

런 규칙을 가진 \bar{X} 관리도에 관한 통람

박진영* · 서순근**†

* 삼덕통상

** 동아대학교 산업경영공학과

\bar{X} Control Chart with Runs Rules: A Review

Park, Jin-young* · Seo, Sun-Keun**†

* Samduk Tongsang Co.

** Dept. of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

Key Words : Action limit, Runs rule, Warning limit, \bar{X} control chart

Abstract

After a work of Derman and Ross(1997) that considered simple main runs rules and derived ARL (Average Run Length) using Markov chain modeling, \bar{X} control chart based on diverse alternative main and supplementary runs rules that is the most popular control chart for monitoring the mean of a process are proposed. This paper reviews and discusses the-state-of-art researches for these runs rules and classifies according to several properties of runs rules. ARL derivation for a proposed runs rule is also illustrated.

1. 서 론

생산설비의 성능, 작업원의 숙련도, 작업환경 조건, 원자재의 균일성 등의 변화로 인해 공정이 관리 상태를 벗어남으로써 품질의 변동이 커지는데 이를 가능한 빨리 탐지하여 수정조치를 취함으로써 불량제품의 발생을 사전에 억제하고자 하는 대표적인 기법 중 하나가 관리도(control chart)이다. 관리도는 품질의 변동 상황을 그래프로 나타낸 것으로 공정에 대한 평균, 산포, 불량률 등의 상태를 파악하거나 공정능력을 결정하는데 이용되며, 공정개선을 위한 정보를 제공하기도 한다. 이러한 관리도 중 공정평균의 관리를 위해 사용되는 관리도를 \bar{X} 관리도라 한다. \bar{X} 관리도 중 중심선(center line)을 기준으로 관리한계(control limit)를 $\pm 3\sigma$ 로 두어 타점되는 점들이 관리 상태를 벗어나는지를 판단하는 Shewhart의 \bar{X} 관리도가 주로 쓰인다[1,14].

관리도의 민감도란 공정의 이상여부를 빨리 탐지할 수 있는 능력을 말하는데 관리도 상에서 한 점이라도 관리한계를 벗어나면(이하 기본 주 판정규칙) 공정에 이상요인(assignable cause)이 발생하였다고 보고 그 요인을 찾아 필요한 경우 수정조치를 취하는데, Shewhart의 \bar{X} 관리도는 공정평균의 작은 이동에 대한 검출능력이 떨어지는 약점을 가지고 있다. 이러한 검출능력을 평가하기 위해 ARL(Average Run Length)이 주로 사용된다. ARL이란 부분군으로부터 통계량이 관리한계를 벗어날 때까지의 부분군 추출횟수의 평균을 나타내며 공정에 이상원인이 있을 경우 작을수록 좋고 공정이 관리 상태에 있을 경우 클수록 좋다.

이러한 Shewhart \bar{X} 관리도의 약점을 보완하기 위한 첫 번째 대안으로 Western Electric사(1956)는 현재의 관리한계($\pm 3\sigma$)를 유지하면서 런 규칙을 추가하는 대안을 제안하였는데, 기본 주 판정규칙 외에 3개의 점 중 2개의 점이 $\pm 2\sigma$ 또는 5개의 점 중 4개의 점이 $\pm 1\sigma$ 를 벗어나거나, 8개의 점이 중심선의 한쪽에 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정한다.

† 교신저자 skseo@dau.ac.kr

※ 이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.

두 번째 대안으로 각 부분군뿐만 아니라 현재까지 축적된 부분군의 통계량 (\bar{X})의 누적값에 기초하여 공정 변화의 판단하는 Cusum관리도(cumulative sum control chart)와 과거 데이터일수록 가중치가 지수적으로 감소하는 EWMA관리도(Exponentially Weighted Moving Average control chart)가 주로 쓰이는데 중간정도의 공정평균 이동시 Shewhart \bar{X} 관리도보다 우수하다 「배도선, 1997」.

세 번째 대안으로 중간정도의 공정평균 이동에 우수한 Cusum 또는 EWMA관리도와 간편하면서 제법 큰 공정평균의 이동 시 검출능력이 우수한 Shewhart \bar{X} 관리도를 결합하는 방법론 등이다 「Montgomery, 2009」.

1997년 Derman & Ross가 3 중 2 주 런 규칙을 제안하고 Markov chain으로 ARL을 구하는 방법을 소개한 이후 이에 관한 후속논문이 10여년간 발표되었다. 이에 따라 본 논문에서는 먼저 문헌연구를 통해 현재까지 수행된 런 규칙을 가진 \bar{X} 관리도의 연구결과들을 런 규칙의 형태, 역할 등에 따라 체계적으로 분류하여 관련 연구를 통람(review)하고자 한다. 또한 일부 선행논문의 ARL 관계식에서 수식 표기 오류가 있으므로 이를 바로 잡고, 널리 쓰이는 m 중 m , $(m+1)$ 중 m 주·보조 규칙에 대해 기호를 통일하여 전술된 분류방식에 따라 관리도 설계의 기준이 되는 관리상태 하의 ARL을 재정리하고자 한다.

더불어 기존연구와 다른 새로운 런 규칙을 제안하고 Markov chain에 의해 모형화하여 ARL과 관리한계를 구하는 절차를 예시하고자 한다.

2. 기존 연구의 분류

지금까지 발표된 n 중 k ($k \leq n$) 런 규칙을 적용한 연구들은 공정의 이상상태를 판정하는 기준이 다르므로 이를 체계적으로 분류할 필요가 있다. 즉, 런 규칙의 형태, 런 규칙의 역할, 상·하 영역의 구별여부, 나머지 $(n-k)$ 점들의 활용 여부에 따라 분류하고자 한다. 여기서 통계적 설계에 관한 논문들만 다루며, 경제적 설계에 관한 논문들을 제외한다[1,11,13]

2.1 런 규칙의 형태

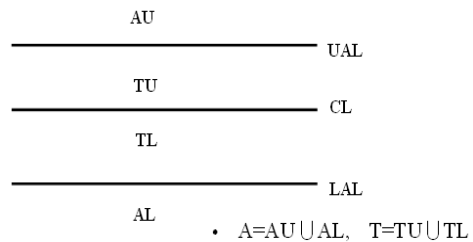
런 규칙은 n 중 k 형태로 표현되는데 n 개의 연속된 점 중에서 k 개가 규정된 영역에 타점되면 이상상태로

판정한다. 주로 널리 쓰이는 런 규칙은 m 중 m 런 규칙($n = m, k = m$)과 $(m+1)$ 중 m 런 규칙($n = m+1, k = m$)이다.

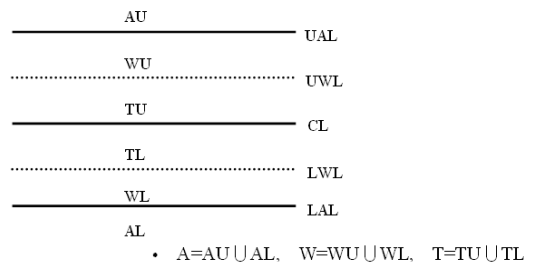
2.2 주·보조 규칙

주 규칙은 중심선을 기준으로 조치한계(upper/lower action limit(UAL/LAL), 또는 관리한계)를 설정하여 n 개의 점 중 k 개가 이 한계를 벗어날 경우 공정이 이상상태에 있다고 판정한다. 보조규칙은 한 점이 조치한계를 벗어날 때 이상상태로 판정하는 기본 주 판정규칙과 더불어 공정의 이상여부를 빨리 탐지하기 위해 경고한계(upper/lower warning limit(UWL/LWL))를 도입하는 런 규칙을 가리키며, 이를 통해 관리도의 민감도를 높일 수 있다. 즉, 보조규칙은 한 점이라도 조치한계를 벗어나거나, 또는 중심선과 조치한계 사이에 경고한계를 추가하여, k 개의 점이 조치한계와 경고한계 사이에 위치하면 공정이 이상상태라고 판정한다.

본 논문에서는 <그림 1>과 <그림 2>와 같이 주 규칙일 경우는 4종의 영역으로, 보조규칙일 경우는 6종의 영역으로 구분한다.



<그림 1> 주 규칙의 영역

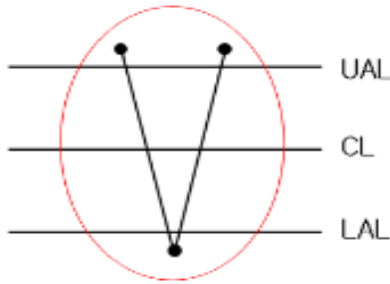


<그림 2> 보조 런 규칙의 영역

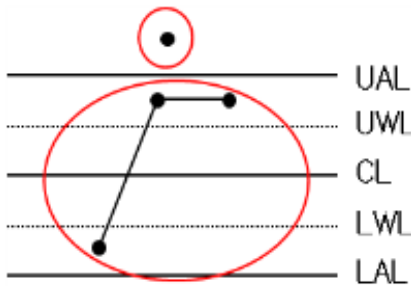
기존연구에서는 m 중 m 과 $(m+1)$ 중 m 런 규칙을 주로 다루고 있어, 이 소절에서는 상·하측 영역을 구별하지 않는 이런 런 규칙에 대해 기술하고자 한다.

2.2.1 m 중 m 런 규칙

m 중 m 주 런 규칙은 m 개의 점 모두 한쪽 또는 양쪽 조치한계(UAL, LAL)를 벗어나는 때(즉, 영역 A) 공정이 이상상태에 있다고 판정하는데, m 이 3일 때 <그림 3>에 예시되어 있다. m 중 m 보조 런 규칙은 한 점이라도 조치한계를 벗어나거나(영역 A) m 개의 점이 경고한계와 조치한계 사이(영역 W)에 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정하는데, 상·하측을 구별하지 않는 m 이 3일 경우가 <그림 4>에 예시되어 있다.



<그림 3> 3 중 3 주 런 규칙



<그림 4> 3 중 3 보조 런 규칙

2.2.2 $(m+1)$ 중 m 런 규칙

$(m+1)$ 중 m 주 런 규칙에서 m 개의 점이 영역 A이고 나머지 한 점이 조치한계 내(영역 T)에 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정한다. $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙은 기본 주 판정규칙 외에 연속하는 $(m+1)$ 개의 점 중 m 개의 점이 영역 W에 위치하고 나머지 한 점이 영역 T에 위치할 때도 공정이 이상상태에 있다고 판정한다.

2.3 상·하 영역의 구별여부

각 점에 대해 중심선을 기준으로 설정된 상·하 영역

에 따라 구별할 것인가에 의해 판정을 달리할 수 있다. 즉, 특정 점이 상측과 하측에 존재하는 동일 성격의 영역에 타점된 경우 동등하게 취급하는가에 따라 분류하는 것으로 Derman & Ross(1997)를 비롯한 그 이전 연구에서는 대부분 상·하 영역을 구별하지 않고 동등하게 취급하고 있으나 그 이후는 상·하 영역을 구별하여 한쪽에 속하여야만 런 규칙에 부합되는 것으로 다루고 있다.

2.3.1 상·하 영역을 구별하지 않는 경우

m 중 m 주 런 규칙(I)에서는 m 개의 점이 영역 A에 모두 타점되면 공정이 이상상태에 있다고 판정한다($m=3$ 인 <그림 3> 참고). $(m+1)$ 중 m 주 런 규칙(II)은 연속된 $(m+1)$ 개 점 중에서 한 점이 영역 T에 위치하고 m 개의 점이 영역 A에 있으면 공정이 이상상태에 있다고 판정하는 것이다.

m 중 m 보조 런 규칙(I)에서는 기본 주 판정규칙과 더불어 m 개의 점이 모두 영역 W에 타점되면 공정이 이상상태에 있다고 판정한다($m=3$ 인 <그림 4> 참고). $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙(II)은 기본 주 판정규칙 외에 하나의 점이 영역 T에 위치하고 m 개의 영역 W에 위치하면 공정이 이상상태에 있다고 판정한다.

2.3.2 상·하 영역을 구별하는 경우

m 중 m 주 런 규칙(III)에서는 m 개의 점이 모두 영역 AU나 영역 AL에 있으면 공정이 이상상태에 있다고 판정하며, $(m+1)$ 중 m 주 런 규칙(IV)에서는 연속된 $(m+1)$ 개 점 중에서 한 점이 영역 T에 위치하고 m 개의 점이 모두 한쪽 조치한계를 벗어나(즉, 영역 AU 또는 AL) 타점될 때 공정이 이상상태에 있다고 판정한다.

m 중 m 보조 런 규칙에서는 기본 주 판정규칙 외에 모든 m 개의 점이 영역 WU이거나 WL에 연속적으로 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정하며, $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙(IV)은 기본 주 판정규칙과 더불어 연속된 $(m+1)$ 개 점 중에 한 점이 영역 T에 위치하고 m 개의 점이 모두 영역 WU 혹은 영역 WL에 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정한다.

2.4 나머지 점의 위치 고려여부

n 점 중 $k(n > k)$ 개의 점이 중심선을 기준으로 한쪽 영역에 타점될 때 나머지 $(n-k)$ 점의 위치에 대한 고려여부에 따라 이상상태로 판정하는 연구가 Antzou-

kos & Rakitzis(2008a,b)에 의해 수행되었다. 따라서 이의 수용여부에 따라 $(m+1)$ 중 m 런 규칙을 대상으로 다음과 같이 분류할 수 있다.

2.4.1 나머지 점의 위치를 고려하지 않는 경우

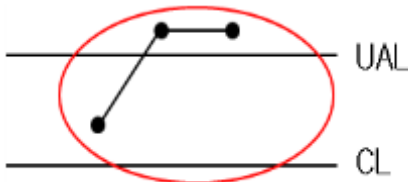
나머지 한 점의 위치를 고려하지 않는 $(m+1)$ 중 m 주 런 규칙(IV)과 $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙(IV)은 2.3.2절에 해당된다.

2.4.2 나머지 점의 위치를 고려하는 경우

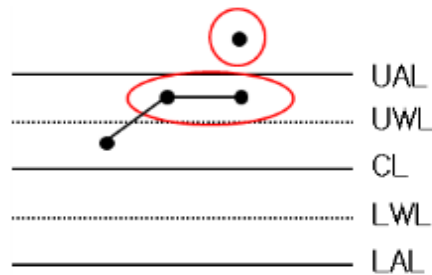
나머지 한 점의 위치를 고려하는 $(m+1)$ 중 m 주 런 규칙(V)에서는 $(m+1)$ 중 m 주 런 규칙(IV)과 달리 나머지 한 점이 동일한 상·하측 조치 영역 내(예를 들면, m 개의 점이 영역 AU이면 영역 TU)에 있어야 공정이 이상상태에 있다고 판정하는데, m 이 2일 때가 <그림 5>에 예시되어 있다.

나머지 한 점의 위치를 고려한 $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙(V)에서는 $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙(IV)과 달리 나머지 한 점이 동일한 상·하측 경고한계 내(영역 TU 또는 영역 TL)에 위치할 때만 이상상태에 있다고 판정하며, m 이 2일 경우를 <그림 6>에서 볼 수 있다.

지금까지 서술된 분류에 따른 기존 연구를 <표 1>에 정리되어 있다.



<그림 5> 3 중 2 주 런 규칙(V)



<그림 6> 3 중 2 보조 런 규칙(V)

<표 1> 기존연구의 분류

저자	런 규칙의 유형	주/보조 런 규칙	상·하 영역의 구분	나머지 점의 고려 여부
Weiler (1953)	m 중 m	주	구분 안함	고려 안함
Page(1955)	m 중 m	보조	구분 안함	고려 안함
Moore(1958)	m 중 m	주, 보조	구분 안함	고려 안함
Page(1962)	m 중 m	보조	구분함	고려 안함
Derman & Ross(1997)	2 중 2 3 중 2	주	구분 안함	고려 안함
Klein(2000)	2 중 2 3 중 2	주	구분함	고려 안함
Khoo (2003)	2 중 2 3 중 2 3 중 3 4 중 2 4 중 3	주	구분함	고려 안함
Khoo & Ariffin (2006)	2 중 2 3 중 2	보조	구분함	고려 안함
AcostaMejia (2007)	m 중 m $(m+1)$ 중 m	주, 보조	구분함	고려 안함
Antzoulakos & Rakitzis (2008a)	$(m+1)$ 중 m	보조	구분함	고려함
Antzoulakos & Rakitzis (2008b)	n 중 k $(k \leq n)$	주	구분함	구분함

3. 관리상태 하의 ARL

관리도의 조치한계와 경고한계를 설정하기 위해서는 ARL의 계산이 매우 중요하고 선행되어야 한다. ARL을 계산하는 방법으로는 Markov chain과 Shmueli & Cohen(2003)의 생성함수(generating function)을 활용한 절차 등이 이용되고 있다. 최근 들어 런 규칙을 가진 \bar{X} 관리도에 대해서는 전자가 주로 활용되고 있으며 이의 활용절차의 예시는 4절에서 다룬다.

한편, 런 규칙을 적용한 지금까지의 연구를 정리하는 과정에서 ARL 관계식 중 수식 오류 표기가 발견되었으며, 논문마다 사용되는 기호가 통일되어 있지 않아 이해가 그리 용이하지 않다. 이에 따라 ARL 관계식에 사용되는 기호를 통일하고 수식 오류 표기를 수정하여 2

절의 분류방식에 따라 관리상태 하의 ARL 식을 정리하여(이상상태인 경우도 동일한 방식으로 ARL 도출이 가능하지만 식 자체가 복잡하여 제외함) 관련 연구자에게 도움을 주고자 한다.

먼저 특정 영역에 한 점(표본평균(\bar{X}))이 타점 될 확률을 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned}
 P_{TU} &= \begin{cases} \Pr(CL \leq \bar{X} < UAL) & \text{주 규칙} \\ \Pr(CL \leq \bar{X} < UWL) & \text{보조규칙} \end{cases} & (1) \\
 P_{TL} &= \begin{cases} \Pr(LAL < \bar{X} < CL) & \text{주 규칙} \\ \Pr(LWL < \bar{X} < CL) & \text{보조규칙} \end{cases} \\
 P_{AU} &= \Pr(\bar{X} \geq UAL) & \text{주·보조규칙} \\
 P_{AL} &= \Pr(\bar{X} \leq LAL) & \text{주·보조규칙} \\
 P_{WU} &= \Pr(UWL \leq \bar{X} < UAL) & \text{보조규칙} \\
 P_{WL} &= \Pr(LWL \leq \bar{X} < LAL) & \text{보조규칙} \\
 P_T &= P_{TU} + P_{TL} \\
 P_A &= P_{AU} + P_{AL} \\
 P_W &= P_{WU} + P_{WL}
 \end{aligned}$$

3.1 기존 문헌의 수식 오류

일부 논문들의 ARL 관계식에서 다음과 같은 수식 오류 등이 포함되어 있다.

(1) Klein(2000)의 논문 내용 중 상·하 영역을 구별하지 않는 2중 2 주 런 규칙에서 관리상태 하의 ARL (p.430 식(A1))의 분모의 지수승에 오류가 포함되어 있다. 여기서 $ARL(0)$ 은 공정평균의 이동량이 “0”인 관리상태 하의 ARL이다.

$$ARL(0) = \frac{(1+P_A)}{2P_A} \rightarrow ARL(0) = \frac{(1+P_A)}{2P_A^2}$$

(2) 다양한 런 규칙의 런 길이 분포를 찾는 방법을 소개한 Shmueli & Cohen(2003)의 논문 내용 중 상·하 영역을 구별하는 m 중 m 주 런 규칙의 ARL 관계식 (p.482 식(3.3))에 부호의 오류가 들어있다. Lim & Cho(2009)도 이를 지적하고 있다.

$$\begin{aligned}
 ARL &= \frac{(1-P_W^m)(1-P_A^m)}{P_A [(1-P_W^m)(1-P_A^m)] + (1-P_W)(1+P_A^m)P_W^m + (1-P_A)(1+P_W^m)P_A^m} \\
 \rightarrow ARL &= \frac{(1-P_W^m)(1-P_A^m)}{P_A [(1-P_W^m)(1-P_A^m)] + (1-P_W)(1-P_A^m)P_W^m + (1-P_A)(1-P_W^m)P_A^m}
 \end{aligned}$$

(3) Acosta-Mejia(2007)는 상·하 영역에 대한 구별이 있는 m 중 m 보조 런 규칙이 대상이나, 이에 대한 p.133 식(2)는 상·하 영역에 대한 구별이 없는 경우의 $ARL(0)$ 로 잘못된 인용을 하고 있다.

(4) Antzoulakos & Rakitzis(2008b)에는 m 중 m 주 런 규칙이면서 상·하 영역에 대한 구별이 있는 관리상태 하의 ARL(p.406 두 번째 식)의 부호에 오류가 있다.

$$\begin{aligned}
 ARL(0) &= \left(P_{AU} + P_{AL} + \frac{P_{AU} - P_{AU}^m}{1 - P_{AU}^m} + \frac{P_{AL} - P_{AL}^m}{1 - P_{AL}^m} \right)^{-1} \\
 \rightarrow ARL(0) &= \left(P_{AU} + P_{AL} - \frac{P_{AU} - P_{AU}^m}{1 - P_{AU}^m} - \frac{P_{AL} - P_{AL}^m}{1 - P_{AL}^m} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

3.2 관리상태 하의 ARL

이 소절에서는 이상상태 하의 ARL 식은 상당히 복잡하므로, 관리상태 하의 ARL을 m 중 m 주 규칙과 보조 런 규칙, $(m+1)$ 중 m 런 규칙에서 $m=2$ 일 때의 주·보조규칙(3.2절에 분류된 10가지)에 대한 ARL(최종 식은 P_A 와 P_W 로 표현함)을 재정리하였다.

3.2.1 m 중 m 런 규칙

(1) 주 규칙: 상·하 영역의 구별이 없는 경우

이 규칙은 $R(m, m, UAL/LAL, \infty/-\infty)$ 로 정의되는 데, 런 규칙을 $R(n, k, a_1/a_2, b_1/b_2)$ 로 표시하면 n 개의 연속된 \bar{X} 중에서 k 개가 구간 a_1 과 b_1 또는 a_2 와 b_2 사이에 타점되면 공정이 이상상태에 있다고 판정한다. Weiler(1953)에 의해 제안된 런 규칙으로 <그림 1>의 주 규칙(I)에 해당되며, $ARL(0)$ 은 다음과 같다.

$$ARL(0) = \frac{1 - P_A^m}{(1 - P_A)P_A^m} = \frac{\sum_{j=1}^m P_A^{j-1}}{P_A^m} \tag{2}$$

(2) 주 규칙: 상·하 영역의 구별이 있는 경우

이 런 규칙은 $R(m, m, UAL, \infty) \cup R(m, m, LAL, -\infty)$ 로 표현될 수 있으며 두 조건하에서 하나에 속하면 이상상태로 판정되는데 Klein(2000)과 Antzoulakos & Rakitzis(2008b)가 다루었다. 주 규칙(III)에 해당되는 이 규칙의 $ARL(0)$ 은 식 (3)과 같다.

$$ARL(0) = \frac{1 - P_{AU}^m}{2(1 - P_{AU})P_{AU}^m} = \frac{\sum_{j=1}^m P_{AU}^{j-1}}{2P_{AU}^m} = \frac{2^m - P_A^m}{(2 - P_A)P_A^m} \tag{3}$$

여기서 $P_{AU} = P_{AL} = P_A/2$ 임.

(3) 보조규칙: 상·하 영역의 구별이 없는 경우
이 런 규칙은 $R(1, 1, UAL/LAL, \infty/-\infty) \cup R(m, m, UWL/LWL, UAL/LAL)$ 로 표현되고, Page(1955)와 Moore(1958)가 제안하였으며 KS Q ISO 7873:2009에서 채택되고 있다. 한편 Moore는 이 경우의 m 중 m 보조 런 규칙을 제안하였으나 관리상태 하의 ARL을 명시하지는 않았으며, Acosta-Mejia(2007)는 이 식을 언급하고 있다. <그림 2>의 보조규칙(I)에 해당되는 이 규칙의 $ARL(0)$ 은 다음과 같다.

$$ARL(0) = \frac{1 - P_W^m}{1 - P_T - P_W + P_T P_W^m} = \frac{\sum_{j=1}^m P_W^{j-1}}{1 - P_T \sum_{j=1}^m P_W^{j-1}} = \frac{1 - P_W^m}{P_A + (1 - P_A - P_W) P_W^m} \quad (4)$$

(4) 보조규칙: 상·하 영역의 구별이 있는 경우
이런 규칙은 $R(1, 1, UAL/LAL, \infty/-\infty) \cup R(m, m, UWL, UAL) \cup R(m, m, LWL, LAL)$ 로 표현되며 세 조건 중의 하나가 만족되면 공정이 이상상태에 있다고 판정한다. Page(1962)와 Schumeli & Cohen(2003), Lim & Cho(2009), $m=2$ 일 때 Khoo & Ariffin(2006)과 김영복 등(2008)이 다룬 것으로, 보조규칙(III)에 해당되는 이 규칙의 $ARL(0)$ 은 식 (5)가 된다.

$$ARL(0) = \frac{1 - P_{WU}^m}{2[1 - P_{WU} - (1 - P_{WU} - P_{AU})(1 - P_{WU}^m)]} = \frac{\sum_{j=1}^m P_{WU}^{j-1}}{2 - (1 + P_T) \sum_{j=1}^m P_{WU}^{j-1}} = \frac{2^m - P_W^m}{P_A(2^m - P_W^m) + P_W^m(2 - P_W)} \quad (5)$$

여기서 $P_{WU} = P_{WL} = P_W/2$

3.2.2 3 중 2 런 규칙

Derman & Ross(1997)가 최초로 3 중 2 주 런 규칙을 제안한 이후 ($m+1$) 중 m 런 규칙 중에서 가장 많이 다루고 있으므로, 본 소절에서는 이에 대한 ARL(0)을 정리하고자 한다.

(1) 주 규칙: 상·하 영역의 구별이 없는 경우

Derman & Ross(1997)가 제안한 $R(2, 3, UAL/LAL, \infty/-\infty)$ 로 정의되며, 주 규칙(II)에 적용되는 $ARL(0)$

은 다음과 같다.

$$ARL(0) = \frac{1 + 2P_A - P_A^2}{2P_A^2 - P_A^3} \quad (6)$$

(2) 주 규칙: 상·하 영역의 구별이 있으며 나머지 한 점의 위치를 고려하지 않는 경우

Klein(2000), Khoo(2003)와 Kim et al.(2009) 등에서 다룬 런 규칙으로 $R(2, 3, UAL, \infty) \cup R(2, 3, LAL, -\infty)$ 로 정의되며, Klein(2000)은 3 중 2 런 규칙의 ARL(0)을 명시하지는 않았다. 여기에 해당되는 주 규칙(IV)에 적용되는 $ARL(0)$ 은 식 (7)과 같다.

$$ARL(0) = \frac{1 + P_{AU}(3 + P_{AU} - 2P_{AU}^2)}{2P_{AU}(2 + P_{AU} - 2P_{AU}^2)} = \frac{4 + P_A(6 + P_A - P_A^2)}{P_A(4 + P_A - P_A^2)} \quad (7)$$

(3) 주 규칙: 상·하 영역의 구별이 있으며 나머지 한 점의 위치를 고려한 경우

Antzoulakos & Rakitzis(2008b)가 제안한 것으로 $[R(2, 3, UAL, \infty) \cap R(1, 3, CL, UAL)] \cup [R(2, 3, LAL, -\infty) \cap R(1, 3, CL, LAL)]$ 로 정의된다. 그들은 4 중 3 런 규칙을 적용한 관리상태 하의 ARL식은 제공하였으나 3 중 2 런 규칙에 대해서는 제공하지 않았다. <그림 3>의 주 규칙(V)에 해당이 되는 규칙의 $ARL(0)$ 은 다음과 같이 된다.

$$ARL(0) = \frac{2 + 3P_{AU} - 2P_{AU}^2}{2P_{AU}^2(3 - 2P_{AU})} = \frac{4 + 3P_A - P_A^2}{P_A^2(3 - P_A)} \quad (8)$$

(4) 보조 규칙: 상·하 영역의 구별이 없는 경우

해당 런 규칙은 $R(1, 1, UAL/LAL, \infty/-\infty) \cup R(2, 3, UWL/LWL, UAL/LAL)$ 로 정의되며 이 경우의 3 중 2 런 규칙의 ARL(0)을 다룬 기존연구는 없다. 이에 해당되는 보조규칙(II)하에서 관리상태의 ARL은 식 (9)가 된다.

$$ARL(0) = \frac{1 + P_W + P_T}{1 - P_T(1 + P_T P_W)} = \frac{2 - P_A}{1 - (1 - P_A - P_W) - P_W(1 - P_A - P_W)^2} \quad (9)$$

(5) 보조 규칙: 상·하 영역의 구별이 있으며 나머지 한 점의 위치를 고려하지 않는 경우

Khoo & Ariffin(2006)과 Acosta-Mejia(2007), 김

영복 등(2008)이 다룬 런 규칙으로 $R(1, 1, UAL/LAL, \infty/-\infty) \cup R(2, 3, UWL, UAL) \cup R(2, 3, LWL, LAL)$ 로 정의된다. 한편 Acosta-Mejia(2007)는 이 경우를 다루기는 하였지만 관리상태 하의 ARL을 명시적으로 제공하지 않았으며, 여기에 해당되는 보조규칙(IV)하에서 $ARL(0)$ 은 다음과 같다.

$$ARL(0) = \frac{1 + (P_T + 2)P_{WU} + (P_T + 2)P_{WU}^2}{1 - P_A^2 P_{WU}(1 + P_{WU}) - P_T(1 + P_{WU} + P_{WU}^2)} \quad (10)$$

$$= \frac{4 + 2(3 - P_A)P_W + (1 - P_A)P_W^2 - P_W^3}{P_A(4 + 6P_W - P_W^2 - 2P_W^3) - P_A^2 P_W(2 + P_W) + P_W^2(4 + P_W - P_W^2)}$$

(6) 보조 규칙: 상·하 영역의 구별이 있으며 나머지 한 점의 위치를 고려한 경우

Antzoulakos & Rakitzis(2008a)가 제안한 것으로 $R(1, 1, UAL/LAL, \infty/-\infty) \cup [R(2, 3, UWL, UAL) \cap R(1, 3, CL, UAL)] \cup [R(2, 3, LWL, LAL) \cap R(1, 3, CL, LAL)]$ 로 정의되며 <그림 4>에 해당되는 보조규칙(V)하에서 관리상태의 ARL은 식 (11)이 된다.

$$ARL(0) = \frac{1 + P_{WU} + P_{WU} P_{TU}}{1 - P_{WU} - (2 + P_{WU})P_{TU} - 2P_{WU} P_{TU}^2} \quad (11)$$

$$= \frac{4 + P_W(3 - P_A - P_W)}{4P_A + P_W(3P_A - P_A^2) + P_W^2(3 - 2P_A) - P_W^3}$$

3.3 런 규칙의 수행도 비교

런 규칙을 가진 \bar{x} 관리도의 수행도를 평가하기 위해

거의 대부분의 연구들은 관리상태 하의 ARL을 370.4가 되도록 조치한계와 경고한계(보조 런 규칙일 경우)를 설정한 조건 하에서 공정평균이 이동할 경우의 ARL을 비교하고 있다. 즉, 기존 연구에서 주로 다루고 있는 공정평균이 한 쪽으로 이동할 경우는 주 규칙(V)와 보조 규칙(V)가 가장 우수한 것은 자명하다[5,6].

또한 Derman과 Ross(1997) 이후 발표된 연구들은 이전 연구를 개선한 런 규칙을 제안하고 있으므로 대체적으로 <표 1>에서 정리된 바와 같이 후속논문의 런 규칙의 수행도가 우수하다. 예를 들면 상·하 영역을 구별하는 런 규칙이 그렇지 않는 경우보다 공정평균의 한 쪽 방향으로 이동 시 통계적 검출능력이 높다.

<표 2>에서 이를 예증하기 위해 품질특성치가 정규분포를 따를 경우에 관리도의 CL을 0, UAL과 LAL을 d_2 과 $-d_2$, 그리고 UWL과 LWL을 d_1 , $-d_1$ 로 정의하여, 공정평균이 c 만큼 이동할 때(여기서 \bar{X} 의 표준편차를 "1"로 표준화함) 2절과 3절에서 분류된 10가지 3중 3런 규칙과 3중 2런 규칙에 대해 관리상태 하의 ARL이 370.4가 되는 한계 값(보조 런 규칙은 $d_2 = 3.5$ 인 경우만 수록)과 ARL을 재계산하여 정리하였다.

<표 1>에 정리된 연구와 <표 2>의 결과를 요약하면, 공정평균의 큰 이동 시 검출능력이 좋은 전통적인 Shewhart \bar{x} 관리도를 유지하면서 런 규칙을 부가한 보조 규칙을 주 규칙보다, 일반적인 n 중 $k(k \leq n)$ 런 규칙 중에서는 $(m+1)$ 중 m , 더욱이 m 이 2, 3일 경우가

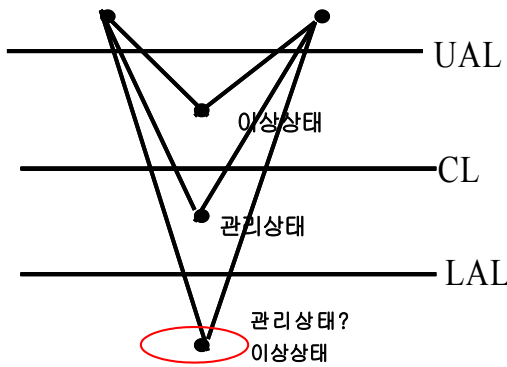
<표 2> 10가지 런 규칙의 수행도 비교

런 규칙		d_1	d_2	$c = 1.0$	$c = 1.5$	$c = 2.0$	$c = 3.0$
3 중 3	주 규칙(I)	-	1.451	39.12	12.68	6.21	3.41
	주 규칙(III)	-	1.200	21.45	8.48	4.92	3.23
	보조 규칙(I)	1.485	3.5	35.48	11.23	5.25	2.32
	보조규칙(III)	1.237	3.5	22.46	8.05	4.17	1.99
3 중 2	주 규칙(II)	-	2.070	33.15	10.71	5.05	2.47
	주 규칙(IV)	-	1.929	23.30	8.38	4.33	2.36
	주 규칙(V)	-	1.866	21.44	7.78	4.10	2.32
	보조 규칙(II)	2.105	3.5	31.88	10.18	4.67	2.01
	보조 규칙(IV)	1.967	3.5	23.41	8.21	4.08	1.94
	보조 규칙(V)	1.906	3.5	21.68	7.66	3.89	1.91

통계적 수행도가 높으면서 단순한 판정규칙을 가지고 있어 추천할 수 있다[5,6,7,9]. 따라서 런 규칙의 선택 여부는 현업에서 적용된 런 규칙의 상대적 복잡성과 통계적 우월성(ARL), 공정의 이동 형태 등을 고려하여 채택할 수 있다.

4. 새로운 런 규칙의 ARL

Antzoulakos & Rakitzis(2008b)는 상·하 영역의 구별과 나머지 점들의 위치를 고려한 일반적인 n 중 k 주 런 규칙을 제안하였다. 이를 <그림 7>의 3 중 2 주 규칙에 적용하면 3개의 점 중 2개의 점이 UAL(또는 LAL)을 벗어나고 나머지 한 점이 UAL~CL(또는 CL~LAL)에 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정하는 주 런 규칙이 된다. 여기서 나머지 한 점이 <그림 7>과 같이 타점된 위치의 반대편의 조치한계를 벗어날 경우에(타원 표시점) 관리상태로 보는 것 보다 3점 모두가 조치한계를 벗어났으므로 이상상태라고 보는 것이 더 타당하다. 이 절에서는 이런 점을 감안한 새로운 3 중 2 주 런 규칙을 제안하고 조치한계를 설정하는데 필요한 ARL을 구하기 위해 Markov chain으로 이를 설정하는 절차를 예시하고자 한다.



<그림 7> 새로운 3 중 2 주 규칙

이 주 런 규칙은 $[R(2, 3, UAL, \infty) \cap R(1, 3, CL, UAL)] \cup [R(2, 3, UAL, \infty) \cap R(1, 3, LAL, -\infty)] \cup [R(2, 3, LAL, -\infty) \cap R(1, 3, CL, LAL)] \cup [R(2, 3, LAL, -\infty) \cap R(1, 3, UAL, \infty)]$ 로 표시되는데 이 중 하나의 조건에 속한다면 공정이 이상상태에 있다고 판정한다.

4.1 Markov chain에 의한 모형화

3.3절과 같이 조치상한을 d_2 , 그리고 조치하한을

$-d_2$ 로 정의하여, <그림 7>의 각 영역 내 한 점이 타점될 확률인 $P_{AU}, P_{TU}, P_{TL}, P_{AL}$ 을 공정평균이 c 만큼 이동할 시 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_{AU} = 1 - \Phi(d_2 - c) \tag{12}$$

$$P_{AL} = \Phi(-d_2 - c) = 1 - \Phi(d_2 + c)$$

$$P_{TU} = \Phi(d_2 - c) - \Phi(-c) = \Phi(d_2 - c) + \Phi(c) - 1$$

$$P_{TL} = \Phi(-c) - \Phi(-d_2 - c) = \Phi(d_2 + c) - \Phi(c)$$

단, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수임.

Markov chain에 의해 ARL을 도출하고 대상 관리도를 설계하는 절차를 다음과 같이 간략하게 요약할 수 있다.

- <단계 1> Markov chain의 상태를 정의한다.
- <단계 2> 전이확률 행렬 \mathbf{P} 를 구한다.
- <단계 3> \mathbf{P} 를 식 (13)과 같이 분할하여 최초 상태에서 흡수상태로 전이하는 단계의 기댓값인 관리상태와 특정 이상상태하의 ARL을 구한다.
- <단계 4> <단계 3>에서 구한 ARL로부터 조치한계(더불어 경고한계)를 설정한다.

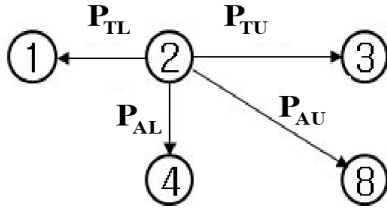
<단계 1>의 상태정의를 여러 연구 중에서 Antzoulakos & Rakitzis(2008a)에서 제안한 방식을 적용하는 것이 보다 체계적이다. 즉, 공정이 이상상태에 있다고 판정되는 영역의 집합을 먼저 나열하는데 새로운 3 중 2 주 런 규칙의 공정이 이상상태에 있다고 판정하는 점들의 영역은 $\{AU AU, AUTUAU, AU ALAU, ALAL, ALTLAL, ALAUAL\}$ 가 된다. 이 집합에서 마지막에 타점되는 영역을 제외한 나머지 타점되는 영역의 순서열에 따라 상태를 정의하고 다음에 타점되는 점의 위치에 따라 상태 전이확률을 구한다.

즉, 첫 번째 점이 영역 AU에 있을 경우 상태 2로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 AU와 영역 TU에 있을 경우를 상태 3으로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 AU와 영역 AL에 있을 경우를 상태 4로, 첫 번째 점이 영역 AL에 있을 경우를 상태 5로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 AL와 영역 TL에 있을 경우를 상태 6으로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 AL와 영역 AU에 있을 경우를 상태 7로 정의한다. 또한 이상상태를 판정하는 영역과 관련이 없는 경우인 두 점이 영역 TU 또는 TL에 있을 경우를 상태 1로, 이상상태를 흡수상

태인 8로 정의한다.

<단계 2>의 전이확률 행렬을 각 상태의 전이 다이어그램으로부터 구할 수 있다. 예를 들면 상태 2인 첫 번째 점이 영역 AU에 있을 때, <그림 8>의 전이 다이어그램에 따라 전이확률 벡터가 <표 3>의 2행과 같이 주어진다.

유사한 방법으로 상태 1, 3~7에 적용하여 정리한 전이확률 행렬이 <표 3>에 있다.



<그림 8> 전이 다이어그램: 상태 2

<표 3> 새로운 주 런 규칙의 전이확률 행렬

상태	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$P_{TU}+P_{TL}$	P_{AU}	0	0	P_{AL}	0	0	0
2	P_{TL}	0	P_{TU}	P_{AL}	0	0	0	P_{AU}
3	$P_{TU}+P_{TL}$	0	0	0	P_{AL}	0	0	P_{AU}
4	P_{TU}	0	0	0	0	P_{TL}	0	$P_{AU}+P_{AL}$
5	P_{TU}	0	0	0	0	P_{TL}	P_{AU}	P_{AL}
6	$P_{TU}+P_{TL}$	P_{AU}	0	0	0	0	0	P_{AL}
7	P_{TL}	0	P_{TU}	0	0	0	0	$P_{AU}+P_{AL}$
8	0	0	0	0	0	0	0	1

4.2 ARL의 계산

<표 3>에서 흡수상태인 8을 제외한 나머지를 R (7×7 행렬)이라 하고 원소 (8,8)인 1을 제외한 나머지 열 행렬(7×1)을 $(I-R)1'$ 라 할 때 전이확률 행렬 P 는 다음의 분할행렬로 구분할 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} R & (I-R)1' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

따라서 <단계 3>의 공정평균이 이동량이 c 일 때의 ARL은 식(14)로 구할 수 있다.

$$ARL(c) = e_1(I-R)^{-1}1' \quad (14)$$

단, e_1 은 (1, 1)의 원소가 1, 나머지 원소가 0인 1×7 행벡터

먼저 관리상태 하의 ARL은 상·하 영역의 확률이 동일하므로, $P_{AL} = P_{AU}$, $P_{TL} = P_{TU}$ 을 식(14)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$ARL(0) = \frac{P_{AU}(2+P_{TU})(1+P_{AU})}{1-2P_{TU}-P_{AU}P_{TU}(1+P_{AU})(3+2P_{TU})} \quad (15)$$

여기서 $P_{TU} = (1-2P_{AU})/2$, $P_A = 2P_{AU}$ 이므로

$$ARL(0) = \frac{8+10P_A+3P_A^2-P_A^3}{P_A^2(6-3P_A+P_A^2)} \quad (16)$$

로 간략하게 정리할 수 있다.

4.3 조치한계의 설정

<단계 4>의 조치한계는 관리상태 하의 ARL이 370.4가 되도록 설정해야 Shewhart의 \bar{X} 관리도와 런 규칙을 가진 관리도를 동일 조건하에서 성능척도를 비교할 수 있다. 따라서 $c=0$ 일 때 식(12)로부터 각 영역의 확률을 구하고, 이를 식(16)의 관리상태의 ARL에 대입하여 이 값이 370.4가 되는 조치한계 d_2 가 1.871로 구해진다.

5. 결 론

제조공정을 모니터링하는 통계적 공정관리에서 가장 효율적인 기법이 관리도이다. Shewhart의 \bar{X} 관리도가 공정 품질특성치의 평균용 관리도로서 가장 널리 쓰이지만, 상당히 큰 공정평균의 이동 시의 감지력은 뛰어나나 중간 정도이하의 공정평균의 이동에 대한 감지력이 떨어지는 단점을 가지고 있다.

이에 대한 하나의 대안으로 런 규칙이 활용되고 있다. 즉, 1977년 Derman and Ross가 주 런 규칙을 적용하는 관리도에 대해 Markov chain에 의해 ARL을 구하는 방법을 제시한 이래 런 규칙을 주 판정규칙과 보조 판정규칙으로 활용하는 다수 논문이 발표되었다. 본 논문은 먼저 이런 관련 문헌을 런 규칙의 형태, 런 규칙의 역할, 상·하 영역의 구별여부, 나머지 점들의 활용여부에 따라 분류하여 관련 연구자에게 최근 연구동향을 파악할 수 있도록 기존 연구를 통합하였다.

또한 기 발표된 문헌에서 관리도의 평가척도인 ARL

에 대한 식을 제공하고 있는데, 여러 군데에 수식 표기 오류가 있어 연구자들에게 혼동을 야기하고 있다. 따라서 관련 기호를 통일하여 이를 교정하고, 전술된 분류 방식에 따라 관리상태의 ARL을 m 중 m 주 런 규칙과 3중 2 보조 런 규칙일 경우에 대해 정리하고 이의 수행도를 고찰하였다.

더불어 기존 런 규칙을 개선한 새로운 주 규칙을 제안하고 이의 ARL을 구하고 관리한계를 설정하는 절차를 제시하였다.

향후 런 규칙을 가진 관리도에 대한 향후 연구방향을 다음과 같이 제시할 수 있다.

첫째, 런 규칙의 수행도를 평가하는 전형적인 대상인 공정 평균이 갑작스럽게 이동하여 지속되는 경우 외에 점진적 변화, 공정 표준편차도 변하는 경우 등 다양한 공정 상황 하에서 수행도 평가가 필요하다.

둘째, 기존 연구들은 다양한 주 런 규칙과 보조 런 규칙에 대한 통계적 수행도만 비교하고 있는데, 이들의 실제 현업에의 활용도를 조사해 볼 필요성도 있다.

셋째, 보조 런 규칙의 경고한계와 조치한계를 설정시 조치한계를 임의로 정하고 관리상태 하의 ARL이 370.4가 되도록 경고한계를 설정하고 있는데 이를 개선한 설계방식이 요구된다.

마지막으로 현재까지 수행된 관련 연구에서 전형적 공정 변화여건에서 가장 우수하다고 알려진 Antzoulakos, D. L. and Rakitzis(2008a,b)의 런 규칙을 개선한 방식에 대한 연구도 필요하다.

참고문헌

- [1] 강분규, 임태진(2010), "VSI 런-규칙 관리도의 경제적-통계적 설계", 『품질경영학회지』, 38권, 2호, pp. 190-201.
- [2] 김영복, 홍정식, 이창훈(2008), "런 규칙이 혼합된 슈하르트 관리도의 통계적 설계", 『품질경영학회지』, 36권, 3호, pp. 34-44.
- [3] 배도선(1997), 『최신 품질관리』, 영지문화사.
- [4] KS Q ISO 7873:2009, "경고한계를 갖는 산술평균 관리도", 『기술표준원』, 2009.
- [5] Acosta-Mejia, C. A.(2007), "Two Sets of Runs Rules for the \bar{X} Chart", *Quality Engineering*, Vol. 19, pp. 129-136.
- [6] Antzoulakos, D. L. and Rakitzis, A. C.(2008a), "The Revised m -of- k Runs Rule", *Quality Engineering*, Vol. 20, pp. 75-81.
- [7] Antzoulakos, D. L. and Rakitzis, A. C.(2008b), "The Modified r Out of m Control Chart", *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, Vol. 37, pp. 396-408.
- [8] Derman, C. and Ross, S. M.(1997), *Statistical Aspects of Quality Control*, San Diego(USA).
- [9] Khoo, M. B. C.(2003), "Design of Runs Rules Schemes", *Quality Engineering*, Vol. 16, pp. 27-43.
- [10] Khoo, M. B. C. and Ariffin, K, N.(2006), "Two Improved Runs Rules for the Shewhart \bar{X} Control Chart", *Quality Engineering*, Vol. 18, pp. 173-178.
- [11] Kim, Y. B., Hong, J. S. and Lie, C. H.(2009), "Economic-Statistical Design of 2-of-2 and 2-of-3 Runs Rule Scheme", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, pp. 215-228.
- [12] Klein, M.(2000), "Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, pp. 427-431.
- [13] Lim, T. J. and Cho, M. S.(2009), "Design of Control Charts with m -of- m Runs Rules", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, pp. 1085-1101.
- [14] Montgomery, D. C.(2009), *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th. ed. John Wiley & Sons, New York(USA).
- [15] Moore, P. G.(1958), "Some Properties of Runs in Quality Control Procedures", *Biometrika*, Vol. 45, pp. 89-95.
- [16] Page, E. S.(1955), "Control Charts with Warning Lines", *Biometrika*, Vol. 42, pp. 243-257.
- [17] Page, E. S.(1962), "A Modified Control Chart with Warning Lines", *Biometrika*, Vol. 49, pp. 171-176.
- [18] Shmueli, G. and Cohen, A.(2003), "Run-Length Distribution for Control Charts with Runs and Scans Rules", *Communications in Statistics: Theory and Methods*, Vol. 32, pp. 475-495.
- [19] Weiler, H.(1953), "The Use of Runs to Control the Mean in Quality Control", *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 48, pp. 816-825.
- [20] Western Electric(1956), *Statistical Quality Control Handbook*, Indianapolis(USA), Western Electric Corporation.