

계층형 주기적 자기회귀 이동평균 모형의 추정

이성덕^{1,a}, 김정균^a, 김선우^a

^a충북대학교 정보통계학과

요약

시계열의 상관구조가 시점에 의존하며 주기적인 상관성을 보이는 계절성 시계열 자료에 대한 시계열 모형들이 비교 분석된다. 주기적 자기회귀이동평균 모형을 소개하고, 실증분석으로 주기적 상관성을 지닌 스위스 Arosa 지방의 성층권 오존 월별 시계열에 계층형 모형인 주기적 자기회귀이동평균 모형과 계절 누적자기회귀이동 평균 모형의 적합을 통하여 주기적 자기회귀이동평균 모형의 우월성을 비교한다.

주요용어: 주기적 상관성, 계절 누적자기회귀이동평균 모형, 주기적 자기회귀이동평균 모형, 계층형 모형.

1. 서론

시계열 자료란 시간이 지남에 따라 변하는 현상을 관찰함으로써 얻어지는 일련의 자료로 일정 시간 간격 마다 동일한 현상이 반복되는 경향(계절변동)을 갖고 있다. 만약 시계열의 계절변동이 결정적이고 다른 비계절 변동과는 독립이라면 주어진 시계열은 분해법 등으로 해결이 가능하며 그렇지 않다면 확률시계열 모형인 ARIMA 모형을 계절시계열에 확장시켜 적용하는 것이 바람직할 것이다. 여기에서 기존에 적절하게 차분을 함으로써 계절 조정된 시계열이 평균과 공분산함수가 일정하며 시점에 의존하지 않는다는 가정을 할 수 있는 경우 이렇게 계절 조정하는 방법을 비주기적 계절 ARIMA(non periodic seasonal ARIMA) 모형이라 한다. 그러나 많은 계절성 시계열들은 시계열의 상관구조가 계절에 의존하며 주기적 상관성을 가지기 때문에 이차정상을 얻도록 여과되거나 조정될 수 없는 경우가 많다. 미국 LA의 시간별 오존 기록을 보면 계절에 의존하는 모수들을 고려하는 주기적 시계열 모형(periodic time series model)이 필요함을 제안하였고 Pagano (1978), Tiao와 Grupe (1980)는 이러한 계절 시계열자료에 주기적 시계열 모형을 사용하여 분석과 예측을 하였다. 이때 Pagano (1978)는 주기적 AR(periodic AR; PAR) 모형에 대한 적률추정법을 제시하였고, Cipra (1985)는 주기적 MA(periodic MA; PMA) 모형을 이론적으로 분석하였으며, Vecchia (1985)는 주기적 ARMA(periodic ARMA; PARMA) 모형에 대한 최우추정법을 제안하였다. McLeod (1993)는 낮은 차수의 PAR 모형만으로도 주기적인 시계열을 설명하기에 충분하다는 것을 밝히고 주기적 상관성의 존재 여부와 모형의 적합성에 대한 진단법을 제시하였고, Lund와 Basawa (1999)는 주기적 시계열 모형에 대한 여러 특성과 추정기법을 소개하고 Box-Jenkins의 계절 ARIMA 모형과의 이론적 차이를 제시하였다. 또한 Osborn (1991)은 주기성을 무시하면 모수들이 계절조정 후에도 주기적인 변동을 가지게 되어 추정된 잔차가 계절적으로 이분산성과 주기적인 상관관계를 가지게 되고 예측치가 편의를 가지게 됨을 보였다.

본 논문은 2010년 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의해 연구되었음.

¹ 교신저자: (361-763) 충북 청주시 흥덕구 내수동로 52, 충북대학교 정보통계학과, 교수.

E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr

본 논문은 주기적 ARMA 모형에서 모수의 수가 너무 많은 문제를 해결하기 위해 주기적 상관성을 제거하는 방법을 연구하고 첫 번째 계층 모형(PAR(p))을 식별한 후 적률추정 및 최우추정법을 이용하여 모수를 추정하고 그 잔차에 대해 정상 ARMA 모형을 적합시킨 후 최종적으로 이 두 모형을 결합하여 계층형 주기적 ARMA 모형을 수립하고 실증분석을 통하여 그 효용성을 보였다. 본 논문의 구성은 2장에서 계절성이 있는 시계열을 분석하기 위한 일반적인 시계열모형인 삼각 함수 모형과 계절 ARIMA 모형에 대해 소개하였고, 3장에서는 PARMA 모형에 대해 설명하고, PARMA 모형 중 가장 간단한 PAR(1) 모형과 잔차에 대한 ARMA 모형을 결합하여 PARMA 모형을 만드는 계층형 모형을 소개하였다. 4장에서는 실증분석으로 주기적 상관성을 지닌 시계열에 PARMA 모형과 계절ARIMA 모형을 적합하였고, 교차적합을 이용한 적합력 비교를 통하여 PARMA 모형의 효용성을 제시하였다.

2. 계절 시계열 모형

2.1. 삼각함수 모형

계절변동을 고려하는 삼각함수 모형은 다음과 같다.

$$X_t = \alpha + \beta \cos(2\pi ft + \Phi) + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

여기서 β 는 진폭(amplitude)이고, f 는 진동수(frequency), Φ 는 편각(phase)이다.

식 (2.1)은 시간 t 가 흐름에 따라 진폭 β 와 $-\beta$ 사이에서 상승과 하강을 반복하는데 주기는 $1/f$ 이다. 편각 Φ 는 시계열의 처음 관찰 시점에 의해 결정된다. 위 식 (2.1)을 삼각함수의 가법정리를 이용하여 다음과 같은 모수에 대한 선형식으로 바꿀 수 있다.

$$X_t = \alpha + \beta_1 \cos(2\pi ft + \Phi) + \beta_2 \sin(2\pi ft) + \epsilon_t,$$

여기서 β_1 은 $\beta \cos \Phi$ 이고 β_2 는 $\beta \sin \Phi$ 이다.

2.2. 계절 누적자기회귀이동평균 모형

계절 변동을 갖는 시계열 X_t 의 평균은 일정하지 않고 시점에 따라 변하는 경우가 있는데 이런 비정상성을 제거하기 위해 계절차분($X_t - X_{t-s}$)을 하면 일정한 평균을 얻게 되어 정상성을 유지하게 된다.

계절 ARIMA(1,1,1) 모형은 계절 시차가 s , 계절차분차수가 1, AR과 MA의 차수가 1과 1인 ARMA 모형으로 모형식은 다음과 같다.

$$\Phi(B)(1 - B^s)X_t = \Theta(B)\epsilon_t,$$

여기서 $\Phi(B) = 1 - \Phi B^s$ 와 $\Theta(B) = 1 - \Theta B^s$ 는 B 의 다항식이다.

위 모형의 정상조건은 $\Phi(B)(1 - \Phi B^s) = 0$ 에서 모든 근의 절대값이 0보다 크게 되는 경우이고, 가역 조건은 $\Theta(B) = 0$ 에서 모든 근의 절대값이 0보다 클 때이다. 또한 계절차분후의 자기상관함수와 편자기상관함수는 다음과 같다.

$$\cdot \text{ 자기상관함수: } \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ -\frac{(\Theta - \Phi)(1 - \Theta\Phi)}{1 + \Theta^2 - 2\Theta\Phi} \Phi^{\frac{k}{s}-1}, & k = s, 2s, \dots, \\ 0, & \text{그밖에.} \end{cases}$$

· 편자기상관함수: ϕ_{kk} - 시차 s 이후부터 지수적으로 감소하는 형태.

계절 ARIMA(P, D, Q) 모형은 계절 시차가 s 이고 계절차분차수가 D 인 ARMA 모형으로 모형식은 다음과 같다.

$$\Phi(B)(1 - B^s)^D X_t = \Theta(B)\epsilon_t.$$

3. 주기적 자기회귀이동평균 모형

3.1. 주기적 자기회귀이동평균 모형

주기적 상관된 시계열을 효과적으로 모형화 할 수 있는 PARMA 모형은 정상적인 ARMA 모형에서 모형의 계수들과 차수를 계절에 따라 다르게 함으로써 나타낼 수 있는데 X_n 이 다음의 선형 차분방정식의 해라면 X_n 은 주기 T 와 평균 μ_ν 를 가진 PARMA 계열이라 한다.

$$(X_{nT+\nu} - \mu_\nu) - \sum_{k=1}^{p(\nu)} \phi_k(\nu)(X_{nT+\nu-k} - \mu_{\nu-k}) = \sum_{k=0}^{q(\nu)} \theta_k(\nu)\epsilon_{nT+\nu-k}, \quad (3.1)$$

여기서 오차계열 $\{\epsilon_t\}$ 는 평균이 0이고 $\text{Var}(\epsilon_{nT+\nu}) = 1$ 인 주기적 백색잡음을 나타내며 $p(\nu)$ 와 $q(\nu)$ 는 AR과 MA 항의 차수이고, $\phi_1(\nu), \dots, \phi_{p(\nu)}(\nu)$ 와 $\theta_0(\nu), \dots, \theta_{q(\nu)}(\nu)$ 는 모형의 계수들이다.

위 식 (3.1)의 $p(\nu)$ 와 $q(\nu)$ 를 다음과 같이 계절 ν 안에서 일정한 값으로 가정해도 수리적으로 일반성을 잃지 않는다.

$$p = \max_{1 \leq \nu \leq T} p(\nu),$$

$$q = \max_{1 \leq \nu \leq T} q(\nu),$$

단 $p(\nu) < k \leq p$ 일 때 $\phi_k(\nu) = 0$ 이며, $q(\nu) < k \leq q$ 일 때 $\theta_k(\nu) = 0$ 이다.

또한 $\mu_\nu = 0$ 인 경우만 필요한 경우, $(X_{nT+\nu} - \mu_\nu)$ 를 통해 원 시계열로부터 주기적 평균을 제거함으로써 다음의 식 (3.2)의 형태를 갖는다.

$$X_{nT+\nu} - \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu)X_{nT+\nu-k} = \theta_0(\nu)\epsilon_{nT+\nu} + \sum_{k=1}^q \theta_k(\nu)\epsilon_{nT+\nu-k}. \quad (3.2)$$

3.2. 정상조건과 가역조건

확률과정 $\{X_t\}$ 의 결합분포함수가 다음과 같이 정의될 때

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = P(X_{t_1} \leq x_{t_1}, X_{t_2} \leq x_{t_2}, \dots, X_{t_n} \leq x_{t_n})$$

주기 T 와 모든 정수 k 그리고 임의의 n 개 점인 t_i 에 대해

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+kT}, X_{t_2+kT}, \dots, X_{t_n+kT})$$

이 성립하면 이를 주기적 구조(periodic structure)를 가진 절대정상(strictly stationary)과정이라 한다.

PARMA 모형에서 이차정상 조건을 구하기 위해 PARMA 모형을 다음과 같은 T 변량 ARMA 차분 방정식으로 변환한다.

$$\Phi_0 \vec{X}_n - \sum_{k=1}^{p^*} \Phi_k \vec{X}_{n-k} = \Theta_0 \vec{\epsilon}_0 + \sum_{k=1}^{q^*} \Theta_k \vec{\epsilon}_{n-k}, \quad (3.3)$$

여기서 벡터 $\vec{X}_n = (X_{nT+1}, X_{nT+2}, \dots, X_{nT+T})'$ 이고, $\vec{\epsilon}_n = (\epsilon_{nT+1}, \epsilon_{nT+2}, \dots, \epsilon_{nT+T})'$ 이다. 또한 차수 $p^* = [p/T]$ 이고 $q^* = [q/T]$ 인데 $[x]$ 는 x 보다 크거나 같은 최소 정수를 뜻한다.

위 식 (3.3)에서 Φ 와 Θ 는 $T \times T$ 행렬 계수를 나타내며 각각 다음과 같다.

$$(\Phi_0)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i < j, \\ -\phi_{i-j}(i), & i > j, \end{cases}$$

여기서 $k > p$ 에선 $\phi_k(v) = 0$ 이고 $k > q$ 에선 $\theta_k(v) = 0$ 이다.

T 변량 ARMA 차분방정식으로 변환 한 PARMA 모형의 정상조건과 가역조건은 다변량 ARMA 모형의 정상조건과 가역조건을 적용하면 다음과 같다.

- 정상조건 : $|z| \leq 1$ 을 만족하는 모든 복소수에 대해서 $\det(\Phi_0 - \sum_{k=1}^{p^*} \Phi_k z^k) \neq 0$
- 가역조건 : $|z| \leq 1$ 을 만족하는 모든 복소수에 대해서 $\det(\Theta_0 - \sum_{k=1}^{q^*} \Theta_k z^k) \neq 0$

여기서 $\det(X)$ 는 행렬 X 의 행렬식이다.

확률과정 $\{X_t\}$ 가 위의 정상 조건 및 가역 조건을 만족하면 다음과 같이 무한 차수의 이동평균항과 자기회귀항으로 확장할 수 있다.

$$X_{nT+v} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(v) \epsilon_{nT+v-k},$$

$$\epsilon_{nT+v} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(v) X_{nT+v-k}$$

이 때 계절 가중치 $\psi_k(v)$ 와 $\pi_k(v)$ 는 다음을 만족한다.

$$\max_{1 \leq v \leq T} \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k(v)| < \infty,$$

$$\max_{1 \leq v \leq T} \sum_{k=0}^{\infty} |\pi_k(v)| < \infty,$$

여기서 $\{\psi_k(v)\}$ 와 $\{\pi_k(v)\}$ 는 모든 계절에 대해서 $\psi_0(v) = \pi_0(v) = 1$ 를 가지며 반복적 계산을 통해 가중치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi_k(v) = \theta_k(v) 1_{[k \leq q]} + \sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_j(v) \psi_{k-j}(v-j),$$

$$\pi_k(v) = -\phi_k(v) 1_{[k \leq p]} + \sum_{j=1}^{\min(k,q)} \theta_j(v) \pi_{k-j}(v-j).$$

위의 가중치를 이용하여 자기공분산함수와 자기상관함수를 나타내면 다음과 같다.

$$\gamma_v(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+h}(v) \psi_k(v-h) \sigma^2(v-k-h),$$

$$\rho_v(h) = \text{Corr}[X_{nT+v}, X_{nT+v-h}] = \frac{\gamma_v(h)}{\sqrt{\gamma_v(0)\gamma_{v-h}(0)}}.$$

3.3. 모수추정

PAR 모형 중 가장 간단한 형태인 PAR(1) 모형에서 Yule-Walker 적률 추정값은 표본 자기공분산함수를 이용함으로써 얻어질 수 있는데 정규분포 가정 하에서 MLE도 같은 추정치를 제공한다.

식 (3.2)에서 $X_{nT+v} \equiv x_t$, $\epsilon_{nT+v} \equiv \epsilon_t$, $\phi_p(v) \equiv \phi_{pv}$, $\theta_q(v) \equiv \theta_{qv}$ 라 놓으면 평균이 0인 PAR(1) 모형은 다음과 같다.

$$x_t = \phi_{1v}x_{t-1} + \theta_{0v}\epsilon_t. \quad (3.4)$$

PAR(1) 모형의 표본 자기공분산 함수 및 표본 자기상관함수는 다음과 같다.

$$\hat{\gamma}_{v,h} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} x_t x_{t-h},$$

$$\hat{\rho}_{v,h} = \frac{\hat{\gamma}_{v,h}}{\sqrt{\hat{\gamma}_{v,0} \hat{\gamma}_{v-h,0}}}.$$

식 (3.4)에서 $\theta_{0v} = \sigma(v)$, $\phi_{1v} = \phi(v)$ 라 놓고, 표본 자기공분산함수와 두 식 $\gamma_{v,0} = \phi_{1v}\gamma_{v,1} + \theta_{0v}^2$, $\gamma_{v,1} = \phi_{1v}\gamma_{v-1,0}$ 을 이용하면 다음과 같은 PAR(1) 모형의 모수를 얻을 수 있다.

$$\hat{\phi}_{1v} = \hat{\phi}(v) = \frac{\hat{\gamma}_{v,1}}{\hat{\gamma}_{v-1,0}},$$

$$\hat{\theta}_{0v}^2 = \hat{\sigma}(v)^2 = \hat{\gamma}_{v,0} - \hat{\phi}(v)\hat{\gamma}_{v,1}.$$

3.4. 계층형 PARMA 모형

PAR(1) 모형 적합 후 주기적 상관성은 제거됐으나 잔차가 백색잡음을 따르지 않을 경우 그 잔차를 ARMA 모형으로 적합시키고 PAR(1) 모형과 결합하여 계층형 PARMA 모형을 만든다. PAR(1) 모형을 적합한 후의 잔차가 정상 ARMA 형태라면 그 잔차에 대해 다음과 같은 모형을 세울 수 있다.

$$\epsilon_n - \sum_{k=1}^p \gamma_k \epsilon_{n-k} = w_n - \sum_{k=0}^q \beta_k w_{n-k},$$

여기서 w_n 는 백색잡음이고 $\beta_0 = 1$ 로 가정한다.

PAR(1) 모형과 잔차에 대한 ARMA 모형을 결합하면 다음의 PARMA 모형이 된다.

$$X_{nT+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) X_{nT+v-k} = \theta_0(v) w_{nT+v} + \sum_{k=1}^{q(v)} \theta_k(v) w_{nT+v-k} \quad (3.5)$$

여기서,

$$p(v) \equiv p + 1, \quad q(v) \equiv q,$$

$$\theta_k(v) = \beta_k \sigma(v), \quad 0 \leq k \leq q,$$

$$\phi_1(v) = \phi(v) + \frac{\gamma_1 \sigma(v)}{\sigma(v-1)},$$

$$\phi_k(v) = \sigma(v) \left\{ \frac{\gamma_k}{\sigma(v-k)} - \frac{\gamma_{k-1} \phi(v-k+1)}{\sigma(v-k+1)} \right\}, \quad 2 \leq k \leq p,$$

$$\phi_{p+1}(v) = -\frac{\sigma(v) \gamma_p \phi(v-p)}{\sigma(v-p)}.$$

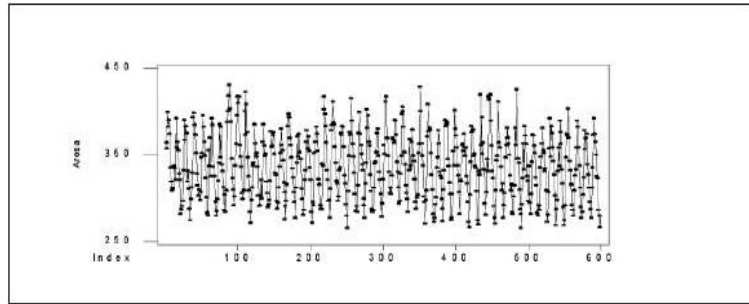


그림 1: Arosa 오존 자료의 시계열도

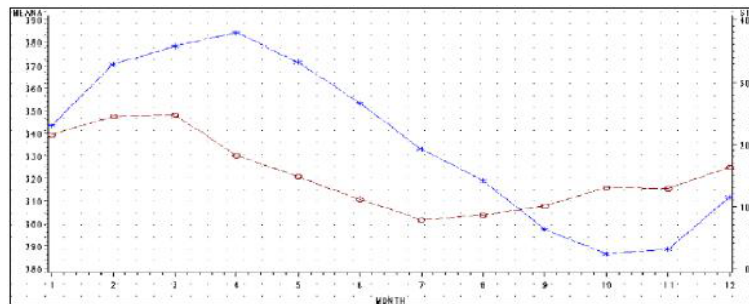


그림 2: Arosa 오존 자료의 월별 평균(*)과 표준편차(o) 그림

표 1: PAR(1) 모형의 모수 추정값

| 월 | $\hat{\phi}(nu)$ | $\hat{\sigma}(v)$ | 월 | $\hat{\phi}(nu)$ | $\hat{\sigma}(v)$ |
|----|------------------|-------------------|-----|------------------|-------------------|
| 1월 | 0.281 | 20.859 | 7월 | 0.274 | 7.144 |
| 2월 | 0.338 | 23.175 | 8월 | 0.408 | 7.879 |
| 3월 | 0.227 | 23.889 | 9월 | 0.489 | 9.071 |
| 4월 | 0.166 | 17.564 | 10월 | 0.282 | 12.626 |
| 5월 | 0.323 | 13.423 | 11월 | 0.334 | 11.994 |
| 6월 | 0.247 | 10.408 | 12월 | 0.399 | 15.328 |

4. 실증연구

자료는 주기적인 상관성을 보이는 스위스 Arosa 지방의 50년 동안 성층권의 오존 월별 기록으로 계절형 PARMA 모형과 계절 ARIMA 모형으로 분석하였다. 본 분석을 수행하기 위하여 SAS 프로그램과 C언어를 이용하였다. 다음의 그림 1과 그림 2는 Arosa 오존 자료의 시계열도와 월별 평균과 표준편차 그림이다.

4.1. PARMA 모형 분석

Arosa 오존 자료의 분석에선 평균이 0인 PAR(1) 모형을 사용하였는데 다음의 표 1은 PAR(1) 모형의 모수 추정값을 보여주고 있다.

PAR(1) 모형을 적합한 후 주기적 상관성이 제거된 잔차가 백색잡음을 따르는지 알아보고자 $\hat{Q} = n(n+2) \sum_{h=1}^L \hat{\rho}^2(h)/(n-h)$ 통계량을 이용하여 PAR(1) 모형의 잔차에 대한 독립성 검정을 실시한 결과 잔차가 백색잡음을 따르지 않아 그 잔차에 정상적인 ARMA 모형을 적합시켜서 다음의 ARMA(2, 1) 모

표 2: PARMA(3, 1) 모형의 모수들

| 월 | $\hat{\theta}_0(nu)$ | $\hat{\theta}_1(nu)$ | $\hat{\phi}_1(nu)$ | $\hat{\phi}_2(nu)$ | $\hat{\phi}_3(nu)$ |
|-----|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1월 | 20.859 | -15.315 | 1.155 | 0.015 | -0.121 |
| 2월 | 23.175 | -17.015 | 1.052 | 0.116 | -0.126 |
| 3월 | 23.889 | -17.540 | 0.890 | 0.015 | -0.067 |
| 4월 | 17.564 | -12.896 | 0.639 | 0.051 | -0.054 |
| 5월 | 13.423 | -9.855 | 0.814 | 0.036 | -0.027 |
| 6월 | 10.408 | -7.642 | 0.745 | -0.037 | -0.021 |
| 7월 | 7.144 | -5.246 | 0.714 | 0.002 | -0.036 |
| 8월 | 7.879 | -5.785 | 1.116 | -0.036 | -0.039 |
| 9월 | 9.071 | -6.660 | 1.228 | -0.036 | -0.073 |
| 10월 | 12.626 | -9.271 | 1.176 | -0.102 | -0.137 |
| 11월 | 11.994 | -8.806 | 0.944 | 0.104 | -0.135 |
| 12월 | 15.328 | -11.254 | 1.220 | -0.020 | -0.071 |

형을 얻었다.

$$(1 - 0.64238B - 0.20891B^2)\epsilon_t = (1 - 0.73422B)w_t. \quad (4.1)$$

잔차에 대해 ARMA 모형을 적합한 후 생성된 잔차에 대해 독립성 검정을 실시한 결과 잔차가 백색 잡음을 따르므로 원 자료에 대한 PAR(1) 모형과 잔차의 ARMA(2, 1)모형을 결합하여 다음 표 2의 모수들을 갖는 PARMA(3, 1) 모형으로 결정한다.

PARMA(3, 1) 모형을 적합한 후의 잔차가 주기적 상관성을 보이지 않고, 백색잡음을 따르므로 다음의 PARMA(3, 1) 모형을 최종 모형으로 선택한다.

$$\begin{aligned} X_{nT+1} - 1.155X_{nT} - 0.015X_{nT-1} + 0.121X_{nT-2} &= 20.859\epsilon_{nT+1} - 15.315\epsilon_{nT}, \\ X_{nT+2} - 1.052X_{nT+1} - 0.116X_{nT} + 0.126X_{nT-1} &= 23.175\epsilon_{nT+2} - 17.015\epsilon_{nT+1}, \\ X_{nT+3} - 0.890X_{nT+2} - 0.015X_{nT+1} + 0.067X_{nT} &= 23.889\epsilon_{nT+3} - 17.540\epsilon_{nT+2}, \\ X_{nT+4} - 0.639X_{nT+3} - 0.051X_{nT+2} + 0.054X_{nT+1} &= 17.564\epsilon_{nT+4} - 12.896\epsilon_{nT+3}, \\ X_{nT+5} - 0.814X_{nT+4} - 0.036X_{nT+3} + 0.027X_{nT+2} &= 13.423\epsilon_{nT+5} - 9.855\epsilon_{nT+4}, \\ X_{nT+6} - 0.745X_{nT+5} + 0.037X_{nT+4} + 0.021X_{nT+3} &= 10.408\epsilon_{nT+6} - 7.642\epsilon_{nT+5}, \\ X_{nT+7} - 0.714X_{nT+6} - 0.002X_{nT+5} + 0.036X_{nT+4} &= 7.144\epsilon_{nT+7} - 5.246\epsilon_{nT+6}, \\ X_{nT+8} - 1.116X_{nT+7} + 0.036X_{nT+6} + 0.039X_{nT+5} &= 7.879\epsilon_{nT+8} - 5.785\epsilon_{nT+7}, \\ X_{nT+9} - 1.228X_{nT+8} + 0.036X_{nT+7} + 0.073X_{nT+6} &= 9.071\epsilon_{nT+9} - 6.660\epsilon_{nT+8}, \\ X_{nT+10} - 1.176X_{nT+9} + 0.102X_{nT+8} + 0.137X_{nT+7} &= 12.626\epsilon_{nT+10} - 9.271\epsilon_{nT+9}, \\ X_{nT+11} - 0.944X_{nT+10} - 0.104X_{nT+9} + 0.135X_{nT+8} &= 11.994\epsilon_{nT+11} - 8.806\epsilon_{nT+10}, \\ X_{nT+12} - 1.220X_{nT+11} + 0.020X_{nT+10} + 0.071X_{nT+9} &= 15.328\epsilon_{nT+12} - 11.254\epsilon_{nT+11}. \end{aligned}$$

4.2. 계절 ARIMA 모형 적합

Arosa 오존 자료에 대해 계절 ARIMA 모형을 적합하기 위해 원 자료에 로그변환과 계절차분($s = 12$)을 한 후 표본 자기상관함수 및 표본 편자기상관함수를 그려보면 다음과 같다.

표본 자기상관함수 및 표본 편자기상관함수를 보면 정상적인 것을 알 수 있으므로 로그변환과 계절차분한 Arosa 자료에 계절 ARIMA($p, 0, q$) * (0, 1, 1)형태의 모형 중에서 AIC, SBC, 모수의 유의성, 잔

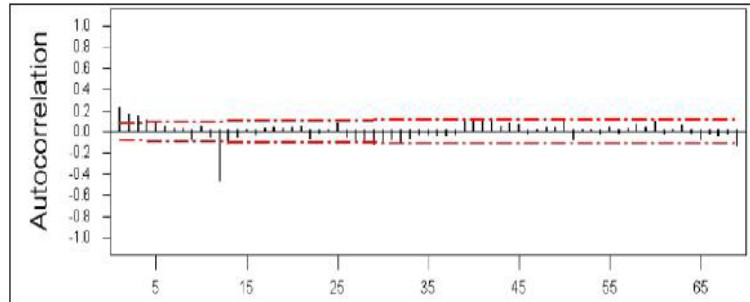


그림 3: 로그변환과 계절차분된 Arosa의 SACF

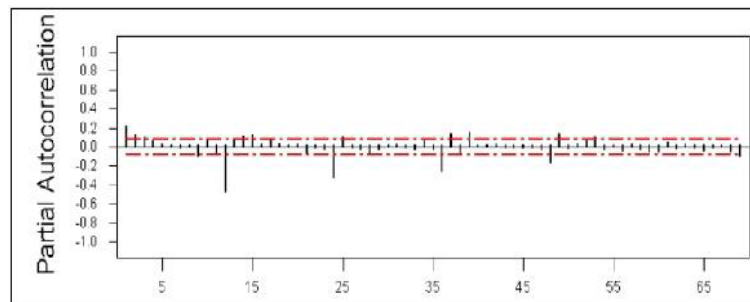


그림 4: 로그변환과 계절차분된 Arosa의 SPACF

차의 독립성 등의 기준을 고려하여 모형을 선택하였다. 잔차분석 결과 잔차가 백색잡음 과정을 따르므로 최종모형은 다음과 같다.

$$(1 - 0.87507B)(1 - B^{12}) \log X_t = (1 - 0.6792B)(1 - 0.89909B^{12}) \epsilon_t. \quad (4.2)$$

4.3. 모형 적합력 비교

Arosa 데이터에 대한 PARMA(3, 1) 모형과 계절 ARIMA 모형의 적합력을 비교하였다. Arosa 데이터를 PARMA 모형과 계절 ARIMA 모형으로 적합하였을 때 PARMA 모형의 경우는 실제값과 비슷하게 적합된 반면 계절 ARIMA 모형은 실제값과 차이가 있음을 그림 5를 통해 확인할 수 있다. 루트 평균제곱오차(root mean square error; RMSE)를 이용해서 모형의 적합력을 비교한 결과 표 3에서 보듯이 PARMA 모형이 계절 ARIMA 모형보다 잘 적합되었다. 루트 평균제곱오차는 다음과 같다.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{(d-1)T + T} \sum_{n=0}^{d-1} \sum_{v=1}^T X_{nT+v} - \hat{X}_{nT+v}}.$$

5. 결론

기존의 계절 시계열 자료 분석은 적절한 차분을 통해 계절조정된 시계열이 평균과 공분산함수가 일정하고 시점에 의존하지 않는다고 가정했었는데 시계열의 상관구조가 시점에 의존하며 주기적인 상관성을 보이는 많은 계절성 시계열들은 기존의 계절조정으로는 이차정상을 얻도록 여과되거나 조정될 수 없어 잔차가 편의를 가지게 되는 문제점이 있어 왔다. 본 논문에서는 주기적 상관성을 지닌 계절성 시

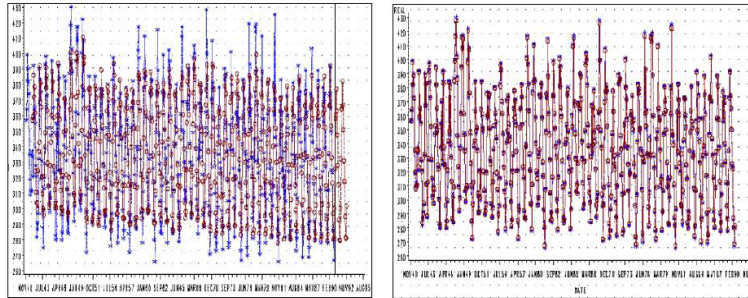


그림 5: 모형 적합 시계열그림(왼쪽: 계절 ARIMA 적합, 오른쪽: PARMA(3,1)모형 적합)

표 3: RMSE

| | 계절 ARIMA 모형 | PARMA 모형 |
|------|-------------|----------|
| RMSE | 16.002 | 0.969 |

계열에 주기적 자기회귀이동평균 모형을 적합하고, 모형 적합 후의 잔차가 백색잡음이 아닐 경우 잔차에 ARMA 모형을 적합시키는 계층형 PARMA 모형의 적합에 대해 다루었다. 실증분석에서는 주기적 상관성을 지닌 Arosa 데이터에 계층형 PARMA 모형과 계절 ARIMA모형을 적합시키고 RMSE를 통해 두 모형을 적합력을 비교하여, PARMA 모형이 주기적 상관성을 지닌 데이터를 잘 설명하는 모형임을 보였다.

참고 문헌

- Cipra, T. (1985). Periodic moving average process, *Aplikace Matematiky*, **30**, 218–229.
- Lund, R. B. and Basawa, I. V. (1999). Modeling for periodically correlated time series, *Asymptotics, Non-parametrics, and Time Series*, 37–62.
- McLeod, A. I. (1993). Parsimony, model adequacy and periodic correlation in time series forecasting, *International Statistical Review*, **61**, 387–393.
- Osborn, D. R. (1991). The implications of periodically varying coefficients for seasonal time series process, *Journal of Econometrics*, **48**, 373–384.
- Pagano, M. (1978). On periodic and multiple autoregressions, *The Annals of Statistics*, **6**, 1310–1317.
- Tiao, G. C. and Grupe, M. R. (1980). Hidden periodic autoregressive moving average models in time series data, *Biometrika*, **67**, 365–373.
- Vecchia, A. V. (1985). Maximum likelihood estimation for Periodic Autoregressive Moving-Average process, *Technometrics*, **27**, 375–384.

2012년 4월 17일 접수; 2012년 5월 3일 수정; 2012년 5월 8일 채택

Estimation of Layered Periodic Autoregressive Moving Average Models

Sung-Duck Lee^{1,a}, Jung-Gun Kim^a, Sun-Woo Kim^a

^aDepartment of Information & Statistics, Chungbuk National University

Abstract

We study time series models for seasonal time series data with a covariance structure that depends on time and the periodic autocorrelation at various lags k . In this paper, we introduce an ARMA model with periodically varying coefficients (PARMA) and analyze Arosa ozone data with a periodic correlation in the practical case study. Finally, we use a PARMA model and a seasonal ARIMA model for data analysis and show the performance of a PARMA model with a comparison to the SARIMA model.

Keywords: Periodic correlation, SARIMA, PARMA, layered model.

This work was supported by the research grant of the Chungbuk National University in 2010.

¹ Corresponding author: Professor, Department of Information & Statistics, Chungbuk National University, 52 Naesudong-ro, Heungdeok-gu, Cheongju Chungbuk 361-763, Korea. E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr