

MLS 차분법을 이용한 고체역학 문제의 동적해석

Dynamic Algorithm for Solid Problems using MLS Difference Method

윤 영 철† 김 경 환** 이 상 호*
Yoon, Young-Cheol Kim, Kyeong-Hwan Lee, Sang-Ho

요 지

MLS(Moving Least Squares) 차분법은 무요소법의 이동최소제곱법과 Taylor 전개를 이용하여 요소망의 제약 및 수치적분이 없이 절점만을 이용하여 미분방정식을 수치해석할 수 있는 방법이다. 본 연구에서는 고체역학 문제의 동적해석을 위하여 MLS 차분법의 시간이력해석 알고리즘을 제시한다. 개발된 알고리즘은 Newmark 방법으로 시간적분을 하였으며, 강형식을 그대로 이산화하여 해석을 수행했다. 이동최소제곱법을 이용해 Taylor 전개식을 근사하여 실제 미분계산없이 미분근사식을 얻기 때문에 고차까지 Taylor 다항식의 차수를 증가하는 것이 용이하다. 1차원과 2차원 수치예제들을 통하여 동적해석을 위한 MLS 차분법의 정확성과 효율성을 검증하였다. 수치결과들이 정확해에 잘 수렴하였으며, 유한요소법(FEM)의 해석결과와 비교하여 떨림현상(oscillation) 및 주기성(periodicity) 오차에 대해 보다 안정적인 모습을 보였다.

핵심용어 : MLS 차분법, 동적해석, Taylor 전개, 고체역학, Newmark 방법

Abstract

The MLS(Moving Least Squares) Difference Method is a numerical scheme that combines the MLS method of Meshfree method and Taylor expansion involving not numerical quadrature or mesh structure but only nodes. This paper presents a dynamic algorithm of MLS difference method for solving transient solid mechanics problems. The developed algorithm performs time integration by using Newmark method and directly discretizes strong forms. It is very convenient to increase the order of Taylor polynomial because derivative approximations are obtained by the Taylor series expanded by MLS method without real differentiation. The accuracy and efficiency of the dynamic algorithm are verified through numerical experiments. Numerical results converge very well to the closed-form solutions and show less oscillation and periodic error than FEM(Finite Element Method).

Keywords : *MLS Difference Method, dynamic algorithm, Taylor expansion, solid mechanics, Newmark method*

1. 서 론

고체역학 문제의 해석에 있어서 대표적인 수치해석 기법으로 유한요소법(FEM)이 널리 사용되고 있으나, 특수공학문제의 경우 유한요소법은 요소망에 의존적인 특징으로 인해 불편을 초래하기도 한다. 이를 극복하고자 많은 연구들이 시도되었으며, 그 중에 하나의 결과가 무요소법(Meshfree Method)이다. 무요소법은 Belytschko 등(1994)과 Liu 등(1995)에 의해서 Element-free Galerkin(EFG)법과 재생 커널 무요소법(Reproducing Kernel Particle Method:

RKPM)의 형태로 제시되었으며, 해석영역 내에 배치된 절점만으로 수치해석이 가능하도록 고안되었다. 그러나 Galerkin 정식화에 근간을 두고 있어서 수치적분이 필요할 뿐만 아니라 수치적분을 위한 적분셀(integration cell)의 구성으로 인해 요소구조로부터 완전히 벗어나지 못했고, 더욱이 필수 경계조건 처리가 어려운 단점을 가지고 있었다. 이와 같은 약형식(weak form)에 의한 한계를 탈피하고자 강형식(strong form)에 근거한 콜로케이션 정식화를 무요소법에 적용한 수치기법들이 제안되었다(Kim 등, 2003; Lee 등, 2004; 윤영철 등, 2007a). 이 기법들은 미분근사를 빠르게 할 수 있

† 책임저자, 종신회원·명지전문대학 토목과 부교수

* 교신저자, 종신회원·연세대학교 토목환경공학과 교수
Tel: 02-2123-2808 ; Fax: 02-364-5300

E-mail: lee@yonsei.ac.kr

** 학생회원·연세대학교 토목환경공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2012년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2012년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

고 경계조건 처리가 간편하며, 편미분방정식을 강형식으로 직접 풀어내어 그동안 지적되었던 무요소법의 단점들을 극복하는 계기를 마련했다. 더 나아가, 강형식 기반의 확장된 무요소법을 이용하여 계면경계와 이동경계를 갖는 문제를 해석하는 연구들도 수행되었다(윤영철 등, 2009a; 2009b). 그러나 아직까지 이와 같은 수치해석기법의 동적해석으로의 확장은 시도되지 못했다.

많은 반복계산이 요구되는 동적해석에 있어서 유한요소법과 경쟁할 수 있는 다양한 방법들을 개발하려는 연구가 진행되어 왔다. 경계요소법은 경계만 계산하기 때문에 내부에서 움직이는 경계면의 모델링에 장점이 있지만, 적분방정식에 공간을 두고 있으며 수식 전개가 복잡하고 기본해(fundamental solution)의 유도에 있어서 특수한 문제로의 확장에 한계를 가지고 있다(Perez-Gavilan 등, 2000; Samaan 등, 2007). 한편, EFG법을 이용하여 균열을 포함한 동적문제를 해석한 연구들도 다수 있었다(Belytschko 등, 1996; 2000). 그러나 EFG법의 한계가 동적해석에도 그대로 존재하여 무요소법 본래의 장점을 효과적으로 부각시키지 못했다. Gu 등(2005)는 Galerkin 정식화를 포함하고 있는 초기의 무요소법에 콜로케이션(collocation) 정식화를 적용시켜 동적해석을 수행하였지만, 여전히 부분적으로 약형식을 사용하여 계산과정이 복잡할 뿐만 아니라 정확한 해석결과를 얻지 못했다. 그 후로도 콜로케이션 정식화가 적용된 무요소법을 사용하여 동적해석에 접근한 시도들이 있었지만, 여전히 EFG법에서 사용한 복잡한 미분계산 형태를 벗어나지 못했으며, 필수경계조건 처리를 위하여 난해한 적분계산을 동반하고 있다(Wen 등, 2008; Sadeghirad 등, 2009).

본 연구에서 제시하는 MLS(Moving Least Square) 차분법은 이동최소제곱법과 Taylor 전개를 조합하여 미분근사의 효율성을 획기적으로 향상시키고 지배방정식을 수치적분 없이 강형식으로 직접 풀어 기존의 무요소법들과 차별되는 장점을 갖는다. 더 나아가 MLS 차분법을 동적해석 분야로 확장하여 고체역학 문제를 위한 동적해석 알고리즘을 개발하고 기존에 개발된 무요소법에서 지적되었던 문제점들을 효과적으로 극복할 수 있음을 보이고자 한다. 또한 새롭게 개발된 기법을 수치예제에 적용하여 정확성과 효율성을 체계적으로 분석하고 검증하고자 한다.

2. MLS 차분법의 미분근사

MLS 차분법은 이동최소제곱법을 이용한 Taylor 전개를 통하여 기존의 무요소법의 단점인 복잡한 미분계산 및 필수 경계조건 처리의 어려움을 간편하게 해결한다. 정적해석을

다른 앞 선 연구들(윤영철 등, 2007a; 2007b)에 의하여 근사함수의 정식화 과정이 소개되어 있으나, 본 절에서 간략하게 다시 한번 정리한다. 우선, Taylor 급수로부터 형상함수를 유도하기 위해 아래와 같이 임의의 기준점 점 x_0 에 대하여 i 번 미분 가능한 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 1차원 Taylor 급수를 전개한다.

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u^{[i]}(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!} \quad (1)$$

여기서, $[i]$ 는 미분의 차수를 의미하며, 다차원으로 확장될 경우 미분의 차수는 2차원일때 $[i_x, i_y]$, 3차원일때 $[i_x, i_y, i_z]$ 와 같이 벡터형태로 주어진다. 식 (1)에서 m 차 이상의 고차항을 제외하면 Taylor 다항식을 얻을 수 있다. 2차원의 경우를 예로 들면, 아래와 같은 Taylor 다항식을 얻는다.

$$\begin{aligned} u^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &\simeq u(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} u^{[1,0]}(\mathbf{x}_0)(x-x_0) \\ &+ \frac{1}{1!} u^{[0,1]}(\mathbf{x}_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!} u^{[2,0]}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{1}{1!1!} u^{[1,1]}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!} u^{[0,2]}(\mathbf{x}_0)(y-y_0)^2 \\ &+ \dots + \frac{1}{m!} u^{[0,m]}(\mathbf{x}_0)(y-y_0)^m \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $u^{[1,0]}, u^{[0,1]}$ 는 각각 u 에 대한 x, y 축 방향으로의 편미분을 의미하고, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{x} = (x, y)$ 는 위치벡터이다. 식 (2)를 무요소법의 국부근사함수(local approximation)와 유사하게 다항식 기저벡터와 계수벡터를 갖는 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &\simeq \left(1, (x-x_0), \dots, \frac{(y-y_0)^m}{m!} \right) \begin{pmatrix} u^{[0,0]}(\mathbf{x}_0) \\ u^{[1,0]}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ u^{[0,m]}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (3)$$

즉, $\mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ 는 다항식기저함수이고 $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0)$ 는 $u(\mathbf{x})$ 의 \mathbf{x}_0 에서의 미분값들을 포함하는 미지의 벡터가 된다.

다음으로, 미지의 미분계수벡터 $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0)$ 값을 결정하기 위해 \mathbf{x}_0 를 중심으로 하여 설정되는 영향영역에 포함된 N 개의 절점에 대해 다음과 같은 이동최소제곱 잔차식(residual functional)을 구성한다.

$$J = \sum_{I=1}^N w \left(\frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0|}{r} \right) \left\{ \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_0) \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) - u_I \right\}^2 \quad (4)$$

여기서, $w\left(\frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0|}{r}\right)$ 는 가중함수(weight function)를 나타내고, r 은 근사함수 계산에 포함될 주변 절점을 결정하는 영향영역을 나타내는 가중함수의 영향반경을 가리키며, u_I 는 \mathbf{x}_I 위치에서의 절점해(nodal solution)이다. 잔차식 J 를 $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0)$ 에 대하여 최소화(즉, $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}}=0$)시킨 후, \mathbf{x}_0 를 \mathbf{x} 로 치환하면 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ 위치에서 미분계수 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ 를 다음과 같이 얻는다.

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{I=1}^N w\left(\frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}|}{r}\right) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) \right)^{-1} \cdot \left(w\left(\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}|}{r}\right) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}), \dots, w\left(\frac{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}|}{r}\right) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{u}^h \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{u}^h = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 는 영향영역 내의 u_I 를 모아 놓은 열벡터이다. 식 (5)로부터 \mathbf{x}_0 위치에서 함수 $u(\mathbf{x})$ 에 대한 미분근사식을 얻을 수 있다. Taylor 다항식에서 m 차까지의 미분계수를 모두 포함하고 있는 식 (5)는 다시 식 (6)과 같이 일반화된 형상함수(shape function)를 이용하여 표현할 수 있다.

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u^{[0,0]}(\mathbf{x}) \\ u^{[1,0]}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ u^{[0,m]}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{[0,0]}(\mathbf{x}) \cdots \phi_N^{[0,0]}(\mathbf{x}) \\ \phi_1^{[1,0]}(\mathbf{x}) \cdots \phi_N^{[1,0]}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_1^{[0,m]}(\mathbf{x}) \cdots \phi_N^{[0,m]}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서, $\phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x})$ 는 \mathbf{x} 위치에서 구한 근사함수에 포함된 J 절점의 형상함수를 나타내고, $\phi_I^{[0,m]}(\mathbf{x})$ 는 J 절점 형상함수의 $[0, m]$ 차 미분근사를 의미한다. 이 값을 미분근사라고 부르는 이유는 $\phi_I^{[0,m]}(\mathbf{x})$ 가 $\phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x})$ 을 실제로 $[0, m]$ 차 미분해서 얻을 값이 아니기 때문이다(윤영철 등, 2007a). 즉, Taylor 전개식을 이동최소제곱법으로 근사하여 얻는 미분계수값이지만 수학적으로 재생성 조건(reproducing property)을 만족시키는 매우 좋은 미분근사이다. 식 (6)은 절점해와 일반화된 형상함수의 스칼라 곱으로 $u(\mathbf{x})$ 의 미분값을 근사할 수 있음을 보여준다. 결과적으로 형상함수를 직접 미분하는 복잡한 계산과정을 거치지 않고 형상함수의 미분근사를 이용하여 원래 근사하려는 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 미분근사를 손쉽게 계산할 수 있기 때문에 다른 수치기법의 근사함수 계산 과정과 비교하여 매우 효율적이다. 이러한 손쉬운 미분 계산은 고차의 미분계산을 요구하는 강성식화에서 필수적이다.

3. 동적해석을 위한 운동방정식 이산화

3.1 지배방정식

일반적으로 선형탄성 장(field)에서 미소변형을 갖는 고체 역학 문제의 지배방정식은 다음과 같이 운동방정식, 자연경계조건식, 필수경계조건식으로 구성된다. 내부영역을 Ω , 자연경계를 Γ_t , 필수경계를 Γ_u 라고 할 때 각 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (9)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력텐서, \mathbf{b} 는 체적력, ρ 는 밀도, \mathbf{a} 는 가속도를 나타낸다. 또한, \mathbf{n} 은 자연경계에서의 단위수직벡터, $\bar{\mathbf{t}}$ 는 표면력, $\bar{\mathbf{u}}$ 는 변위경계값, \mathbf{u} 는 고체문제의 미분방정식에서 궁극적인 해(solution)로 구하려는 변위를 나타낸다. 응력과 변형률의 관계를 나타내는 구성방정식과 변형률과 변위의 관계를 정의하는 적합방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (11)$$

여기서, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 변형률텐서, $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 은 변형률텐서의 트레이스(trace), $\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ 은 2차 단위텐서, λ 및 μ 는 Lamé 상수이다. 평면응력(Plane stress)에 대한 Lamé 상수는 식 (12)와 같고 평면변형률(Plane strain)의 경우 식 (13)과 같다.

$$\lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

여기서, E 는 탄성계수, ν 는 포아송비이다.

식 (10)과 (11)의 구성방정식과 적합방정식을 운동방정식 식 (7)에 적용하면 체적력을 무시하였을 때, 식 (14)와 같은 Navier 방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식은 변위로 표현된 운동방정식으로 볼 수 있다.

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \mathbf{a} \quad \text{in } \Omega \quad (14)$$

여기서, $\nabla^2 (= \nabla \cdot \nabla)$ 는 Laplace 연산자이다. 자연경계조건식 (8)을 변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\mu \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{1}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (15)$$

식 (9)의 필수경계조건은 변위로 표현되어 있으므로 그대로 사용할 수 있다. 변위를 유일한 미지값으로 하는 지배방정식들을 결합하여 전체 계방정식(system of equation)을 구성할 수 있다. 이와 같이 지배 방정식의 강형식을 그대로 이산화하여 차분식을 구성하기 때문에 본 해석방법은 약형식을 근간으로 수치적분을 해야 하는 다른 수치기법들에 비해 계산 효율성에서 많은 이점을 갖는다.

3.2 시간적분(Time integration)

운동방정식에 포함되어 있는 시간 의존적인 가속도 항을 이산화하기 위해 시간적분을 수행한다. 시간적분법은 일반적으로 explicit방법과 implicit 방법으로 나누어진다. 유한요소소에서 explicit 방법은 역행렬 계산 및 수식전개가 상대적으로 간편하여 계산속도가 빠르지만, 시간단계(Δt)에 대한 안정성 조건(stability condition)을 만족시켜야 한다. 반면, implicit 방법은 수치적 안정성 측면에서 시간단계의 결정이 자유롭지만, 역행렬 계산과 상대적으로 복잡한 수식전개로 인해 explicit 방법에 비해 계산속도가 느리기 때문에 해석하고자 하는 문제의 특성에 따라 두 방법을 선택적으로 사용한다. 그러나 MLS 차분법은 explicit 방법과 implicit 방법의 계산량 차이가 크지 않기 때문에 빠른 계산을 위해 explicit 방법을 고집할 이유가 없다.

본 논문에서는 Newmark 방법(Newmark, 1959)을 기본으로 시간적분하고, explicit와 implicit 방법을 비교하였다. $n+1$ 번째 시간단계의 변위와 속도를 구하기 위한 Newmark 방법의 관계식은 식 (16)~(17)과 같다.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}^n + \beta \mathbf{a}^{n+1} \right] \quad (16)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}^n + \gamma \mathbf{a}^{n+1}] \quad (17)$$

여기서, 이론적으로 β 와 γ 가 $\beta < 0.5\gamma$, $0.5 \leq \gamma \leq 1$ 의 조건을 만족할 경우 안정성 확보를 위해 Δt 크기의 제약을 받게 되고, $\beta \geq 0.5\gamma$ 경우에는 Δt 에 관계없이 안정적인 수치해석이 가능하다. 또한, $\beta=0$, $\gamma=0.5$ 인 경우에는 대표적인 explicit 방법인 CDM(Central Difference Method)에 상응하게 되고, $\beta=0.25$, $\gamma=0.5$ 일 때는 implicit 방법의 하나인 TM(Trapezoidal Method)에 상응하게 된다. 식 (16)과 (17)을 결합하여 변위와 가속도에 대한 관계식으로 정리하면 β 와 γ 를 동시에 포함한 다음 식을 얻는다.

$$\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1} \quad (18)$$

$$= \Delta t^2 \left[\beta \mathbf{a}^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \mathbf{a}^n + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \mathbf{a}^{n-1} \right]$$

이제, 운동방정식 식 (14)에 포함되어 있는 가속도항을 시간적분하기 위해 식 (18)을 이용할 수 있다. 우선, 식 (14)를 내부영역 Ω 에 대한 미분연산자 \mathcal{L} 를 이용하여 아래와 같이 나타낸다.

$$\mathcal{L} \mathbf{u} = (\mu \nabla^2 + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot) \mathbf{u} \quad (19)$$

식 (19)로부터 $\mathbf{a} = \mathcal{L} \mathbf{u} / \rho$ 이므로, 식 (18)의 가속도 항들에 대입하여 $n+1$ 단계의 변위에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2 \beta}{\rho} \mathcal{L} \right) \mathbf{u}^{n+1} \\ &= \left(\frac{\Delta t^2}{\rho} \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \mathcal{L} + 2\mathbf{I} \right) \mathbf{u}^n \\ &+ \left(\frac{\Delta t^2}{\rho} \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \mathcal{L} - \mathbf{I} \right) \mathbf{u}^{n-1} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, \mathbf{I} 는 단위텐서이다. 식 (20)은 Newmark 시간적분을 이용하여 운동방정식을 변위만으로 나타낸 지배방정식이다. 여기에 식 (6)에 제시한 미분근사식을 이용하여 공간에 대한 미분연산자의 이산화과정을 거치고 경계조건식을 결합하면 전체 계방정식을 만들 수 있다.

유한요소법의 경우, 시간적분법을 explicit 방법과 implicit 방법으로 구분하는 중요한 기준의 하나는 전체 계방정식에 대한 역행렬 계산의 유무이다. Explicit 방법은 질량행렬을 lump시켜 대각화하는 방법을 통해 역행렬 계산을 피할 수 있어 implicit 방법보다 빠른 계산을 할 수 있다. 이로 인해 Δt 에 대한 안정성 조건을 만족시켜야 함에도 불구하고 널리 사용된다. 이런 관점에서 보면, 본 논문에서 제시한 MLS 차분법은 explicit 방법과 implicit 방법에 큰 차이가 없다. 이론적으로 Newmark 시간적분법을 사용할 때 β 에 0을 대입하여 explicit화(化)시킬 수 있으나, MLS 차분법의 전체 계방정식에서 역행렬 계산이 여전히 필요하기 때문이다. 즉, explicit 시간적분을 이용해도 역행렬 계산을 피할 수 없기 때문에 효율성의 증가는 거의 없고 안정성 조건만 추가로 만족시켜야 하는 상황이 된다. 결국 동적해석을 위한 MLS 차분법은 안정성 조건의 제약이 없는 implicit 방법을 사용하는 것이 더 합리적이라고 할 수 있다.

한편, 시간적분이 포함된 이산화 방정식을 수치계산 할 때 시간적분방법에 따라 주기오차(periodicity error)가 발생한다. 예를 들어, CDM은 시간이 지남에 따라 정해와 비교하

여 주기가 점점 짧아지는 경향이 있고, TM은 시간에 따라 주기가 점점 길어지는 특징을 보인다(Bathe 등, 1973). 유한 요소법을 사용한 동적해석에서는 이와 같은 시간적분에 따른 주기오차가 확연히 나타나지만, MLS 차분법에서는 유한요소법에 비해 주기가 정해와 훨씬 가깝게 거동했다. 이를 입증하기 위해 제4장에서는 수치예제를 통해 explicit 방법과 implicit 방법의 주기오차를 포함한 해석의 정확성을 검증하고 개발된 알고리즘의 계산 효율성도 함께 분석했다.

3.3 지배방정식의 이산화(discretization)

앞서 제시한 지배방정식(식 (9), (15), (20))들을 식 (6)의 근사미분을 이용해 각각 이산화하여 차분식을 만들고 조합하면 하나의 계방정식으로 통합할 수 있다. 식 (20)과 같은 운동방정식을 이산화하기 위해 변위의 2차 미분을 포함한 계산이 필요하고, 식 (15)와 같은 자연경계조건식에서는 변위에 대한 1차 미분을 포함한 계산이 필요하다. 2차원 문제의 경우, 운동방정식의 미분연산자 \mathcal{L} 를 아래와 같이 $\mathbf{L}_I(\mathbf{x}_j)$ 행렬식으로 이산화하여 정리할 수 있다.

$$\mathbf{L}_I(\mathbf{x}_j) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\phi_I^{[2,0]}(\mathbf{x}_j) & (\lambda + \mu)\phi_I^{[1,1]}(\mathbf{x}_j) \\ +\mu\phi_I^{[0,2]}(\mathbf{x}_j) & \\ (\lambda + \mu)\phi_I^{[1,1]}(\mathbf{x}_j) & \mu\phi_I^{[2,0]}(\mathbf{x}_j) \\ +(\lambda + 2\mu)\phi_I^{[0,2]}(\mathbf{x}_j) & \end{pmatrix} \quad (21)$$

절점 단위로 이산화된 영역에 대한 차분식을 구성하기 위해, 임의의 절점 \mathbf{x}_j 에서 지배방정식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{I=1}^N \begin{pmatrix} K_I^{11}(\mathbf{x}_j) & K_I^{12}(\mathbf{x}_j) \\ K_I^{21}(\mathbf{x}_j) & K_I^{22}(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{I_x}^{n+1} \\ u_{I_y}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x^{n+1}(\mathbf{x}_j) \\ F_y^{n+1}(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix} \quad (22)$$

여기서, I 는 \mathbf{x}_j 의 영향영역에 포함된 절점들의 번호이다. $K_I^{ij}(\mathbf{x}_j)$ 와 $F_i(\mathbf{x}_j)$ 는 이산화하려는 지배방정식에 따라 다른 값을 취한다. 예를 들어, $F_x(\mathbf{x}_j)$ 와 $F_y(\mathbf{x}_j)$ 는 대상 지배방정식에 따라 각 방향에 대한 history항, 표면력, 변위경계값들을 포함하는 값이 될 수 있다. 모든 절점에 대해서 각각의 이산화된 차분식을 조합하면 다음과 같은 전체 계방정식을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (23)$$

여기서, \mathbf{U} 는 모든 절점의 절점해를 포함하는 벡터이다. 전술

했듯이, $K_I^{ij}(\mathbf{x}_j)$ 와 $F_i(\mathbf{x}_j)$ 는 \mathbf{x}_j 점이 속한 영역의 지배방정식에 따라 그 값이 달라지는데, 내부영역과 자연경계 및 필수경계에 속하는 지배방정식의 종류에 따른 $K_I^{ij}(\mathbf{x}_j)$ 는 식 24과 같다.

$$K_I^{ij}(\mathbf{x}_j) = \quad (24a)$$

$$\begin{cases} K_I^{11}(\mathbf{x}_j) = \phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x}_j) - \frac{\Delta t^2 \beta}{\rho} L_I^{11}(\mathbf{x}_j) \\ K_I^{12}(\mathbf{x}_j) = K_I^{21}(\mathbf{x}_j) = -\frac{\Delta t^2 \beta}{\rho} L_I^{12}(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \text{ in } \Omega \\ K_I^{22}(\mathbf{x}_j) = \phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x}_j) - \frac{\Delta t^2 \beta}{\rho} L_I^{22}(\mathbf{x}_j) \end{cases}$$

$$K_I^{ij}(\mathbf{x}_j) = \quad (24b)$$

$$\begin{cases} K_I^{11}(\mathbf{x}_j) = (\lambda + 2\mu)\phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}_j)n_x + \mu\phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}_j)n_y \\ K_I^{12}(\mathbf{x}_j) = \lambda\phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}_j)n_x + \mu\phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}_j)n_y \\ K_I^{21}(\mathbf{x}_j) = \mu\phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}_j)n_x + \lambda\phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}_j)n_y \\ K_I^{22}(\mathbf{x}_j) = \mu\phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}_j)n_x + (\lambda + 2\mu)\phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}_j)n_y \end{cases}, \mathbf{x}_j \text{ on } \Gamma_t$$

$$K_I^{ij}(\mathbf{x}_j) = \quad (24c)$$

$$\begin{cases} K_I^{11}(\mathbf{x}_j) = K_I^{22}(\mathbf{x}_j) = \phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x}_j) \\ K_I^{12}(\mathbf{x}_j) = K_I^{21}(\mathbf{x}_j) = 0 \end{cases}, \mathbf{x}_j \text{ on } \Gamma_u$$

$F_i(\mathbf{x}_j)$ 는 식 (25)와 같다.

$$\begin{pmatrix} F_x(\mathbf{x}_j) \\ F_y(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix} \quad (25a)$$

$$= \frac{\Delta t^2}{\rho} \sum_{I=1}^N \left\{ \mathbf{L}_I(\mathbf{x}_j) \left(\left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \begin{pmatrix} u_{I_x}^n \\ u_{I_y}^n \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \begin{pmatrix} u_{I_x}^{n-1} \\ u_{I_y}^{n-1} \end{pmatrix} \right) \right\} + 2 \begin{pmatrix} u_{J_x}^n \\ u_{J_y}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{J_x}^{n-1} \\ u_{J_y}^{n-1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_j \text{ in } \Omega$$

$$\begin{pmatrix} F_x(\mathbf{x}_j) \\ F_y(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}_x(\mathbf{x}_j) \\ \bar{t}_y(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_j \text{ on } \Gamma_t \quad (25b)$$

$$\begin{pmatrix} F_x(\mathbf{x}_j) \\ F_y(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_x(\mathbf{x}_j) \\ \bar{u}_y(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_j \text{ on } \Gamma_u \quad (25c)$$

식 (24b)에서 n_x 와 n_y 는 각 방향의 단위수직벡터이다. 결국 식 (24a)는 운동방정식 식 (20)의 계수를, 식 (24b)는 자연경계조건식 식 (15)의 계수를, 식 (24c)는 필수경계조건 식 (9)의 계수값을 각각 나타낸다. 만약, $\beta=0$, $\gamma=0.5$ 를 대입하면 운동방정식 식 (20)을 explicit 형태로 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\sum_{I=1}^N \begin{pmatrix} \phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x}_j) & 0 \\ 0 & \phi_I^{[0,0]}(\mathbf{x}_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{Ix}^{n+1} \\ u_{Iy}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$= \frac{\Delta t^2}{\rho} \sum_{I=1}^N \left\{ \mathbf{L}_I(\mathbf{x}_j) \begin{pmatrix} u_{Ix}^n \\ u_{Iy}^n \end{pmatrix} \right\} + 2 \begin{pmatrix} u_{Ix}^n \\ u_{Iy}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{Ix}^{n-1} \\ u_{Iy}^{n-1} \end{pmatrix}$$

초기변위를 0으로 한 상태에서 전체 계방정식을 계산하여 다음 단계 변위를 구하는 과정을 반복하여 동적해석을 수행할 수 있다. 이때, 이전 단계의 변위에 대한 history 값들과 매 시간단계의 하중경계 및 변위경계 값을 적용해야 된다. 계산된 변위를 바탕으로 식 (16)과 (17)을 이용하여 $n+1$ 단계에서 속도 및 가속도를 update 할 수 있다.

변형률과 응력은 적합방정식과 구성방정식으로부터 직접 계산할 수 있다. 변형률은 적합방정식 식 (11)을 아래와 같이 이산화하여 구한다.

$$\varepsilon_{xx} = \sum_{I=1}^N \phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}) u_{Ix} \quad (27a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \sum_{I=1}^N \phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}) u_{Iy} \quad (27b)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \sum_{I=1}^N \phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}) u_{Iy} + \sum_{I=1}^N \phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}) u_{Ix} \quad (27c)$$

식 (27a)~(27c)에서 얻은 변형률들을 구성방정식 식 (10)에 적용하여 다음과 같이 응력값을 계산한다.

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \sum_{I=1}^N \phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}) u_{Ix} + \lambda \sum_{I=1}^N \phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}) u_{Iy} \quad (28a)$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \sum_{I=1}^N \phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}) u_{Iy} + \lambda \sum_{I=1}^N \phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}) u_{Ix} \quad (28b)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\sum_{I=1}^N \phi_I^{[1,0]}(\mathbf{x}) u_{Iy} + \sum_{I=1}^N \phi_I^{[0,1]}(\mathbf{x}) u_{Ix} \right) \quad (28c)$$

4. 수치 예제

4.1 고정단을 갖는 1차원 보의 진동

고체역학의 동적문제를 해석할 수 있도록 개발한 MLS 차분법 알고리즘을 수치예제들을 통하여 검증하였다. 첫 번째 예제는 그림 1과 같은 충격하중을 받는 1차원 캔틸레버 보 문제이다. 정해(exact solution)는 Clough 등(1975)을 참고할 수 있다. 단순보를 모형화하기 위하여 21개의 절점을 사용했으며, ρ 는 $7.24 \times 10^{-4} \text{ lb/in}^3$ 이고, E 는 $30 \times 10^6 \text{ psi}$ 로 가정했다. 보 해석시 시간단계 Δt 는 $2 \times 10^{-5} \text{ sec}$ 로 적용하고,

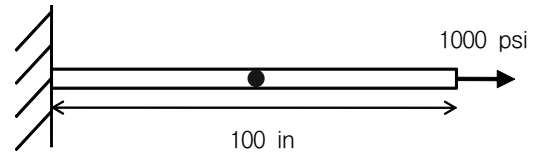


그림 1 고정단을 갖는 1차원 보 문제

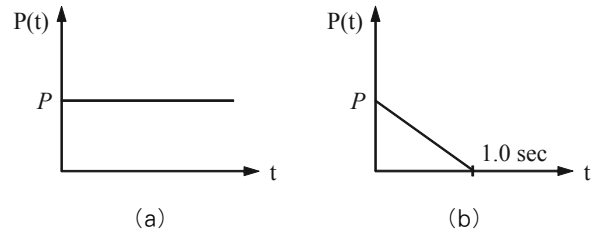


그림 2 충격하중 함수

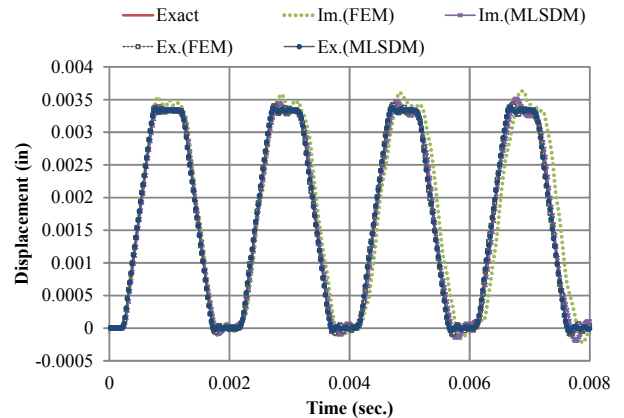


그림 3 시간에 따른 변위 계산결과 비교(1차원 보 문제)

충격하중은 그림 2(a)처럼 시간에 따라 일정하게 적용시켰으며, 2차(quadratic) 기저함수를 사용했다. Explicit, implicit 방법을 사용하여 얻은 단순보 중앙점에서 변위와 속도를 정해 및 유한요소법 해석결과와 비교하여 그림 3, 4에 도시했다. 여기서, explicit는 $\beta=0, \gamma=0.5$ 를 사용하였고, implicit는 $\beta=0.25, \gamma=0.5$ 를 사용했다. 그림 3과 4에서 보듯이 같은 시간적분 알고리즘을 사용할 경우, 본 연구에서 개발된 MLS 차분법이 유한요소법보다 변위와 속도의 계산결과에 있어서 정해에 더 가까운 결과값을 보여준다. 또한, 그림 3의 implicit 유한요소법의 변위 결과는 주기가 길어지는 주기오차가 발생하고 있으나, MLS 차분법의 결과는 정해와 좀 더 가깝게 주기를 유지하고 있다. 그림 4의 속도계산 결과를 보면 MLS 차분법의 정확도가 가장 우수한 것으로 나타나는데 이것은 변위에 대한 해석결과의 정확성이 우수하다는 것을 간접적으로 확인시켜 준다. 그림 5에서는 시간단계를 1000번 진행시킬 때까지 explicit와 implicit 방법의 계산시

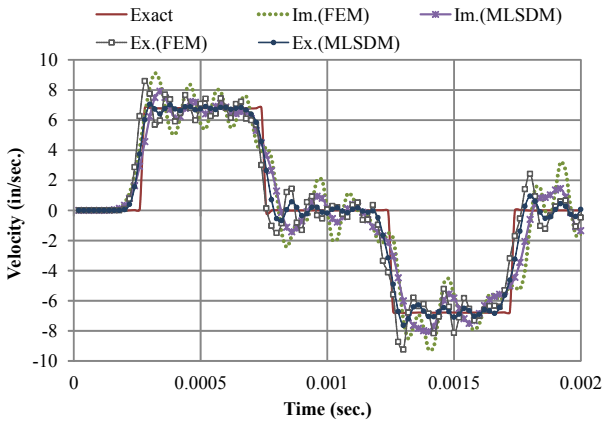


그림 4 시간에 따른 속도 계산결과 비교(1차원 보 문제)

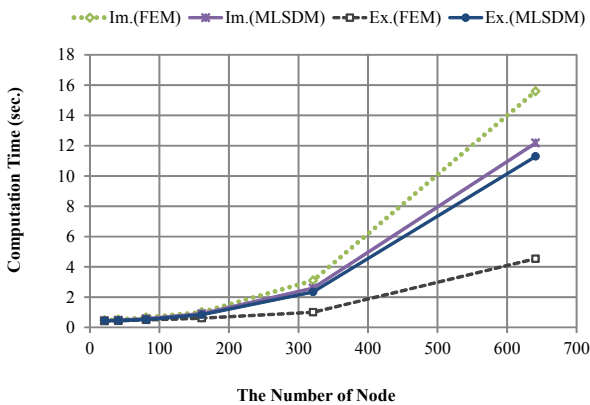


그림 5 절점 수 증가에 따른 계산시간 비교(1차원 보 문제)

간이 전체 절점개수가 증가할 때 어떻게 변화하는지 유한요소법과 MLS 차분법을 비교했다. 수치적분 과정이 없는 MLS 차분법과 동등한 조건에서 비교하기 위해 유한요소법의 수치적분과 관련된 부분은 계산시간에 포함시키지 않았다. 유한요소법의 경우, lumped 질량행렬을 사용했기 때문에 explicit 방법에서는 K의 역행렬 계산시간이 대폭 감소하여 절점의 수가 증가하여도 계산시간이 크게 증가하지 않는다. MLS 차분법의 경우는 explicit와 implicit 방법 사이에서 식 (24a)의 β 를 포함하고 있는 항만큼의 계산량 차이가 발생하지만 그 차이가 크지 않았고, 두 방법 모두 implicit 유한요소법보다는 계산시간이 적게 걸렸다.

4.2 2차원 캔틸레버 보(beam)의 진동

대표적인 캔틸레버 보 문제(Timoshenko 등, 1970)를 통해 2차원 동적해석에 대한 MLS 차분법의 정확성을 검토하였다. 기본적으로 MLS 차분법에서 Taylor 다항식의 차수를 올리는 것이 매우 용이하기 때문에 2차 다항식과 함께 3차 다항식(cubic)도 함께 고려하여 결과를 비교했다. 캔틸레

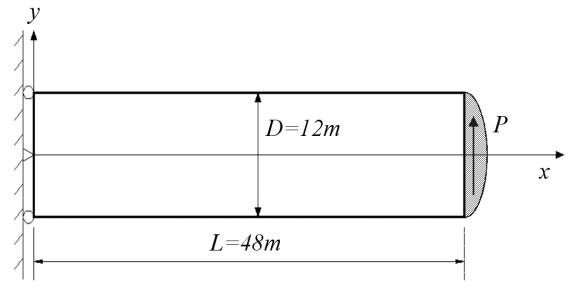


그림 6 2차원 캔틸레버 보 문제

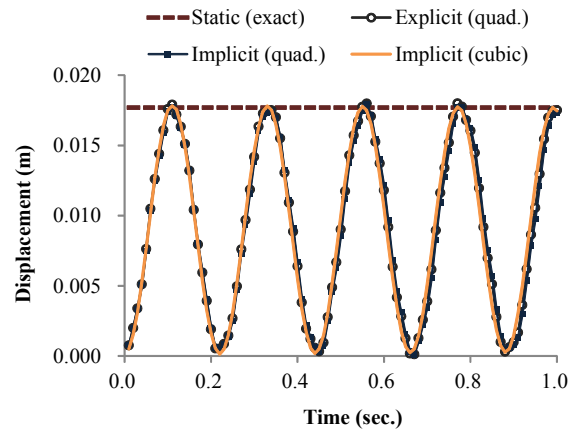


그림 7 시간에 따른 변위 계산결과 비교 (2차원 보 문제, 그림 2(a)하중 적용)

버 보의 2차원 형상은 그림 6과 같다. 총 45개(9×5)의 절점을 이용하여 모델링했다. 평면응력을 가정했으며, 탄성계수는 $E=3 \times 10^7 \text{N/m}^2$, 포아송 비 $\nu=0.3$, 밀도 $\rho=1 \text{kg/m}^3$, 시간단계 $\Delta t=5 \times 10^{-4}$ 적용했다. 자유단에 $P=1000 \text{N}$ 수직력에 대한 결과로 나타나는 포물선 형태의 표면력을 작용시켰으며, 그림 2의 두 가지 하중형태를 모두 적용했다. 본 예제는 동적해석에 대한 정해가 없기 때문에 정적해석의 정확해를 기준값으로 고려했다. 자유단 중앙점의 변위를 대상으로 하여 그림 2(a)와 같이 시간이 경과할 때 하중값을 일정하게 유지하는 경우에 대한 y방향 변위를 그림 7에 도식했다. 2차(quadratic)와 3차(cubic) 기저함수를 이용한 해석결과를 비교했다. Δt 를 같게 놓았을 때, explicit와 implicit 방법의 quadratic 결과 값이 거의 비슷하게 나타나고 있으며, 시간에 따른 변위의 진폭이 정적해석 값($2 \times u_y^{static}=0.0178$)과 잘 일치하고 있다. Implicit 방법의 시간적분과 cubic 기저함수를 사용한 경우의 결과값이 quadratic 결과값보다 안정적인 거동을 보이고 있다. 또한, 모든 경우에 대해 주기가 대체로 잘 유지되고 있다. 그림 8은 그림 2(b)와 같은 순간적인 충격하중이 가해졌을 때, quadratic과 cubic 기저함수를 이용하여 해석한 결과이다. 해석의 안전성을 확인하기 위

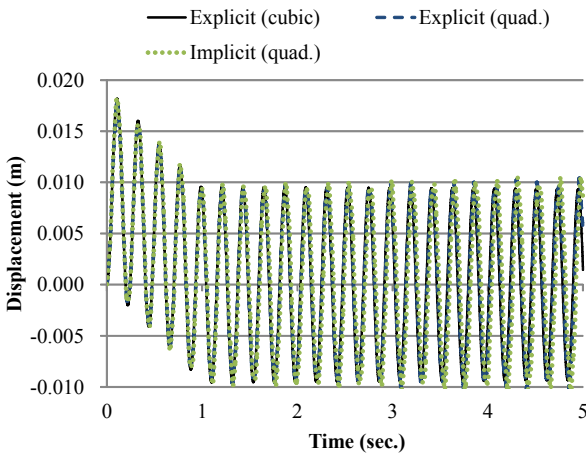


그림 8 Transient load에 의한 변위 계산결과 (2차원 보 문제, 그림2(b)하중 적용)

하여 충분히 긴 시간(5.0 sec)까지 해석을 수행했다. 하중이 0이 되는 1초 이후로 자유진동 상태가 되는 것을 확인할 수 있다. Cubic 기저함수에 의한 해석결과가 quadratic 기저함수의 결과보다 안정적인 진폭을 보여주고 있다.

4.3 일정하게 힘을 받는 직사각형 조각(strip)

그림 9와 같이 세 면이 롤러로 고정되어 있고, 상단에 등분포하중을 받는 직사각형 조각문제를 해석하였다(Dominguez, 1993). 상단에 작용하는 등분포하중 P 는 그림 2(a)처럼 시간에 따라 일정하게 작용시켰고 시간단계 Δt 는 4×10^{-4} sec를 적용하였다. 평면 변형률 상태를 가정하고, 231개(11×21)의 절점으로 모델링했다. 그림 10은 하중이 작용하는 상단 A점에서 시간에 따른 변위의 변화를 나타내고 있으며, explicit 방법과 implicit 방법에 의한 해석값을 이론해와 비교했다. 앞의 예제와 마찬가지로 동일한 Δt 에 대해 explicit 방법과 implicit 방법의 결과값이 비슷한 양상을 보였다. 바닥면 B점의 시간에 대한 응력변화는 그림 11에 도시했다. 응력값의 비교를 위해 상용 소프트웨어인 ANSYS(ANSYS,

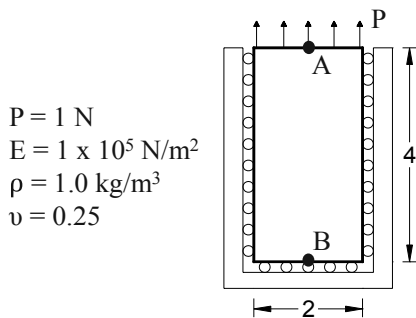


그림 9 2차원 직사각형 조각 문제

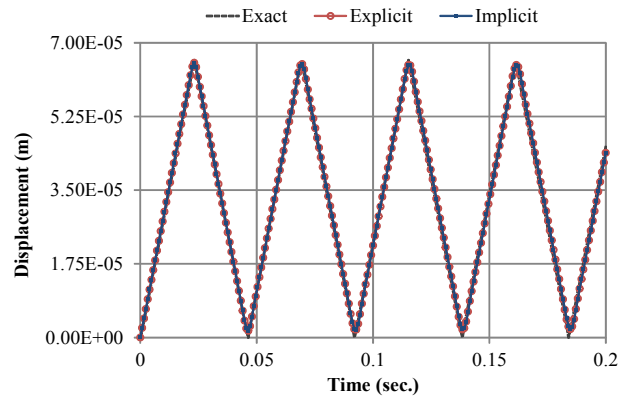


그림 10 A점에서의 시간에 따른 변위 계산결과 (직사각형 조각문제)

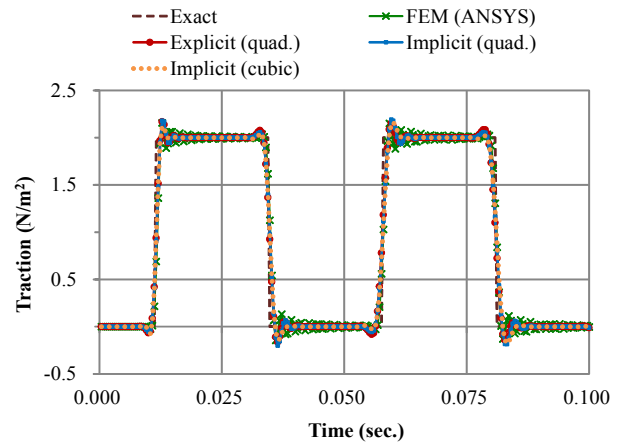


그림 11 B점에서의 시간에 따른 표면력(traction) 계산결과 (직사각형 조각문제)

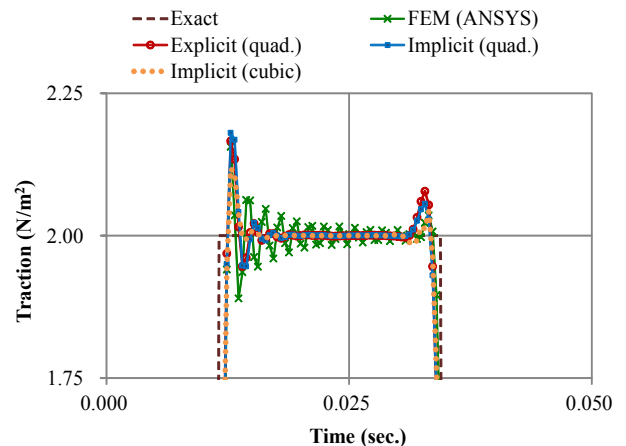


그림 12 표면력 계산결과(그림 11)의 특정부분 확대 (직사각형 조각문제)

2006)를 이용하여 Newmark 방법을 적용하고 4절점 요소를 사용한 유한요소해석 결과를 함께 도시했다. 그림 12는 그림 11의 응력변화 그래프에서 떨림현상(oscillation)이 집중적으로 발생하는 특정부분을 확대한 것으로 MLS 차분법

을 이용한 해석결과가 유한요소법에 뒤지지 않으면서 정해에 근접해 있음을 확인할 수 있다. 응력변화가 급격한 모서리 부분에서 최대 응력값은 비슷하게 나타나지만, 떨림현상은 MLS 차분법의 결과가 유한요소법의 결과보다 더 안정적인 것으로 나타나고 있다. 또한, implicit 방법으로 Taylor 다항식의 차수를 3차로 올려 계산할 때의 결과는 2차 다항식 결과와 비교하여 떨림현상이 획기적으로 감소되면서 정해와 좀 더 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 요소 또는 요소망의 제약을 극복할 수 있는 무요소법의 장점을 극대화하기 위하여 이동최소제곱법과 Taylor 전개를 결합한 MLS 차분법을 기반으로 고체역학 문제 해석을 위한 동적해석 알고리즘을 제시하고 검증하였다. Newmark 방법을 이용하여 Navier 방정식을 시간적분하고, 수치적분 없이 강형식을 그대로 이산화하여 차분식을 구성했다. MLS 차분법은 이동최소제곱법으로 전개한 Taylor 다항식으로부터 미분근사식을 유도하여 수식전개나 프로그래밍이 간편하고 기저함수의 차수를 변화하는 것이 매우 용이하며 수학적으로 명료하다. 동적해석 알고리즘은 MLS 차분법이 본래 갖고 있던 장점들이 동적해석에서도 잘 발휘될 수 있도록 개발되었다.

MLS 차분법 동적해석 알고리즘에 의해 얻어지는 수치해의 안정성과 정확성을 검증하기 위하여 1차원, 2차원 벤치마크 예제들을 다루었다. 모든 문제에서 MLS 차분법의 수치해가 이론해와 잘 일치하였으며, 계산 효율성을 확보하면서 유한요소법에 뒤지지 않는 정확성을 얻었다. 특히, 미분계산을 수반하는 응력해석 결과를 통해서 미분근사의 정확도가 우수한 것을 확인할 수 있었고, 기저함수의 차수 증가를 통해 해석의 정확성을 높일 수 있음을 확인하였다. 또한, 유한요소법의 해석결과와 비교하였을 때 시간적분 알고리즘으로 인해 발생하는 주기오차의 영향도 줄일 수 있음을 확인했다.

강정식화를 근간으로 하는 MLS 차분법의 특징상 explicit 방법이라 할지라도 전체 계방정식을 풀기 위해 강성행렬의 역행렬계산을 피할 수 없다. 결과적으로 MLS 차분법을 이용하여 동적해석을 수행할 경우, explicit 방법과 implicit 방법의 계산 효율성의 차이가 크지 않아, 안정성(stability)의 문제가 없는 implicit 방법을 사용하는 것이 더 합리적인 선택이다. 1차원 예제를 통해 본 연구방법을 유한요소법과 비교한 결과, explicit 유한요소법의 효율성에는 미치지 못했지만 implicit 유한요소법 보다는 우수한 계산효율성을 보였다. 이러한 차이는 본 수치해석기법이 수치적분을 생략한 이점이

있지만, explicit 방법의 경우에도 역행렬 계산을 피할 수 없는 단점으로 인한 trade-off에 기인하며 다차원 문제에 적용되면 더 분명하게 나타날 것이다. 한편, 계산량의 큰 증가 없이 근사함수의 차수를 증가시킬 수 있기 때문에 효율성의 급격한 희생 없이도 계산결과와 정확성을 효과적으로 향상시킬 수 있다는 것은 또 다른 이점이 될 수 있다. 다만, MLS 차분법이 요소(element)의 강점을 살릴 수 있는 얇고 긴 형상을 갖는 보, 판(plate) 문제에서 유한요소법과 같이 잘 작동할지는 아직 밝혀지지 않았으며, 특히 곡면판(shell)에 대해 MLS 차분법의 형상함수 계산이 쉽지 않을 것으로 예상된다. 또한, 향후 추가적인 연구를 통해 본 연구를 비선형 재료모델을 포함하는 균열전파 시뮬레이션 기법까지 확장하고자 한다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0006050)

참 고 문 헌

- 윤영철, 김도완 (2009a) 확장된 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 이동경계문제의 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 22(4), pp.315~322.
- 윤영철, 김동조, 이상호 (2007a) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.321~327.
- 윤영철, 김효진, 김동조, 왕 캬 리우, 테드 벨리치코, 이상호 (2007b) 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 응력집중문제 해석(1): 고체문제의 정식화, 한국전산구조공학회 논문집, 20(4), pp.493~499.
- 윤영철, 이상호 (2009b) 계면경계를 갖는 포텐셜 문제 해석을 위한 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법, 한국전산구조공학회 논문집, 22(5), pp.411~420.
- ANSYS (2006) ANSYS 11.0 Theory Reference.
- Bathe, K.J., Wilson, E.L. (1973) Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, pp.283~291.
- Belytschko, T., Organ, D., Gerlach, C. (2000) Element-free Galerkin Methods for Dynamic Fracture in Concrete, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187, pp.385~399.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994) Element-free Galerkin Methods, *International Journal for*

- Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.
- Belytschko, T., Tabbara M.** (1996) Dynamic Fracture using Element-free Galerkin Methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp.923~938.
- Clough, R.W., Penzien J.** (1975) *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill.
- Dominguez, J.** (1993) *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications.
- Gu, Y.T., Liu, G.R.** (2005) A Meshfree Weak-Strong (MWS) form Method for Time Dependent Problems, *Computational Mechanics*, 35(2), pp.134~145.
- Kim, D.W., Kim, Y.S.** (2003) Point Collocation Methods using the Fast Moving Least-Square Reproducing Kernel Approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, pp.1445~1464.
- Lee, S.H., Yoon, Y.C.** (2004) Meshfree Point Collocation Method for Elasticity and Crack Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp.22~48.
- Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.** (1995) Reproducing Kernel Particle Methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.1421~1438.
- Newmark, N.M.** (1959) A Method of Computation for Structural Dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 85, pp.67~94.
- Perez-Gavilan, J.J, Aliabadi, M.H.** (2000) A Galerkin Boundary Element Formulation with Dual Reciprocity for Elastodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, pp.1331~1344.
- Sadeghirad, A., Kani, I.M., Rahimian, M., Astaneh, A.V.** (2009) A Numerical Approach Based on the Meshless Collocation Method in Elastodynamics. *Acta Mechanica Sinica*. 25, pp.857~870.
- Samaan, M.F., Rashed, Y.F.** (2007) BEM for Transient 2D Elastodynamics using Multiquadric Functions, *International Journal of Solids and Structures*, 44, pp.8517~8531.
- Timoshenko, S.P., Goodier, I.N.** (1970) *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 3rd Edition.
- Wen, P.H., Aliabadi, M.H.** (2008) An Improved Meshless Collocation Method for Elastostatic and Elastodynamic Problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, pp.635~651.

- 논문접수일 2011년 11월 24일
- 논문심사일
 - 1차 2011년 12월 11일
 - 2차 2012년 3월 2일
- 게재확정일 2012년 3월 26일