

조합하중을 받는 변단면 변화곡선 보의 기하 비선형 수치해석

Geometrical Non-linear Analyses of Tapered Variable-Arc-Length Beam subjected to Combined Load

이 병 구* 오 상 진** 이 태 은†
Lee, Byoung-Koo Oh, Sang-Jin Lee, Tae-Eun

요 지

이 연구는 조합하중을 받는 변단면 변화곡선 보의 기하 비선형 수치해석 방법에 관한 연구이다. 보의 좌단은 회전지점이고 우단은 마찰이 없는 활동(滑動)지점으로 지지되어 있어 하중이 작용하면 보의 축방향 길이가 증가하여 평형상태를 이룬다. 조합하중은 회전지점에 작용하는 모멘트 하중과 집중하중을 고려하였다. 보의 단면은 휨 강성이 부재축을 따라 함수적으로 변화하는 변단면으로 선택하였다. 이러한 보의 비선형 거동을 지배하는 연립 미분방정식을 Bernoulli-Euler 보 이론으로 유도하였다. 이 미분방정식을 반복법으로 수치해석하여 보의 정확탄성곡선을 산정하였다. 이 연구의 이론을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였다.

핵심용어 : 기하 비선형 해석, 변단면 보, 변화곡선 보, Bernoulli-Euler 보, 실험

Abstract

This paper deals with geometrical non-linear analyses of the tapered variable-arc-length beam, subjected to the combined load with an end moment and a point load. The beam is supported by a hinged end and a frictionless sliding support so that the axial length of the deformed beam can be increased by its load. Cross sections of the beam whose flexural rigidities are functionally varied with the axial coordinate. The simultaneous differential equations governing the elastica of such beam are derived on the basis of the Bernoulli-Euler beam theory. These differential equations are numerically solved by the iteration technique for obtaining the elastica of the deformed beam. For validating theories developed herein, laboratory scaled experiments are conducted.

Keywords : *geometrical non-linear analysis, tapered beam, variable-arc-length beam, Bernoulli-Euler beam, experiments*

1. 서 론

보는 기둥, 평판, 곡선 부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 정적 거동에 대한 연구가 많이 이루어졌다. 보는 수직하중에 대하여 휨에 저항하는 구조이므로 휨 거동에 관한 많은 연구들이 이루어졌지만 대부분 작은 처짐 이론에 의한 연구들이 대부분이다.

최근 재료공학의 발달로 탄성이 큰 재료로 이루어진 구조물이 가능하게 되어, 큰 처짐에 대해서도 구조적 안정성을 확보할 수 있게 되었다. 이러한 구조에서 작은 처짐 이론에 의한 선

형 구조해석은 큰 오차를 가져와 불합리하다. 이와 같은 관점에서 큰 처짐이 발생하는 구조에서는 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 구조물의 기하 비선형 해석이 필수적이다(이병구 등, 2009).

구조물의 비선형 거동에 관한 연구방법으로는 1) 정확형태해(closed form solution), 2) 급수해(series solution), 3) 수치해석해(numerical solution), 4) 실험해(experimental solution) 등 4가지 형태의 해들이 있다(Lee 등, 1993). 정확형태해는 미분방정식을 타원적분법(elliptical integration method)으로 풀어 정확탄성곡선(elastica)을 닫힌 해(closed

† 책임저자, 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 연구교수
Tel: 063-850-6718 ; Fax: 063-857-7204
E-mail: telee@wku.ac.kr

* 중신회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 중신회원 · 전남도립대학 토목환경과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2012년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2012년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

solution)의 함수식으로 산출한다. 이 방법은 매우 난해하기 때문에 대상 구조물이 등단면이고, 초기 경계조건이 모두 알려져 있는 캔틸레버 보와 같이 간단한 형태의 기하 비선형 해석에 국한되고 있다(Rojahan, 1968; Solano, 2009; Jan, 2010). 이 방법은 미지변수가 3개인 구조에서는 그 해석 방법이 알려져 있지 않다. 급수해는 정확탄성곡선 식을 급수의 형태로 나타내고 미지계수를 대수적 방법으로 푸는 방법이다. 이해 역시 급수항을 작게 취하면 해를 용이하게 산정할 수 있지만 그 정도는 매우 떨어진다. 공학적으로 허용될만한 정도의 해를 얻기 위해서는 매우 많은 급수항을 필요로 하며 이 경우에는 미지계수를 얻기가 불가능하다(Lau, 1982; Liao, 2009). 수치해석해는 부정정력을 미지수로 휨 모멘트 식을 산정하고, 이식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하고 경계조건을 이용하여 부정정력을 산정하는 방법이다. 이 방법에 의한 캔틸레버 보에 대한 연구로는 Dado와 Al-Sadder (2005), Yi(2011) 등의 논문이 있고, 기동에 관한 기하 비선형 거동을 수치해석법으로 연구한 논문으로는 Jung과 Kang (2005), Lee 등(2006), Huang 등(2011) 등의 연구를 들 수 있다. 뼈대구조에 관한 비선형 해석 논문으로는 Shatarat 등(2009)의 연구가 있다. 실험적 연구에는 Wilson 등(1971), 안대순(2006)의 논문을 들 수 있으며, 앞에서 언급한 1), 2), 3)의 이론적 연구의 검증에 이용되고 있다.

이 논문은 조합하중을 받는 변단면 기하 비선형 보의 수치해석에 관한 연구이다. 보의 좌단은 회전지점이고 우단은 마찰이 없는 활동지점으로 지지되어 있어 하중이 작용하면 보의 축방향 길이가 증가하여 평형상태를 이룬다. 조합하중은 회전지점에 작용하는 모멘트 하중과 집중하중을 고려하였다. 보의 변단면은 휨 강성이 부재축을 따라 함수적으로 변화하는 변단면으로 선택하였다. 이러한 보의 비선형 거동을 지배하는 연립 미분방정식을 Bernoulli-Euler 보 이론으로 유도하였다. 이 연구에서 보의 축방향 길이는 변화하는 반면에 시간길이는 변화하지 않기 때문에 미분방정식을 수평방향 좌표인 x 에 관한 미분방정식으로 유도하였다. 이 보의 미분방정식은 양단 회전각을 미지변수로 갖게 된다. 앞의 연구동향에서 언급한 수치해석해는 1개의 미지변수를 갖는 비선형 보이므로 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi법으로 미지변수를 산정할 수 있다. 2개 이상의 미지변수를 갖는 비선형 보의 Regula-Falsi법으로는 해석이 불가능하다. 이 연구에서는 보의 우단에서의 경계조건들을 하나의 경계조건으로 통합하여 미지변수의 산정을 가능하게 하였다. 이 연구에서 개발한 이론을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였다. 이러한 관점에서 이 연구는 앞에서 분류한 3), 4)의 연구범주에 속한다. 이 연구에서 보의 재료는 선형 탄성체로,

보축은 비확장성으로 가정하였다.

2. 변단면 부재

그림 1은 시간길이가 l 인 변단면 보를 나타낸다. 부재좌단 A는 회전지점이고 우단 B는 활동지점이다. 부재는 지점 B를 지나 바깥쪽으로 연장되어 있어 하중이 작용하면 부재는 비확장성이므로 보의 축이 안쪽으로 증가하여 정확탄성곡선을 형성한다. 하중이 재하되기 이전에는 점선으로 그려진 수평방향 좌표 x 와 역시 점선으로 표현된 축방향 좌표 s 는 서로 일치한다. 좌측지점 $A(x=s=0)$ 에서 단면2차모멘트는 I_A 이고, 우측지점 $B(x=s=l)$ 에서 단면2차모멘트는 I_B 이다. 지점 A, B 사이의 임의점 s 에서 단면2차모멘트 I 는 함수식에 따라 변화하는 변단면을 채택하였다. 실선으로 표시된 정확탄성곡선의 s 축과 수평축인 x 축은 더 이상 일치하지 않기 때문에 $s=l(x<l)$ 에서 $I=I_B$ 이고, 지점 B인 $x=l(s>l)$ 에서 $I \neq I_B$ 이다. 축방향길이 s 에서 단면2차모멘트 I 를 함수식으로 나타내기 위하여 단면비 k 를 다음과 같이 정의한다.

$$k = \frac{I_B}{I_A} \tag{1}$$

변단면의 단면2차모멘트 I 는 어떠한 임의 함수식으로도 채택이 가능하지만, 각종 단면형상에 대하여 일반적으로 적용할 수 있기 때문에 많은 연구자들이 채택하고 있는 다음과 같은 변단면 식을 채택하였다(Gupta, 1985).

$$I = I_A \left[\left(k^{1/e} - 1 \right) \frac{s}{l} + 1 \right]^e \tag{2}$$

여기서, e 는 단면형상에 따라 결정되는 형상계수이며, 예로서 직사각형 단면인 경우에 e 는 다음과 같다.

$$e = 1: \text{ 폭 변단면} \tag{3a}$$

$$e = 3: \text{ 깊이 변단면} \tag{3b}$$

$$e = 4: \text{ 정방형 변단면} \tag{3c}$$

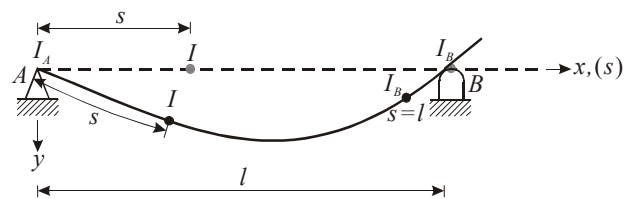


그림 1 정확탄성곡선 상에서 단면2차모멘트

3. 수학적 모형

3.1 Bernoulli-Euler 보 이론

그림 2는 모멘트하중 M_A 와 집중하중 P 를 받아 보가 평형상태를 이룬 정확탄성곡선의 변수를 나타낸다. 보의 지간 길이는 l 이고, P 의 재하위치는 a 이다. 좌단지점 A는 회전지점이고, 우단지점 B는 비확장성 때문에 부재축이 보의 안쪽으로 진행될 수 있는 활동지점이다. 따라서 이 보는 정확탄성곡선의 곡선길이가 하중의 크기에 따라서 변화하는 변화곡선 보이다. 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며, (x, y) 에서 곡선길이는 s 이고, 회전각은 θ 이다. N, Q, M 은 축방향력, 전단력 및 휨 모멘트를 나타낸다. (x, y, s) 에서 단면 2차모멘트 I 는 식 (2)에 표현되어 있다. 좌측지점 A에서 회전각, 수평반력, 수직반력은 θ_A, H_A, V_A 이다. 우측지점 B에서 회전각, 수직반력은 θ_B, R_B 이다. 지점 B는 마찰이 없는 활동지점이므로 R_B 는 정확탄성곡선의 접선에 대하여 연직으로 작용한다.

그림 2에서 평형방정식을 이용하여 회전각 θ_B 를 미지수로 반력 V_A, H_A, R_B 를 구하면 다음과 같다.

$$V_A = \frac{1}{l} [P(l-a) - M_A] \quad (4)$$

$$H_A = \tan\theta_B(P - V_A) \quad (5)$$

$$R_B = \frac{P - V_A}{\cos\theta_B} \quad (6)$$

식 (4)~(6)을 이용하여 합응력 N, Q, M 을 구하면 다음과 같다.

$$N = H_A \cos\theta - V_A \sin\theta, \quad 0 \leq x \leq a \quad (7a)$$

$$N = H_A \cos\theta + (P - V_A) \sin\theta, \quad a < x \leq l \quad (7b)$$

$$Q = -(H_A \sin\theta + V_A \cos\theta), \quad 0 \leq x \leq a \quad (8a)$$

$$Q = -[H_A \sin\theta + (V_A - P) \cos\theta], \quad a < x \leq l \quad (8b)$$

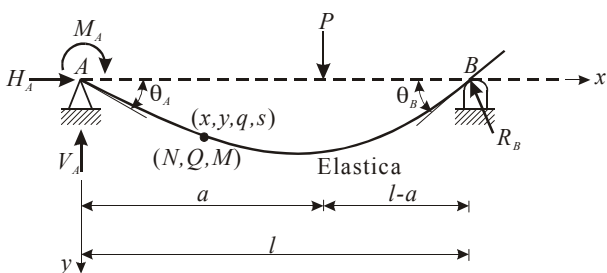


그림 2 정확탄성곡선의 매개변수들

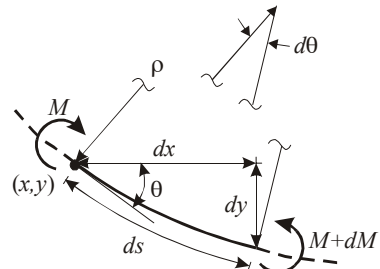


그림 3 Bernoulli-Euler 보의 요소

$$M = V_A x + \tan\theta_B(P - V_A)y + M_A, \quad 0 \leq x \leq a \quad (9a)$$

$$M = V_A x + \tan\theta_B(P - V_A)y - P(x - a) + M_A, \quad a < x \leq l \quad (9b)$$

그림 3은 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 정확탄성곡선의 미소요소에 대한 휨-곡률 관계를 나타낸다. 이 그림에서 ρ 는 곡률반경이다. 이 그림으로부터 다음과 같은 기하 비선형 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta, \quad 0 \leq x \leq l \quad (10)$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (12)$$

이 연구에서 지간길이 l 은 변화하지 않고 정확탄성곡선의 축방향길이는 변화하기 때문에 s 에 관한 미분방정식 보다는 위와 같이 x 에 관한 미분방정식으로 유도하는 것이 합리적이다.

식 (12)의 휨-곡률 관계식은 $ds = \rho d\theta$, $ds = dx / \cos\theta$ 의 기하적 관계와 식 (2), (9)를 이용하면 다음과 같이 x 에 관한 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{V_A x + \tan\theta_B(P - V_A)y + M_A}{EI_A \left[(k^{1/e} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^e \cos\theta}, \quad 0 \leq x \leq a \quad (13a)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{V_A x + \tan\theta_B(P - V_A)y + P(a - x) + M_A}{EI_A \left[(k^{1/e} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^e \cos\theta}, \quad a < x \leq l \quad (13b)$$

3.2 무차원 지배미분방정식

이 연구에서 기하 비선형 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \eta = \frac{y}{l}, \lambda = \frac{s}{l}, \alpha = \frac{a}{l} \quad (14) \sim (17)$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI_A}, m_A = \frac{M_A l}{EI_A} \quad (18), (19)$$

$$v_A = \frac{V_A l^2}{EI_A} = p(1 - \alpha) - m_A \quad (20)$$

$$h_A = \frac{H_A l^2}{EI_A} = (p - v_A) \tan \theta_B \quad (21)$$

$$r_B = \frac{R_B l^2}{EI_A} = \frac{p - v_A}{\cos \theta_B} \quad (22)$$

$$n = \frac{Nl^2}{EI_A}, q = \frac{Ql^2}{EI_A}, m = \frac{Ml}{EI_A} \quad (23) \sim (25)$$

여기서, $(\xi, \eta, \lambda, \alpha)$ 는 (x, y, s, a) 를 지간길이 l 로 정규화한 무차원 길이변수이며, 정확탄성곡선은 직교좌표계 (ξ, η) 에서 정의된다. (p, m_A) 는 무차원 하중이고, (v_A, h_A, r_B) 는 무차원 반력이고, (n, q, m) 은 무차원 합응력이다.

이제 식 (10), (11), (13)에 식 (14)~(25)의 무차원 변수를 대입하고 정리하면 변단면 변화곡선 기하 비선형 보의 정확탄성곡선을 지배하는 연립 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tan \theta, 0 \leq \xi \leq 1 \quad (26)$$

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{1}{\cos \theta}, 0 \leq \xi \leq 1 \quad (27)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{v_A \xi + \tan \theta_B (p - v_A) \eta + m_A}{[(k^{1/e} - 1)\lambda + 1] \cos \theta}, 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (28a)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{v_A \xi + \tan \theta_B (p - v_A) \eta + p(\alpha - \xi) + m_A}{[(k^{1/e} - 1)\lambda + 1] \cos \theta}, \alpha < \xi \leq 1 \quad (28b)$$

3.3 경계조건

유도한 식 (26)~(28)의 미분방정식을 수치해석하기 위해서는 경계조건이 필요하다. 먼저, $x=0$ 의 지점 A는 회전지점이므로 수직변위 $y=0$ 이고, 곡선길이 $s=0$ 이다. 식 (14)~(16)의 무차원 변수를 이용하면 $\xi=0$ 에서 다음과 같은 무차원 초기 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta_{\xi=0} = 0 \quad (29)$$

$$\lambda_{\xi=0} = 0 \quad (30)$$

위에서 유도한 미분방정식의 수치적분은 초기치 문제이므

로 $\eta_{\xi=0}, \lambda_{\xi=0}$ 뿐만 아니라 초기 회전각 $\theta_A (= \theta_{\xi=0})$ 의 경계조건도 알아야 한다. 경계조건 θ_A 는 알려져 있지 않기 때문에 미분방정식 (26)~(28)의 수치적분에서 θ_A 는 미지변수이다.

둘째로 $x=l$ 의 지점 B에서 수직변위 $y=0$ 이고 회전각은 $\theta_B (= \theta_{x=l})$ 이다. 식 (14), (15)의 무차원 변수를 이용하면 $\xi=1$ 에서 다음과 같은 무차원 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta_{\xi=1} = 0 \quad (31)$$

$$\theta_{\xi=1} = \theta_B \quad (32)$$

미분방정식에서 미지변수인 θ_B 는 수치해이기 때문에 식 (31), (32)의 경계조건을 정확하게 만족하는 해를 구할 수는 없다. 이 연구에서는 다음과 같은 2개의 수렴한계를 두고 2개의 미지변수 θ_A, θ_B 의 오차가 이 수렴조건들을 만족하면 최종 수치해로 확정하였다.

$$|\eta_{\xi=1}| \leq 1 \times 10^{-7} \quad (33)$$

$$|\theta_{\xi=1} - \theta_B| \leq 1 \times 10^{-7} \quad (34)$$

식 (33), (34)를 더하면 다음과 같은 통합오차 ER 의 수렴조건식을 얻을 수 있다.

$$ER = |\eta_{\xi=1}| + |\theta_{\xi=1} - \theta_B| \leq 2 \times 10^{-7} \quad (35)$$

식 (35)의 통합오차 ER 의 구성이 이 연구의 핵심내용 중에 하나이다.

4. 수치해석 예 및 토의

4.1 수렴해석

이 연구에서 유도한 연립 미분방정식 (26)~(28)의 수치적분은 초기치 문제이므로 지점 A($\xi=0$)에서 모든 초기조건 $\theta_A, \eta_{\xi=0}, \lambda_{\xi=0}$ 이 알려져 있어야만 수치적분을 할 수 있다. 식 (29), (30)의 경계조건에서와 같이 θ_A 는 알려져 있지 않으므로 수치적분을 시작할 수 없다. 미분방정식 속에 포함되어 있는 지점 B의 회전각 θ_B 도 미지수이다. 즉, 주어진 보의 입력조건 k, e, α, p, m_A 에 대해서 유도한 연립 미분방정식을 푸는 문제는 결국 식 (35)의 통합 수렴조건식을 만족하는 θ_A, θ_B 를 찾는 문제로 귀결된다.

연립 미분방정식 (26)~(28)을 풀기 위하여 수치적분은 Runge-Kutta 법(Carnahan 등, 1969)을 이용하였고, 2개

의 미지변수 θ_A, θ_B 는 반복법을 이용하여 산정하였다. Runge-Kutta 법에 의한 미분방정식의 수치적분은 다수의 문헌(Lee 등, 2006)에서 그 효율성이 입증된 바 있으므로 수치적분법의 기술은 생략한다.

미지변수 θ_A, θ_B 를 산정하기 위하여 이 연구에서 적용한 반복법의 계산과정은 다음과 같다.

- 1) 보의 조건 k, e, α, p, m_A 를 입력한다.
- 2) 먼저, 초기 회전각 θ_A 를 가정한다. 이때 θ_A 의 범위는 $0 < \theta_A < \pi/2$ 가 명백하므로 이 범위에서 θ_A 를 일정 증분 $\Delta\theta_A$ 씩 증가시키며 가정한다.
- 3) 둘째, 회전각 θ_B 를 가정한다. 이때 θ_B 의 범위는 $0 < \theta_B < \pi/2$ 가 명백하므로 이 범위에서 θ_B 를 일정 증분 $\Delta\theta_B$ 씩 증가시키며 가정한다. 이 연구에서 2), 3)의 단계에서 일정 증분 $\Delta\theta_A, \Delta\theta_B$ 의 값은 해당범위의 1/10로 채택하였다.
- 4) 이제, 미지변수 θ_A, θ_B 가 모두 정의되었으므로 식 (26)~(28)의 미분방정식을 $\xi=0$ 에서 $\xi=1$ 사이에서 수치적분을 시행한다.
- 5) 수치적분의 결과로 식 (35)의 통합오차 ER 을 산정한다.
- 6) 2)~5)의 반복시행에서 통합오차 ER 가 최소 통합오차 ER_m 을 갖게 되는 θ_A, θ_B 를 찾는다. 만일 산정된 ER_m 이 식 (35)를 만족하면 $(\theta_A, \theta_B), (\xi, \eta, \theta, \lambda), (n, q, m)$ 을 최종 수치해로 출력하고 해석을 종료한다.
- 7) ER_m 이 식 (35)를 만족하지 않으면 이전 단계보다 더 축소된 θ_A, θ_B 의 범위를 다음과 같이 새롭게 산정한다.

$$\theta_{Am} - \Delta\theta_A \leq \theta_A \leq \theta_{Am} + \Delta\theta_A \quad (36)$$

$$\theta_{Bm} - \Delta\theta_B \leq \theta_B \leq \theta_{Bm} + \Delta\theta_B \quad (37)$$
 여기서, θ_{Am}, θ_{Bm} 은 6)단계에서 결정된 ER_m 값을 갖는 θ_A, θ_B 이다.

- 8) 새롭게 축소된 범위 내에서 θ_A, θ_B 값을 이용하여 2)~8)의 과정을 반복 시행한다.

이상의 수치해석 방법은 3개의 미지변수를 갖는 기하 비선형 보의 수치해석에서도 동일하게 적용될 수 있음을 확인한 바 있다(이병구 등, 2011).

4.2 수치해의 수렴과정

이 절에서는 위에서 적용한 해석방법을 예제를 통하여 수치해석의 처리과정을 분석하였다. 해석 예에서 사용한 보의 무차원 입력변수는 다음과 같다.

- 단면비: $k=0.5$
- 형상계수: $e=1$ (직사각형의 폭 변단면)

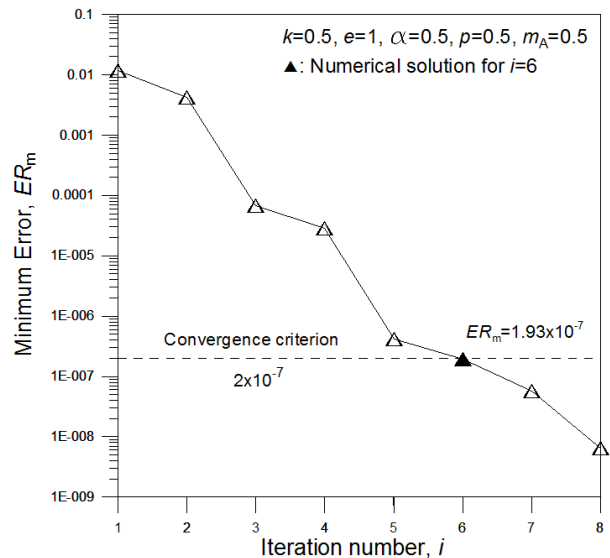


그림 4 반복회수 i 에 따른 ER_m 의 수렴과정

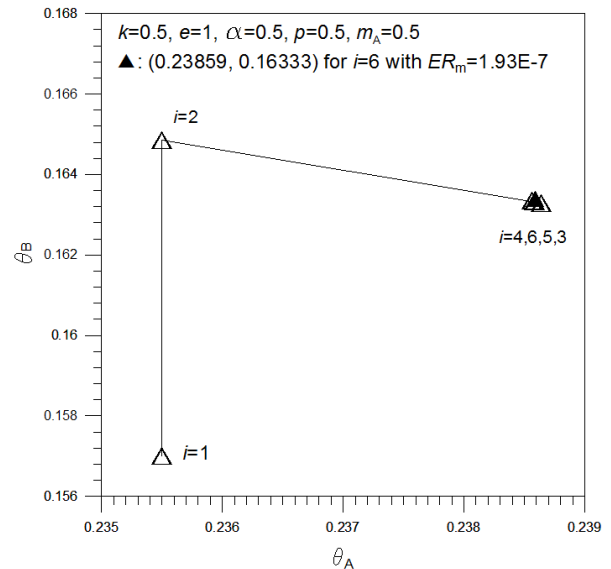


그림 5 반복회수 i 에 따른 θ_A 및 θ_B 의 수렴과정

- 집중하중: $\alpha=0.5, p=0.5$
- 모멘트 하중: $m_A=0.5$

위의 입력변수들을 이용하여 수치해석하고 그 처리과정의 결과를 분석하였다. 그림 4는 수치해석의 반복회수 i 에 따라 최소 통합오차 ER_m 이 최종 수치해에 도달하는 수렴과정을 보여준다. 반복회수 i 가 증가할수록 ER_m 값은 감소하고, $i=6$ 에서 ER_m 은 점선으로 나타낸 식 (35)의 통합오차의 수렴 한계인 2×10^{-7} 에 도달하였다. 이때 최소 통합오차는 그림 4에 나타낸 바와 같이 $ER_{m(i=6)}=1.93 \times 10^{-7}$ 을 보여주고 있다. $i=6$ 이후에도 ER_m 은 계속 감소하여 더 정확한 수치해를 찾을 수 있었다. 다른 입력변수들에 대해서도 수치해석을 실행한 결과, $i=5 \sim 7$ 회의 반복시행으로 미지변수 θ_A, θ_B 를

찾을 수 있었다. 한편, 식 (31), (32)에 나타낸 경계조건의 수렴과정을 동일한 방법으로 고찰한 결과, 이 그림과 매우 유사한 경향을 보여 식 (35)에 나타낸 통합오차가 식 (33), (34)에 나타낸 개별오차에 상호 지배적이지 않음을 알 수 있었다.

그림 5는 수치해석의 반복회수 i 에 따라 최종 수치해 θ_A, θ_B 에 도달하는 수렴과정을 보여준다. 반복회수 i 가 증가할수록 Δ 로 표시한 수치해는 \blacktriangle 로 표시한 최종 수치해에 점차 수렴하는 것을 볼 수 있다. 최종 수치해는 $i=6$ 에서 $\theta_A=0.23859, \theta_B=0.16333$ 로 산정되었다. 이 그림에서 보는 바와 같이 $i=3,4,5$ 의 수치해도 \blacktriangle 로 표시한 최종 수치해에 거의 수렴한 것을 알 수 있다.

4.3 수치해석 예 및 토의

이절에서는 보의 무차원 변수가 비선형 거동에 미치는 영향을 분석한다. 그림 6은 단면비 k 가 (a) 반력 및 (b) 변위의 거동에 미치는 영향을 나타낸다. 그림 상단에 수치해석에 이용한 보의 입력변수를 나타내었다. 그림 (b)에서 η_m, δ_λ 는 각각 다음 식과 같이 정의된다.

$$\eta_m = \eta_\lambda = \lambda_B/2 \tag{38}$$

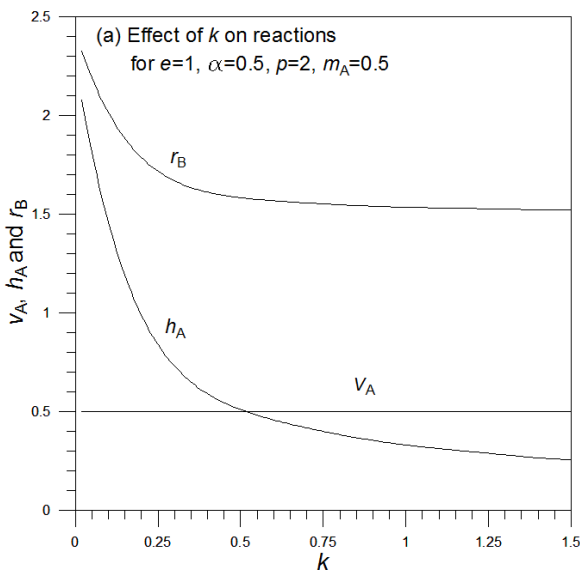
$$\delta_\lambda = \lambda_{\xi=1} - 1 \tag{39}$$

여기서, η_m 은 정확탄성곡선의 중앙에서 수직변위이고, δ_λ 는 정확탄성곡선 길이의 증가량이다.

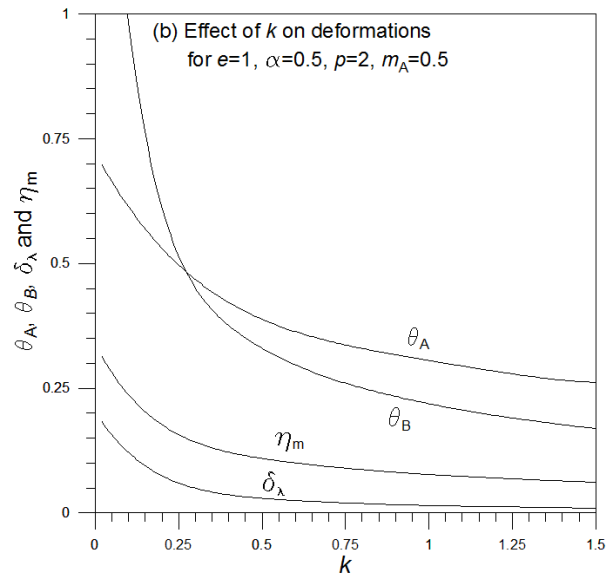
식 (20)에서와 같이 반력 v_A 는 k 와 독립적이고, $\alpha=0.5$ 이므로 $v_A=0.5$ 로 일정하다. k 가 증가함에 따라서 모든 비선형 거동값은 감소하며 그 감소율은 감소한다. 특히 r_B 의 경우에는 $k>0.5$ 의 구간에서는 거의 동일한 값을 나타낸다. δ_λ 도 $k>1$ 에서 감소율은 매우 작다. 이러한 관점에서 비선형 거동을 감소시키기 위하여 무조건 k 를 증가시키는 것은 불합리하다.

그림 7은 집중하중의 위치 α 가 (a) 반력 및 (b) 변위의 거동에 미치는 영향을 나타낸다. 반력 v_A 는 식 (20)에서와 같이 α 의 1차 함수이므로 선형거동을 하고, 그림 6에서와 같이 반력 v_A 를 제외하고는 모두 비선형 거동을 보인다. v_A, r_B 이외의 거동값은 모두 α 값이 증가함에 따라 증가하며 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. 최대 거동값은 구조물의 거동에 불리하게 작용하므로 이 그림을 이용하면 구조물 거동에 유리한 α 값을 선정할 수 있다.

그림 8은 집중하중 p 의 크기가 (a) 반력 및 (b) 변위의 거동에 미치는 영향을 나타낸다. 그림 (a)에서 반력 v_A 는 식 (20)에 보인 바와 같이 p 에 대한 1차함수이므로 선형거동을 하고, 반력 h_A, r_B 는 비선형 거동을 보인다. 특히 h_A 는 매우 강한 비선형성을 보인다. 그림 (b)에서 변위들도 모두 강한 비선형 거동을 보인다. 이 그림들 (a), (b)에서 비선형 거동의 곡선은 하중 크기가 증가함에 따라 거동값의 증가율이 더욱 증가하는 특징을 보이고 있다. 구조물의 일반적인 비선형 특성은 하중이 증가함에 따라 거동값의 증가율은 오히려 감소하는 특성과 비교된다. 따라서 집중하중을 서로 중첩시키는 경우에 비선형 거동값은 각각의 거동값을 합한 거동값보



(a) 반력



(b) 변위

그림 6 k의 영향

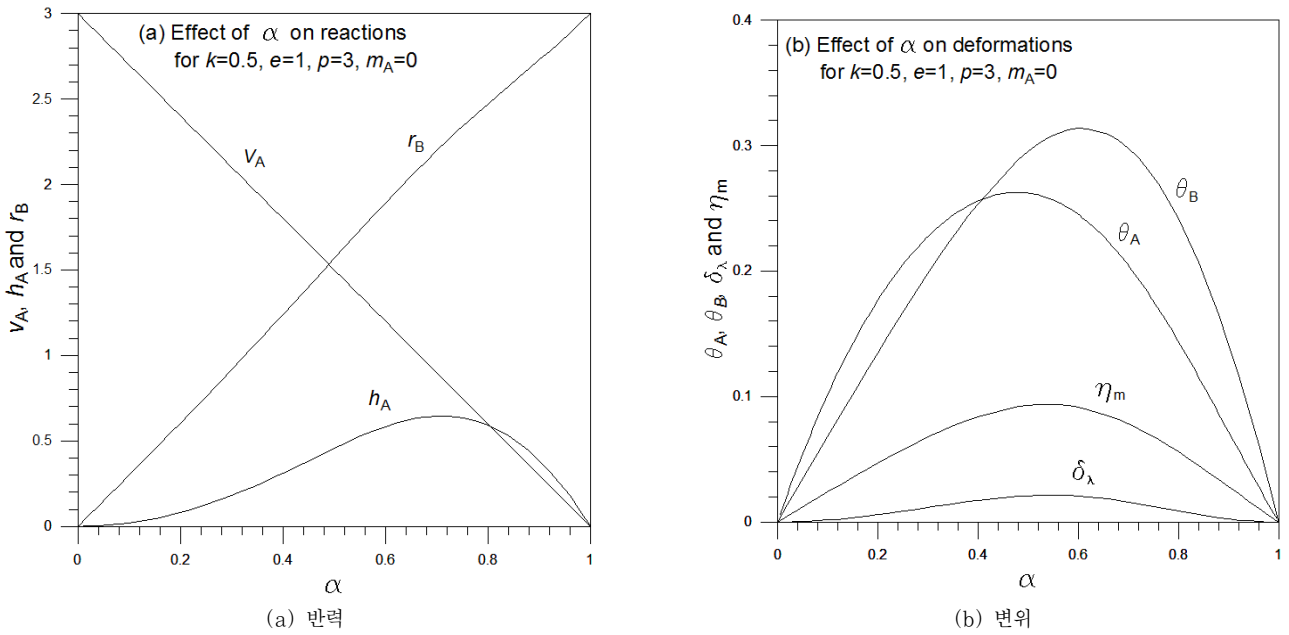


그림 7 α 의 영향

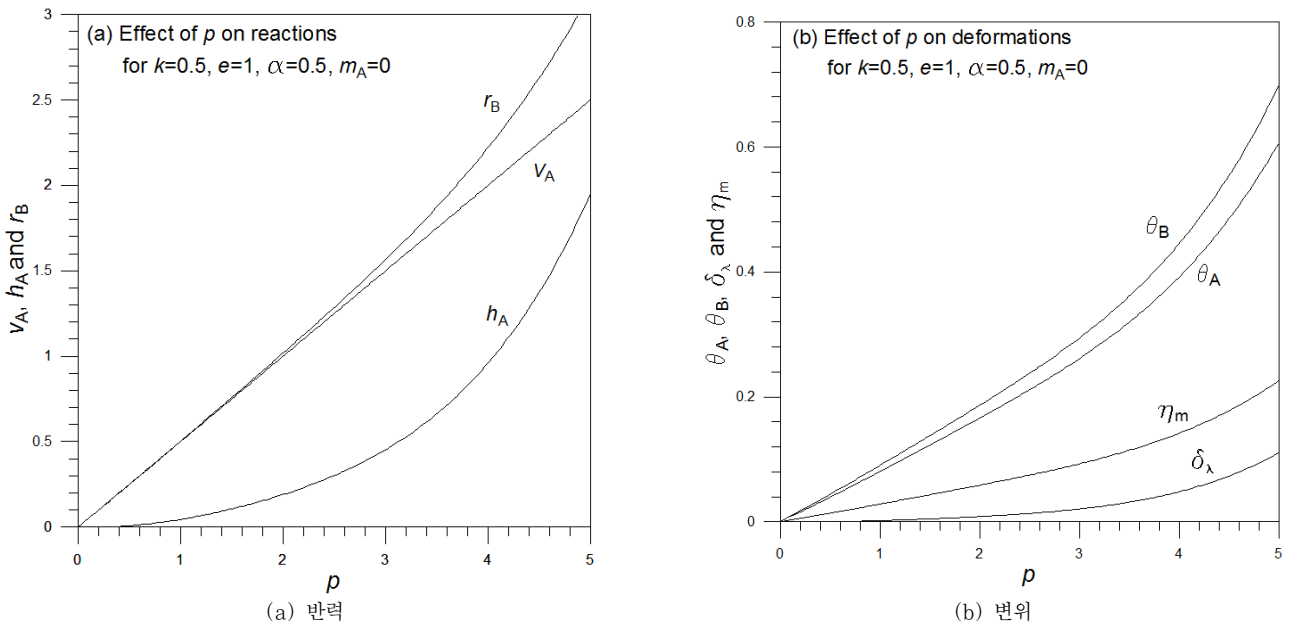


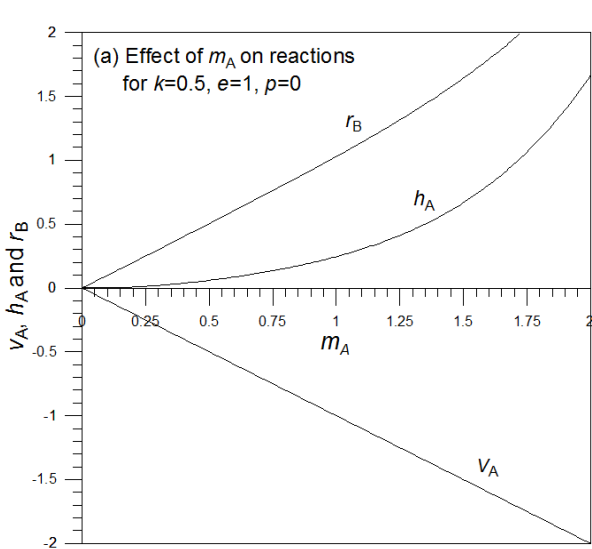
그림 8 p 의 영향

다 더 큰 거동값을 보이게 된다.

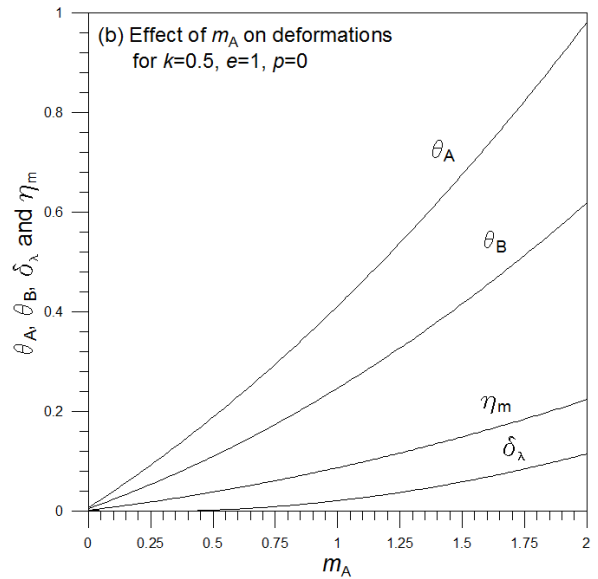
그림 9는 모멘트 하중 m_A 의 크기가 (a) 반력 및 (b) 변위의 거동에 미치는 영향을 나타낸다. 반력 v_A 는 식 (20)에 나타낸 바와 같이 m_A 에 대하여 1차식 이므로 선형거동을 하고 나머지는 모두 비선형 거동을 한다. 그림 8에서와 마찬가지로 그림 9(a), (b)에서도 비선형 거동의 곡선은 하중 크기가 증가함에 따라 거동값의 증가율이 더욱 증가하는 특징을 보이고 있다.

그림 10은 변화곡선 기하 비선형 보의 정확탄성곡선의 예

를 나타낸다. 그림 하단에 수치해석에 이용한 보의 입력변수를 나타내었다. 여기에 보인 보는 변화곡선 보이기 때문에 정확탄성곡선의 길이는 모두 “1”보다 크다. 참고로 정확탄성 곡선에 $\lambda=1$ 인 위치에 ▲ 표시를 하였다. 그림 하단에 정확탄성곡선의 길이 $\lambda_B(=\lambda_{\xi=1})$ 를 나타내었다. 예를 들어 곡선 C의 경우에 $\lambda_B=1.12668$ 이므로 $\delta_\lambda=0.12668$ 이고 $\xi=1$ 에서 ▲로 표시한 위치까지의 곡선길이이다. 이 그림에서 곡선 C의 하중은 곡선 A, B의 하중을 중첩한 하중이지만 그 변위의 거동값은 그림 5에서 이미 토의한 바와 같이 각각의 거



(a) 반력



(b) 변위

그림 9 m_A 의 영향

동값을 합한 값 보다 훨씬 크다. 즉, $\delta_{\lambda(C)} = 0.12668 > \delta_{\lambda(A)} + \delta_{\lambda(B)} = 0.00823 + 0.02005 = 0.02828$ 임을 확인할 수 있다. θ_A, θ_B, η 도 마찬가지로이다. 그러나 일반적인 구조물의 비선형 거동에서는 증첩한 값이 더 작아지는 구조적 특징을 보인다.

정확탄성곡선에 작용하는 합응력은 비선형 보의 단면을 설계하는 데 반드시 필요한 자료이다. 그림 11은 합응력 n, q, m 의 예를 나타낸다. 수치해석에 사용한 입력변수 값을 그림 하단에 나타내었다. 보의 단면을 설계하기 위해서는 수평방향 좌표 ξ 보다는 축방향 좌표인 λ 에 대한 합응력이 더 중요하다. 그림 11에서는 λ 좌표계에 대한 합응력도를 나타내었다. 먼저, 예상한 바와 같이 축방향력 n 은 모두 인장력을 나타내며, 양단 지점 A, B에서 최소이고, 그 크기가 증가하여 집중하중 작용점인 \blacktriangle 로 표시한 $\xi = \alpha = 0.5, \lambda = 0.56570$ 에서 그 값은 최대가 된다. 지점 B인 \bullet 로 표시한 $\xi = 1, \lambda_B = 1.12688$ 에서 n 은 당연히 "0"이 된다. 전단력 q 는 양단 지점인 A, B에서부터 그 크기가 감소하며, 집중하중 작용점에서 전단력의 단락현상을 보이고 있다. 단락의 크기는 예상한 바와 같이 하중 크기인 $p=2$ 와 일치한다. 휨 모멘트 m 은 양단지점인 A, B에서 최소가 되고 집중하중 작용점에서 최대가 되며, 모두 "+" 부호 즉, 상단압축의 휨 모멘트가 발생한다. $\xi=0$ 인 지점 A에서는 당연히 모멘트 하중과 같은 크기의 휨 모멘트가 발생한다.

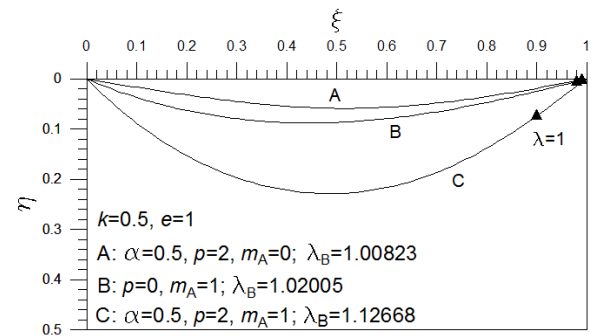


그림 10 정확탄성곡선의 예

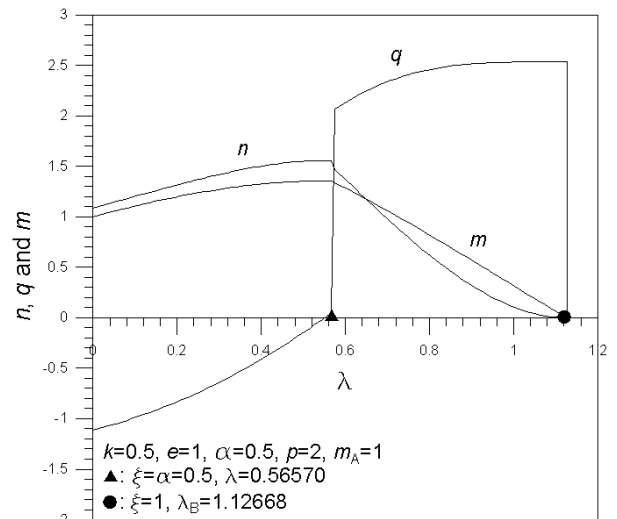


그림 11 축방향 좌표계 λ 에 대한 합응력도

5. 실험

이 연구에서 전개한 이론, 수치해석 방법 및 컴퓨터 프로

그램을 검증하기 위하여 [A], [B] 2조의 모형보를 제작하여 실험실 규모의 실험을 실시하고 비선형 거동값을 측정하였다. 실험에 사용한 재료는 모형실험에 적당한 휨 강성을 갖

는 플라스틱을 사용하였다. 보의 단면은 변단면의 제작이 용이한 변화폭 직사각형 단면을 채택하였다. 그림 12에 실험장치의 개략도를 나타내었다. 구조모형 실험들에 제작된 모형을 거치하였다. 그림 12에서 같이 집중하중의 재하는 중량추를 이용하여 구현하였고 모멘트 하중은 회전지점 A에 모멘트 팔을 장착하고 중량추로 구현하였다. 이때 지점 A에 발생하는 중량추의 무게인 수직반력은 $a=0$ 인 집중하중이 되므로 비선형 거동에 영향을 미치지 못한다. 하중은 매우 천천히 재하하여 모형보가 급격하게 변형하지 않도록 충분히 안정상태를 유지하며 평형상태에 도달하도록 하였다. 미지변수인 회전각 θ_A, θ_B 는 각도기를 이용하여 측정하였다. 보축의 길이 증가량 Δ_S 와 수직변위 $y_{s=l/2}$ 은 각각 정밀자와 dial gauge를 이용하여 측정하였다. 이 실험과 매우 유사한 실험 방법들이 문헌(Wilson, 1993)에 기술되어 있다. 모형보 [A], [B]의 제원은 다음과 같다.

[A] 변화폭 직사각형 단면 ($e = 1$)

$$l = 350 \text{ mm}, a = 175 \text{ mm} (\alpha = a/l = 0.5)$$

$$I_A = \frac{30 \times 5^3}{12} = 312.5 \text{ mm}^4$$

$$I_B = \frac{45 \times 5^3}{12} = 468.75 \text{ mm}^4 (k = I_B/I_A = 1.5)$$

$$E = 3.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$P = 42.1 \text{ N} (p = P l^2 / EI_A = 5)$$

[B] 변화폭 직사각형 단면 ($e = 1$)

$$l = 500 \text{ mm}$$

$$I_A = \frac{50 \times 5^3}{12} = 520.8 \text{ mm}^4$$

$$I_B = \frac{30 \times 5^3}{12} = 312.5 \text{ mm}^4 (k = I_B/I_A = 0.6)$$

$$E = 3.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$M_A = 3437 \text{ Nmm} (m_A = M_A l / EI_A = 1.0)$$

위의 조건으로 모형실험을 실시하고 $\theta_A, \theta_B, \Delta_S, y_{s=l/2}$ 을 실차원으로 측정하였다. 위의 입력조건으로 이 연구에서 작성한 프로그램을 이용하여 $\theta_A, \delta_B, \delta_\lambda, \eta_{\lambda=0.5}$ 를 계산하고 $\delta_\lambda, \eta_{\lambda=0.5}$ 는 식 (15), (16)을 이용하여 $\Delta_S, y_{s=l/2}$ 의 실차원으로 환산하였다.

표 2는 이 연구와 실험으로 얻어진 비선형 거동값을 비교한 표이다. [A], [B]의 실험에서 이론과 실험 사이의 평균 오차는 약 5.77%로 매우 근사하게 접근 하여 이 연구에서 유도한 미분방정식, 개발된 수치해석 방법 및 작성된 컴퓨터 프로그램의 타당성을 입증할 수 있었다.

이론과 실험 사이의 오차는 다음의 3가지가 주요 원인으

로 생각된다. 첫째, 모형보의 제작 오차, 둘째, 좌측 및 우측 지점의 마찰력에 의한 오차, 셋째, 재료의 비선형성에 의한 오차 등을 들 수 있다.

이 표에서와 같이 비선형 거동은 이론값보다 실험값이 더 크게 측정되었다. 이는 재료의 과도한 변형으로 인하여 항복점 이상의 응력을 받게 되어 재료의 탄성이 비선형 영역으로 진입하고 따라서 변위가 이론값 보다 더 크게 발생한 때문으로 생각된다. 지점 A, B에 대한 회전과 이동 마찰효과를 고려하면 이론값이 더 크게 산정되어야 한다. 그럼에도 불구하고 실험값이 더 큰 것은 이 연구에서 고려하지 않은 재료의 비선형성이 변위의 증가효과로 작용하고, 이러한 변위 증가효과가 마찰에 의한 감소효과 보다 더 크게 작용했기 때문이다. 이러한 관점에서 구조물의 비선형 해석에서 재료의 비선형성도 기하 비선형성과 더불어 고려되어야 한다고 생각한다.

6. 결 론

이 연구는 변단면 변화곡선 기하 비선형 보의 수치해석에 관한 연구이다. 연구대상 보는 집중하중과 모멘트 하중이 작용하는 회전-활동지점 보이다. 이러한 보의 기하 비선형 거동을 지배하는 연립 미분방정식을 Bernoulli-Euler 보 이론

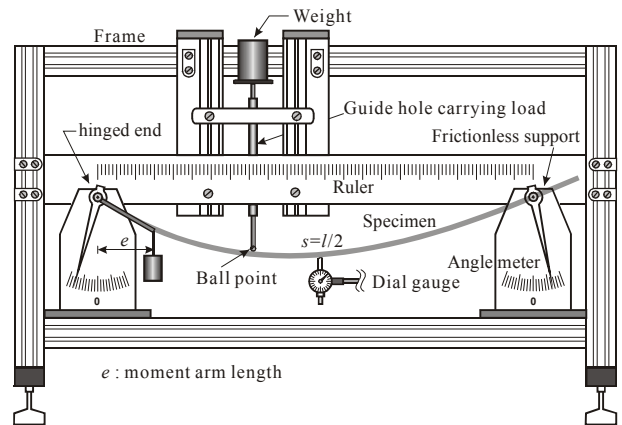


그림 12 실험장치 개략도

표 2 이론과 실험의 결과 비교

모형보	거동 변수	이론	실험	오차(%)
[A]	θ_A (rad)	0.2782	0.297	6.76
	θ_B (rad)	0.2598	0.273	5.08
	Δ_S (mm)	6.8285	7.297	6.86
	$y_{s=l/2}$ (mm)	31.630	33.16	4.84
[B]	θ_A (rad)	0.3906	0.414	5.99
	θ_B (rad)	0.2233	0.237	6.14
	Δ_S (mm)	8.8350	9.343	5.75
	$y_{s=l/2}$ (mm)	40.276	42.18	4.73

을 이용하여 유도하였다. 이 미분방정식을 반복법을 이용하여 미지변수를 산정할 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다. 우측지점의 경계조건에 대한 각각의 수렴조건식을 하나의 통합 수렴조건식으로 유도하였다. 이 수렴조건식을 이용하여 기하 비선형 보를 수치해석한 결과, 8회 미만의 반복시행에서 미지변수인 양단 회전각의 수치해를 찾을 수 있었다. 미지변수들은 비선형 거동에 매우 민감하게 작용하여 최소 통합오차에 큰 영향을 주는 것을 알 수 있었다. 이 연구에서 전개한 이론 및 수치해석 방법을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였으며, 두 결과는 매우 근접하였다. 이론과 실험의 거동값 비교로부터 구조물의 비선형 해석에서 재료적 비선형성을 고려해야 하는 물리적 근거를 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

안대순 (2006) 변단면 기둥의 좌굴 하중 및 후좌굴 거동. 원광대학교 대학원 박사학위 논문.

이병구, 김석기, 이태은, 김권식 (2009) 후좌굴 변단면 기둥의 기하 비선형 해석. 대한토목학회 논문집, 29(1A), pp.53~60.

이병구, 오상진, 이태은 (2011) 3개의 미지변수를 갖는 변단면 기하 비선형 보의 수치해석 방법. 대한토목학회 논문집 (2011. 11 현재 심사중)

Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O. (1969) Applied Numerical Methods, John Wiley and Sons, USA.

Dado, M., Al-Sadder, S. (2005) A New Technique for Large Deflection Analysis of Non-Prismatic Cantilever Beam, *Mechanics Research Communication*, 32(6), pp.692~703.

Gupta, A.K. (1985) Free Vibrations of Tapered Beam, *Journal of the Structural Division*, ASCE, 11(1), pp.19~36.

Huang, Y., Luo, Q.Z. (2011) A Simple Method to Determine the Critical Buckling Loads for Axially in Homogeneous Beam with Elastic Restraints, 61(9), pp.2510~2517.

Jan, J.D. (2010) Closed-Form Solution of Large Deflection for a Guyed Cantilever Column Pulled by an Inclined Cable, *Journal of Material Science and Technology*, 19(1), pp.130~136.

Jung, J.H., Kang, T.J. (2005) Large Deflection Analysis of Fibers with Non-Linear Elastic Properties, *Textile*

Research Journal, 75(10), pp.715~723.

Lau, J.H. (1982) Large Deflections of Beams with Combined Loads, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 108(EM1), pp.180~185.

Lee, B.K., Wilson, J.F., Oh, S.J. (1993) Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross Sections, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 28(Issue 5), pp.579~589.

Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., Kim, I.J. (2005) Buckling Loads of Columns with Constant Volume, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 296, pp.381~387.

Liao, S. (2009) Series Solution of Large Deformation of a Beam with Arbitrary Variable Cross Section with an Axial Load, *ANZIAM Journal* 51(1), pp.10~33.

Rojahan, C. (1968) Large Deformations of Elastic Beams. Thesis for the Degree of Engineer, Stanford University.

Shatarat, N., Al-Sadder, S., Katkhuda, H., Qabian, A., Shatnawi, A. (2009) Behavior of a Rhombus Frame of Non-Linear Elastic Material under Large Deflection, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 51(2), pp.166~177.

Solano, C.E. (2009) Semi-Exact Solutions for Large Deflections of Cantilever Beam of Non-Linear Elastic Behavior, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 28(11), pp.1359~1363.

Wilson, J.F., Holloway, D.M., Biggers, S.B. (1971) Stability Experiments on the Strongest Column and Circular Arch, *Experimental Mechanics*, 11, pp.303~308.

Wilson, J.F. (1993) Experiments of the Strength of Solids, McGraw Hill, Inc., USA.

Yi, X. (2011) Large Deflection of Tip Loaded Beam with Differential Transformation Method, *Advanced Material Research*, 250~253, pp.1232~1235.

- 논문접수일 2011년 11월 23일
- 논문심사일 2011년 12월 11일
- 게재확정일 2012년 2월 16일