ 를 대입하면

$$\dot{V}_2 = k\theta\omega - \frac{\alpha}{\beta}\omega^2 + \omega u \quad (24)$$

과 같이 계산되며, 이 영역의 조건을 적용한 식 (12)의 등가 제어법칙은 다음과 같다.

$$u = -\hat{u} \left[\text{sgn}(\omega) + \epsilon \frac{\tilde{s}}{s_{sat}} \right] \quad (25)$$

안정성을 판별하기 위해 식 (25)의 제어법칙, 포화상수 $s_{sat} = \hat{u}/k$ 를 식 (24)에 대입하여 정리하여

$$\begin{aligned} \therefore \dot{V}_2 = & -\frac{\alpha}{\beta}\omega^2 - \hat{u}|\omega| - \frac{k}{\alpha}\omega^2 \\ & + k|\omega| \frac{\tilde{\beta}\hat{u}}{\tilde{\alpha}^2} \ln\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\hat{u}}|\omega|+1\right) \end{aligned} \quad (26)$$

와 같이 Lyapunov 함수의 도함수를 구할 수 있다. \dot{V}_2 함수는 ω 에 대해 우함수이므로 $\omega > 0$ 인 경우에 대해서만 고려하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_2 = -\omega \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{k}{\alpha} \right) \omega - k \frac{\tilde{\beta}\hat{u}}{\tilde{\alpha}^2} \ln\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\hat{u}}\omega+1\right) + \hat{u} \right] \quad (27)$$

식 (27)에서 []안의 내용을 ω 에 대해 미분하면 항상 양의 값을 가지므로 영역 2의 경우 $\dot{V}_2 < 0$ 을 항상 만족하므로 이 제어법칙에 의해 슬라이딩 모드 제어기 영역에서 식 (22)의 제어법칙은 안정성이 보장되고 슬라이딩 모드 제어기 영역에 존재하는 모든 상태는 비례미분 제어 영역으로 접근 수렴한다.

다. 영역 3(비례 미분 제어기 영역): $\{|\tilde{s}| < s_{sat}$
and $|\omega| < \omega_{sat}\}$

영역 3에서의 조건을 적용한 식 (12)의 등가 제어법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u = & -\hat{u} \left[\frac{\omega}{\omega_{sat}} + \epsilon \frac{\tilde{s}}{s_{sat}} \right] = -b\omega - k\tilde{s} \\ = & -k\theta(t) - b\omega(t) - \frac{k}{\alpha}\omega(t) \\ & + k \frac{\omega(t)}{|\omega(t)|} \frac{\tilde{\beta}\hat{u}}{\tilde{\alpha}^2} \ln\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\hat{u}}|\omega(t)|+1\right) \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)의 등가 제어법칙을 식 (24)에 대입하여 정

리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\frac{\alpha}{\beta}\omega^2 - b\omega^2 - \frac{k}{\alpha}\omega^2 + k|\omega| \frac{\tilde{\beta}\hat{u}}{\tilde{\alpha}^2} \ln\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\hat{u}}|\omega|+1\right) \\ = & -\omega \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{k}{\alpha} \right) \omega - k \frac{\tilde{\beta}\hat{u}}{\tilde{\alpha}^2} \ln\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\hat{u}}\omega+1\right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

이와 같이 등가 제어법칙에 대한 Lyapunov 함수의 도함수를 구할 수 있으며, 영역 2와 같이 식 (29)의 []안의 내용을 ω 에 대해 미분하면 항상 양의 값을 가지므로 $\dot{V}_2 < 0$ 이 되어 안정성이 보장되고, 비례미분 제어기 영역의 모든 상태는 원점으로 접근 수렴한다.

라. 포화 슬라이딩 모드

앞에서는 제어입력의 물리적인 포화가 없는 경우로 표준형 2차 시스템 모델에 대한 강인 최단시간 제어기를 슬라이딩 모드 제어법칙인 식 (12)를 이용하여 설계 파라미터의 안정성 조건을 구하였다. 식 (12)에 물리적인 포화영역을 설정하면 식 (4)의 강인 최단시간 제어기다

가장 바깥에 위치한 포화함수 $\text{sat}\{\cdot\}$ 의 인자에 의해 강인 최단시간 제어기는 선형영역과 포화영역에 대한 등가 제어법칙을 갖는다. $\text{sat}\{\cdot\}$ 인자의 절대값이 “1”보다 작은 경우 등가 제어법칙은 슬라이딩 모드 제어법칙과 같으며 안정성 증명은 앞에서 수행하였으며, $\text{sat}\{\cdot\}$ 인자의 절대값이 “1”보다 큰 경우 등가 제어법칙은 식 (6)과 같이 제어법칙으로 등가화 할 수 있다. 식 (6)의 포화 제어법칙에 대한 안정성조건은 Lyapunov 함수 $\dot{V}_1 < 0$ 이 되는 ϵ 의 조건을 뺀 제어기의 영역 1과 같이 구하면 다음과 같다.

$$\hat{u} < U_{\max} \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \left(1 - \left| \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} - 1 \right| \right), \text{ for } 0 < \tilde{\alpha} < 2\alpha \quad (30)$$

식 (30)의 설계 파라미터 조건을 만족하도록 강인 최단시간 제어기 제어기를 설계한다면, 포화 제어법칙에 대한 보장성은 상태공간 상에서 포화 제어법칙에 의해 원점으로 접근 수렴한다. 따라서 식 (9)의 표준형 2차 시스템 모델을 기반으로 설계된 식 (4)의 강인 최단시간 제어기 설계 파라미터들이

$$\epsilon > \left| \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} - 1 \right| \left| \frac{U_{\max}}{\hat{u}} + \left| \frac{\tilde{\beta}}{\beta} + 1 \right| \right|$$

$$\hat{u} < U_{\max} \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \left(1 - \left| \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} - 1 \right| \right), \text{ for } 0 < \tilde{\alpha} < 2\alpha \quad (31)$$

의 조건을 만족하도록 설정된다면, 모든 영역에 대해 강인 최단시간 제어기의 안정성이 보장되고 상태공간 상의 모든 상태는 식 (4)의 제어법칙에 의해 원점으로 접근 수렴한다.

4. 시뮬레이션 및 실험결과 비교

구동장치의 시스템 식별은 최단시간 강인제어기 설계에서 역학적인 특성을 나타내는 전환함수를 정의하기 위해서 LabView의 시스템 식별 프로그램을 통해 구동장치의 페루프 전달함수의 파라미터인 감쇠비(ζ)와 고유진동수(ω_n)를 구할 수 있다⁽⁹⁾.

Partially known 추정 모델 방법으로 구해진 구동장치의 표준형 2차 시스템 모델⁽¹⁰⁾은

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2.2190}{s^2 + 7.2566s + 2.2190} \quad (32)$$

와 같으며 식 (32)에 의해 유도되는 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.2190}{s(s + 7.2566)} \quad (33)$$

구동장치의 표준형 2차 시스템 모델은 식 (9)와 같고 그 파라미터는 $\tilde{\alpha}=7.2566$, $\tilde{\beta}=2.2190$ 이고 전환함수는 식 (11)과 같다.

시뮬레이션에서 구동장치의 모델은 전형적인 표준형 2차 시스템 모델로 정의하고 강인 최단시간 제어기 설계에 필요한 전환함수는 표준형 2차 시스템 모델과 마찰이 무시된 이중 적분 시스템 모델로 적용한다. 이와 같은 구동장치의 모델과 전환함수의 정의는 기본적으로 시스템 모델의 오차를 포함하고 있는 경우이며 이에 대한 제어기의 강인성을 확인할 수 있다.

두 시스템에 대한 제어성능을 평가하기 위한 제어 목표는 허용 위치오차를 $\pm 0.28 \text{ deg}$ 로 정하고 허용 위치오차범위에 처음으로 도달하는 정상상태 도달시간을 정착시간 t_s (settling time)로 결정한다. 제어성능을

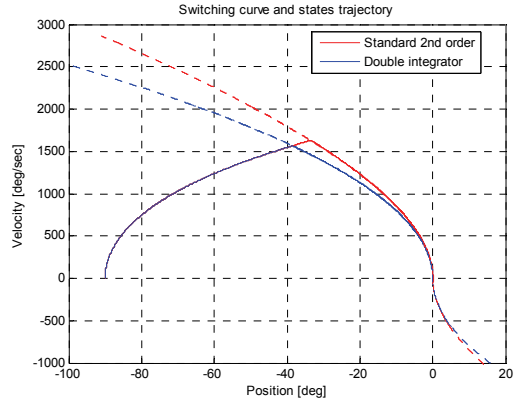


Fig. 4 The comparison of switching and state trajectories

비교분석 하기 위해서 Matlab/Simulink를 이용하였다.

이 절에서는 실제 구동장치의 모델을 표준형 2차 시스템으로 가정하고 표준형 2차 시스템 모델과 이중 적분 모델을 기반으로 각각 설계된 강인 최단시간 제어기의 제어성능을 시뮬레이션을 통해 관찰하고자 한다. 이중 적분 모델을 기반으로 설계된 강인 최단시간 제어기는 전환함수에 기본적으로 모델의 불확실성을 포함하고 있는 반면, 표준형 2차 시스템 모델을 기반으로 설계된 강인 최단시간 제어기는 모델의 불확실성이 전혀 없다는 조건으로 두 제어 시스템의 제어 성능을 분석한다.

이는 두 모델이 각각 전환곡선을 기준으로 제어 입력이 전환되고 이 곡선을 따라 원점으로 수렴하기 때문에 이 두 모델을 기반으로 설계된 강인 최단시간 제어기의 상태궤적을 나타내는 전환곡선의 기울기가 빠른 표준형 2차 시스템의 모델이 응답속도가 빠르게 나타나는 것을 Fig. 4에서 확인할 수 있다.

표준형 2차 시스템 모델과 이중 적분 모델의 제어성능을 나타내는 시뮬레이션과 실험결과로 비교하기 위해 두 제어기의 설계 파라미터를 $u_{\max}=250$, $\hat{u}=130$, $\epsilon=1000$, $k=7000$, $b=70$ 으로 동일하게 설정하였다. 이와 같은 설정은 파라미터 오차, 측정 잡음 및 외란이 고려되지 않은 상태에서 오직 모델의 불확실성에 의한 제어성능에 미치는 영향을 관찰하기 위해서다.

Fig. 5는 두 제어입력을 비교한 것으로 표준형 2차 시스템의 모델이 상대적으로 가속구간이 길고

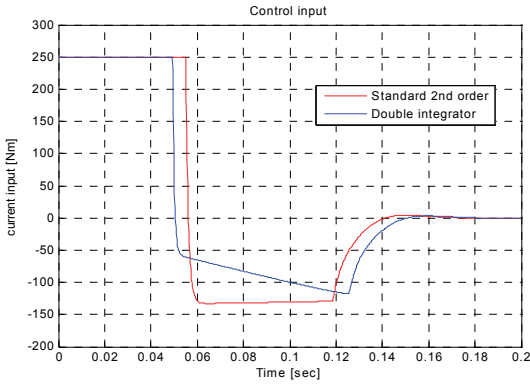


Fig. 5 The comparison of control inputs

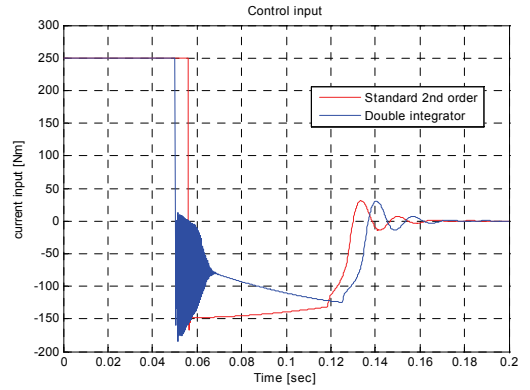


Fig. 8 The comparison of control inputs

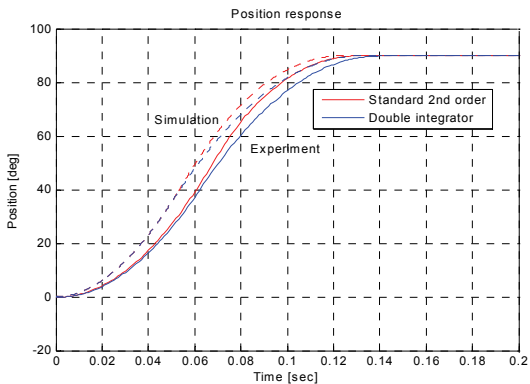


Fig. 6 Position responses

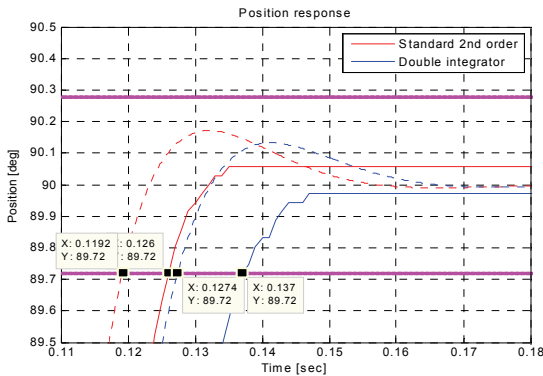


Fig. 7 Position responses within the margin of error

감속구간이 짧게 나타나기 때문에 Fig. 6과 7에서와 같이 정상상태 도달시간이 시뮬레이션에서는 8.2ms 실험값은 11.0ms 빨라짐을 알 수 있으며, 각각 6.9%, 8.7%의 응답성능 향상으로 모델의 불확

실을 줄임으로서 개선 할 수 있는 여지를 보여주고 있다. 각 그림에서 점선은 시뮬레이션을, 실선은 실험결과를 보여주고 있다.

시스템의 응답속도를 결정하는 k 를 증가시켰을 때 두 모델의 응답특성을 관찰하기 위해 비례이득인 k 를 10배 높여 해석한 결과를 Fig. 8에서 보여주고 있으며, 이중 적분 모델의 경우 슬라이딩 모드 제어 영역에서 채터링을 발생시키는 것을 확인할 수 있다. 이는 실제 전환곡선이 아닌 이중 적분 모델의 전환곡선을 사용하여 설계되어 동적 특성이 다르기 때문에 나타나는 현상으로, 결국 모델의 불확실성에 의한 것임을 알 수 있다. 실제로 강인 최단시간 제어기의 비례이득인 k 를 큰 이득으로 적용할 경우가 존재하기도 하고 Fig. 8의 결과처럼 슬라이딩 모드 제어 영역에서만 채터링이 발생하게 되며 이와 함께 외란이나 측정 잡음이 시스템에 적용될 경우 더욱 심각한 채터링의 발생으로 시스템의 심각한 손상을 초래할 수 있다.

따라서 구동장치의 빠른 응답특성과 제어입력의 채터링을 줄이기 위해서는 이중 적분 시스템 모델보다 모델의 불확실성이 적은 표준형 2차 시스템 모델을 이용하여 강인 최단시간 제어기를 설계하는 것이 더 효과적이며 이는 시뮬레이션을 통해 입증되었다.

5. 결 론

고속·정밀 구동성능을 충족시키기 위하여 구동위치 명령에 대한 최대한의 토크와 최적시간에 수렴

하는 구동장치의 위치제어기를 목적으로 최단시간 제어기인 뱅뱅 제어기와 외란 및 시스템 불확실성에 강인한 비선형 제어기인 슬라이딩 모드 제어기의 장점을 반영한 강인 최단시간 제어기를 적용하였다. 구동장치를 이중 적분 모델보다 정밀도가 높은 표준형 2차 시스템 모델을 적용하였으며 이 모델에 대한 전환함수를 유도하고 강인 최단시간 제어기의 안정성을 검증하였으며 강인 최단시간 제어기의 안정성을 보장하는 설계 파라미터의 조건을 구하였다. 이와 같이 시스템 모델이 복잡함에도 불구하고 표준형 2차 시스템 모델을 사용하는 이유는 모델의 정밀도 향상으로 구동 제어성능이 향상되기 위해서 구동장치의 모델을 이중 적분 시스템 모델에서 표준형 2차 시스템 모델로 확장함으로써 기본적으로 모델의 불확실성에 의한 영향을 최소화하여 시스템의 구동 제어성능을 향상시켰다. 또한 계단응답을 이용하여 모델의 시뮬레이션 결과를 비교함으로써 추정모델의 신뢰성 및 타당성을 검증하면서 구동제어 성능을 높이는데 기여 하였다.

따라서 구동장치의 빠른 응답특성과 제어입력의 채터링을 줄이기 위해서는 이중 적분 시스템 모델보다 모델의 불확실성이 적은 표준형 2차 시스템 모델을 이용하여 강인 최단시간 제어기를 설계하는 것이 더 효과적이며, 이의 타당성을 해석과 실험을 통하여 보였다.

참 고 문 헌

(1) Kirk, D. E., 1970, Optimal Control Theory, Prentice-Hall, pp. 240~259.
 (2) Hu, Q. L., Du, C. L., Xie, L. H. and Wang, Y. Y., 2009, Discrete-time Sliding Mode Control

with Time-varying Surface for Hard Disk Drives, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 17, No. 1, pp. 175~183.

(3) Young, K. D., Utkin, V. I., Ozguner, U., 1999, A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 7, No. 3, pp. 328~342.

(4) Iliev, B. K. and Kalaykov, I., 2004, Minimum-time Sliding Mode Control for Second-order Systems, Proceeding of the 2004 American Control Conference, pp. 626~631.

(5) Lim, C. W., Moon, S. J., Park, Y. J. and Park, Y. S., 2006, Experimental Study on Stability of Robust Saturation Controller, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 2, pp. 207~213.

(6) Newman, W. S., 1990, Robust Near Time-Optimal Control, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 7, pp. 841~844.

(7) Newman, W. S. and Souccar, K., 1991, Robust, Near Time-optimal Control of Nonlinear Second- Order Systems, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 113, pp. 363~370.

(8) Slotine, J.-J. E. and Li, W., 1991, Applied Non-linear Control, Prentice Hall.

(9) LabVIEW System Identification Toolkit User Manual, National Instruments.

(10) Lee, J. H., Lee, S. W., Choi, J. H., Oh, D. J., Kim, I. H. and Park, K. H., 2008, System Identification and Robust Time-optimal Control of the Rotational Driving System, Conference of the Korean Institute of Electrical Engineers.