East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 2, pp. 159-172

실수계의 공리를 이용한 지수 a^r의 학습과 지도

이 병 수

ABSTRACT. In all Mathematics I Textbooks(Kim, S. H., 2010; Kim, H. K., 2010; Yang, S. K., 2010; Woo, M. H., 2010; Woo, J. H., 2010; You, H. C., 2010; Youn, J. H., 2010; Lee, K. S., 2010; Lee, D. W., 2010; Lee, M. K., 2010; Lee, J. Y., 2010; Jung, S. K., 2010; Choi, Y. J., 2010; Huang, S. K., 2010; Huang, S. W., 2010) in high schools in Korea these days, it is written and taught that for a positive real number a, $a^{\frac{m}{n}}$ is defined as $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, where $m \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}$ have common prime factors. For that situation, the author shows his opinion that the definition is not well-defined and $a^{\frac{m}{n}}$ must be defined as $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$, whenever $\sqrt[n]{a}$ is defined, based on the field axiom of the real number system including rational number system and natural number system. And he shows that the following laws of exponents for reals:

$$\begin{cases} a^{r+s} = a^r \cdot a^s \\ (a^r)^s = a^{rs} \\ (ab)^r = a^r b^r \end{cases}$$

for a, $b > 0$ and r, $s \in \mathbb{R}$ hold by the completeness axiom of the real number system and the laws of exponents for natural numbers, integers, rational numbers and real numbers are logically equivalent.

Ⅰ. 서론

현행 수학과 교육과정에 따르면, 유리수 지수의 정의는 고등학교 선택과목 중 하나인 수학1에서 다루어진다(교육인적자원부, 2007). 실제로 현행 수학1 교과서

2012년 1월 12일 투고, 2012년 2월 22일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification: 97C30
Key words: 지수법칙, 체의 공리, 완비적 공리

에서는, a가 실수일 때 $x^n = a$의 해로서 a의 n제곱근(복소수 포함)을 정의하고 $a > 0$일 때 a의 양의 n제곱근으로 실수 $\sqrt[n]{a}$을 정의한 후, 양의 실수 a의 양의 거듭제곱근에 대하여 m, n이 자연수일 때

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad 1)$$

이 성립함을 다루고 있다.

또한, 대부분의 교과서(김수환 외, 2010; 김해경 외, 2010; 양승갑 외, 2010, 우무하 외, 2010; 우정호 외, 2010; 유희찬 외, 2010; 윤재한 외, 2010; 이강섭 외, 2010; 이동원 외, 2010; 이만근 외, 2010; 이준열 외, 2010; 정상권 외, 2010; 최용준 외, 2010; 황석근 외, 2010; 황선욱 외, 2010)에서는, $a > 0$일 때 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$을

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

으로 정의하고 있다.

본 논문에서는 현행 수학1 교과서에 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ a > 0)$로 정의된 것의 문젯점을 지적하고, 그 대안으로 실수계의 체의 공리를 바탕으로 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$으로 정의해야 함을 밝히고, 실수계 $\mathbb{R}$에서 지수법칙의 핵심은 a, b가 양수일 때 임의 실수 r, $s \in \mathbb{R}$에 대해

$$\begin{cases} a^r \cdot a^s = a^{r+s} \\ (a^r)^s = a^{rs} \\ (ab)^r = a^r \cdot b^r \end{cases} \qquad (*)$$

이 성립하는 것이 실수계의 완비적 공리를 바탕으로 함을 밝힌다.

또한 $(*)$이 성립하는 과정을

(1) r, s가 자연수인 경우,

(2) r, s가 정수인 경우,

(3) r, s가 유리수인 경우,

(4) r, s가 무리수인 경우

로 나누어 조사하여 그들이 모두 동치임을 보인다.

이어서 위의 내용들을

(ⅰ) 초등·중등·고등학교에서 어떻게 학습지도를 하고 있으며,

(ⅱ) 어떤 문젯점을 가지고 있고,

(ⅲ) 어떻게 학습지도를 하는 것이 바람직한 가를 다루고자 한다.

---

1) m이 정수일 때 $a^{-\frac{m}{n}}$을 정의한다.

Ⅱ. 지수 a^r의 학습과 지도

실수계(Real number system) $\mathbb{R}$은 다음과 같은 세 가지의 공리(체의 공리, 순서적 공리, 완비적 공리)를 갖춘 유일한 완비순서체(complete ordered field)이다(Trench, 2003, p.4, 정동명, 조승제, 2004, p.62, 정리 2.4.2).

(1) 체의 공리(field axion, 대수적 공리)

(ⅰ) $\mathbb{R}$은 두 이항 연산(+, 덧셈, ·, 곱셈)에 관하여 닫혀 있다.
(ⅱ) 임의 a, $b \in \mathbb{R}$에 대해 $a+b=b+a$가 성립한다.
(ⅲ) 임의 a, b, $c \in \mathbb{R}$에 대해 $(a+b)+c=a+(b+c)$가 성립한다.
(ⅳ) 특정한 원소 $0 \in \mathbb{R}$가 존재해서 임의 $a \in \mathbb{R}$에 대해 $a+0=0+a=a$가 성립한다.
(ⅴ) 각각의 $a \in \mathbb{R}$에 대해 $a+x=x+a=0$를 만족하는 $x \in \mathbb{R}$가 존재한다.
(ⅵ) 임의 a, $b \in \mathbb{R}$에 대해 $a \cdot b=b \cdot a$가 성립한다.
(ⅶ) 임의 a, b, $c \in \mathbb{R}$에 대해 $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$가 성립한다.
(ⅷ) 특정한 원소 $1 \in \mathbb{R}$이 존재해서 (단, $1 \neq 0$) 임의 $a \in \mathbb{R}$에 대해 $a \cdot 1=1 \cdot a=a$가 성립한다.
(ⅸ) 각각의 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$에 대해 $a \cdot x=x \cdot a=1$인 $x \in \mathbb{R}$가 존재한다.
(ⅹ) 임의 a, b, $c \in \mathbb{R}$에 대해 $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$가 성립한다.

정의 1. $a \cdot b$를 ab로 나타내고 특별히 $a=b$인 경우 $a \cdot a$를 a^2으로 나타낸다. 마찬가지로 $(a \cdot a) \cdot a$를 a^3으로 나타내고 일반적으로 임의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $a^{n+1}=(a^n) \cdot a$로 정의한다(Bartle & Sherbert, p.24, 정동명, 조승제, p.35).

(2) 순서 공리(order axiom)

$\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 $\mathbb{P}$가 존재해서
(ⅰ) 임의 a, $b \in \mathbb{P}$에 대해 $a+b \in \mathbb{P}$이고 $ab \in \mathbb{P}$이다.
(ⅱ) 임의 $a \in \mathbb{R}$에 대해 다음의 세 경우

$$a \in \mathbb{P},\ a=0,\ -a \in \mathbb{P}$$

중 하나만 성립한다.

(3) 완비적 공리(completeness axiom)

$\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면 반드시 그 상한이 존재한다 (Bilodeau et al. 2010, Howland, 2010).

'유리수계(Rational number system)에서 $r^2=2$를 만족하는 유리수는 존재하지 않는다'를 증명하기 위해서는 유리수계의 대수적 특성을 이용(Bartle & Sherbert, Theorem 2.1.4, p.25)하면 충분하다. 그러나 $r^2=2$를 만족하는 양수의 존재성을 보이기 위해서는 일반적으로 실수계(Real number system)의 완비성 공리(completrness axiom 혹은 supremum property)를 이용한다(Bartle & Sherbert, Theorem 2.4.7, p.41).

실수계 $\mathbb{R}$은 곱셈 연산 $\cdot$에 관하여 닫혀 있으며 교환법칙과 결합법칙이 성립한다. 즉 임의 실수 a, b, $c\in\mathbb{R}$에 대해 $a\cdot b\in\mathbb{R}$이고 $a\cdot b=b\cdot a$, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$이 성립한다. $a=b=c$일 때 $(a\cdot a)\cdot a=a\cdot(a\cdot a)$를 a^3으로 나타내어 $a^3=(a^2)\cdot a=a\cdot(a^2)$임을 알 수 있다.

1. 지수의 학습과 지도의 근거

실수계(Real number system)의 근간인 체의 공리와 완비적 공리는 수학의 많은 부분에서 핵심적인 역할을 하는 것은 많은 수학적 결과를 통해 알려져 있다.

다음의 정리;

정리 1. a가 음이 아닌 실수이고 n이 자연수일 때 $b^n=a$를 만족하는 실수 $b\geq 0$가 존재한다.

는 완비적 공리를 바탕으로 증명이 된다(Johnsonbaugh & Pfeffenberger, 1981, p.21).

그러한 b를 $b=a^{\frac{1}{n}}$으로 나타낸다.

또한 다음의 정의;

정의 1. (Bartle & Sherbert, p.24, 정동명, 조승제, p.35)
a가 실수일 때

$$a^{n+1}=(a^n)\cdot a\ \ (n\in\mathbb{N})$$

는 실수계의 체의 공리를 바탕으로 이루어졌다.

2. 문젯점

현행 고등학교 수학1 교과서에서는,

첫째, 정의는 공리는 바탕으로 이루어져야 함에도 $a>0$일 때 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ $(n,\ m\in\mathbb{N})$을

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

으로 정의할 때, 사용된 공리가 분명하지 않다.

둘째, $\sqrt[n]{a^m}$은 방정식 $x^n=a^m$을 만족하는 $x=(a^m)^{\frac{1}{n}}$을 나타낸 것이다. 그러나 고등학교 수학1 교과서에서 $a^{\frac{m}{n}}$이 바르게 그리고 명확하게 정의되지도 않은 상태에서 $a^{\frac{m}{n}}$을 양의 실수로 간주하여 x를 a^m의 양의 n제곱근으로 지도하는 것[2)3)]은 바람직하지 않다.

셋째, m, n이 자연수일 때

(ⅰ) 등식 $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$이 성립하는 것을 이용하여 m이 음의 정수이고 n이 자연수일 때 $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$을 유도하는 것은 다음과 같이 별 다른 정의나 정리가 필요 없이 매우 쉽게 그리고 매끄럽게 진행이 된다;

$$\begin{aligned}a^{\frac{m}{n}}&=a^{-\frac{m^1}{n}}\ \ (m^1=-m)\\&=\frac{1}{a^{\frac{m^1}{n}}}\\&=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{m^1}}\\&=(\sqrt[n]{a})^{-m^1}\\&=(\sqrt[n]{a})^m\end{aligned}$$

---

2) 황석근 외, 2010에서는 “$a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근 $\sqrt[n]{a^m}$과 같아야 한다”고 부언하며

3) 정상권 외, 2010에서는 “$a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이 된다”고 설명하고 있다.

그러나,

(ii) 등식 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이 성립하는 것을 이용하여 m이 음의 정수이고 n이 자연수일 때 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$을 유도하는 것은 다음과 같이 상대적으로 복잡하고 매우 부자연스러우며 최소한 유리수 r, s에 대해 등식 $(a^r)^s=a^{rs}$이 성립함을 이용해야 한다.

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= a^{-\frac{m^1}{n}} \quad (m^1=-m) \\ &= \frac{1}{a^{\frac{m^1}{n}}} \\ &= \frac{1}{(a^{m^1})^{\frac{1}{n}}} \\ &= (a^{m^1})^{-\frac{1}{n}} \\ &= (a^{-m^1})^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{a^{-m^1}} \\ &= \sqrt[n]{a^m}. \end{aligned}$$

3. 바람직한 학습과 지도

자연수 지수나 정수 지수의 정의는 같은 수를 유한번 반복해서 곱한다는 거듭제곱의 개념에서 비롯된 것이다. 실제로, 대부분의 중학교 수학1 교과서(강신덕 외, 2009; 금종해 외, 2009; 김부윤 외, 2009; 김원경 외, 2009; 김홍종 외, 2009; 박규홍 외, 2009; 박영훈 외, 2009; 박윤범 외, 2009; 박종률 외, 2009; 송근화 외, 2009; 신항균 외, 2009; 유병훈 외, 2009; 유희찬 외, 2009; 윤성식 외, 2009; 윤재한 외, 2009; 이강섭 외, 2009; 이대현 외, 2009; 이영하 외, 2009; 장건수 외, 2009; 정광식 외, 2009; 정상권 외, 2009; 정창현 외, 2009; 최용준 외, 2009; 황선욱 외, 2009)에서는 거듭제곱의 개념을 다루면서 특정한 수 예를 들면, 2, 3, 4, 5 등을 사용해서 $2\times2=2^2$, $2\times2\times2=2^3$, $2\times2\times2\times2=2^4$, …으로 하여 일반적인 유한 번의 거듭제곱인 2^n (n은 자연수)를 암시하고 있다. 특별한 숫자 대신에 문자 a를 사용하여 a^n을 나타낸 교과서(정상권 외, 2009)도 있으며, $5\times5=5^2$, $5\times5\times5=5^3$, $5\times5\times5\times5=5^4$을 사용해서 임의 자연수 n에 대한 거듭제곱의 개념인 5^n을 암시하지 않은 교과서(박윤범 외, 2009)도 있다. 거듭제곱의 개념과 연계된 지수법칙의 개념을 담고 있는 중학교 수학2 교과서(강신덕 외, 2010; 김홍종

외, 2010; 박규홍 외, 2010; 박영훈 외, 2010; 박윤범 외, 2010; 송근화 외, 2010; 신항균 외, 2010; 우정호 외, 2010; 유희찬 외, 2010; 윤성식 외, 2010; 이강섭 외, 2010; 정상권 외, 2010; 정창현 외, 2010; 최용준 외, 2010)에서는 m, n이 자연수일 때

$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^m = a^m b^m \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} \ (b \neq 0) \end{cases}$$

을 다루고 있다. 이처럼 중학교1 교과서에서 다루는 거듭제곱의 개념이나 중학교2 교과서에서 다루고 있는 지수법칙은 좁게는 자연수 또는 정수의 범위에서 실수계의 체의 공리(field axiom) 중 곱셈에 관한 결합법칙(associate law under multiplication)을 사용한 것이다.

한편, 중학교 수학3 교과서(강신덕 외, 2011; 김원경 외, 2011; 김홍종 외, 2011; 박규홍 외, 2011; 박영훈 외, 2011; 박윤범 외, 2011; 신항균 외, 2011; 유희찬 외, 2011; 윤성식 외, 2011; 이강섭 외, 2011; 정상권 외, 2011; 최용준 외, 2011)에서는 제곱근의 개념을 소개하면서 방정식 $x^2 = a$를 만족하는 x를 a의 제곱근이라 하며 $a > 0$이면 $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$임을 다루고 있다.

또한, 유리수 지수는 거듭제곱의 개념으로부터 비롯된 것이고 거듭제곱근(n제곱근)의 개념은 방정식 $x^n = a$의 풀이에서 비롯된 것이다(도종훈, 박윤범, 2011, p.62). 최영기(2000)는 복소수계의 범위에서 방정식 $x^n = a$의 해를 올바르게 구할 수 있으므로 유리수 지수의 정의에 대한 논의를 하기 위해서는 먼저 복소수 지수의 정의에 대한 검토가 필수적이라고 지적하고 있다. 이에 따라, 도종훈, 박윤범(2011, p.63)은 고등학교 수학1 교과서에서는 $a^{\frac{1}{n}}$을 a의 n제곱근 중 (유일한)양의 실수인 것으로 정의하고 그 경우에 한해서는 등식 $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$, 즉 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$이 성립하므로 $a^{\frac{m}{n}}$을 이 등식의 양변에 제시된 두 양의 실수 중 어느 것으로 정의해도 무방하지만, 밑을 양의 실수 이상의 범위로 확장하고 $a^{\frac{1}{n}}$을 a의 양의 n제곱근이 아니라 n제곱근 n개의 집합으로 간주하게 되면 $a^{\frac{m}{n}}$의 정의는 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$이 아니라 $(a^{\frac{1}{n}})^m$이 될 수밖에 없음을 알 수 있다고 언급하고 있다.

실제로 수학적 내용을 다루는 범위가 자연수계이든, 정수계이든, 유리수계이든 실수계이든 또는 더 넓은 범위의 복소수계이든 관계없이 체의 공리(field axiom)의 곱셈에 관한 결합법칙은 한결같이 성립하며, 유지되어야 한다. 즉 유리수계에

서 인정할 수 있는 정의가 복소수계에서는 인정받을 수 없다는 것은 복소수게가 유리수계의 실질적인 수학적 내용의 확장이라는 것을 보장할 수 없다는 것을 의미하며 이는 커다란 수학적 결함을 잉태한다. 따라서 유리수계에서 $a^{\frac{m}{n}}$을 $\sqrt[n]{a^m}$으로 정의하는 것이 문제가 될 수 없다는 것은 명백한 오류이다. 실제로 $a^{\frac{m}{n}}$은 $a^{\frac{1}{n}}$의 m거듭제곱으로 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$으로 나타내는 것은 실수계(또는 좁게는 유리수계, 정수계, 자연수들이 집합)에서 체의 공리(field axiom) 중 곱셈에 관한 결합법칙을 바탕으로 한 것이다. 그리고 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이 성립하는 다음의 정리들과 같은 이론적 근거를 가지고 있다.

정리 2 (Wade, 2004, p.6).
$r,\ s\in\mathbb{Q}$일 때

$$(a^r)^s=a^{rs}=(a^s)^r$$

이 성립하므로

$$(\sqrt[n]{a})^m=(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

이 성립한다.

정의 2. (Bartle & Sherbert, 2000, p.154)
$m,\ n$이 자연수일 때

(ⅰ) $a\geq 0$이면 $x^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^m$으로 정의한다.

(ⅱ) $a>0$이면 $x^{-\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^{-m}$으로 정의한다.

정리 3. (Bartle & Sherbert, 2000, 정리 5.6.7)
m가 정수이고 n가 자연수일 때 $a>0$이면 $x^{\frac{m}{n}}=(x^m)^{\frac{1}{n}}$이 성립한다.

증명. $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$이므로 $y=a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$이라 하면

$$y^n=(a^{\frac{1}{n}})^m)^n=((a^{\frac{1}{n}})^n)^m=a^m$$

이다. 따라서 $y=(a^m)^{\frac{1}{n}}$이다.

초등학교 또는 그 이전의 학습현장에서 흔히 배우는 구구단의 $2\cdot 2=4$, $3\cdot 3=9$, $4\cdot 4=16$, $5\cdot 5=25$, $6\cdot 6=36$, $7\cdot 7=49$, $8\cdot 8=64$, $9\cdot 9=81$는 똑같은 수의 곱

도 하나의 수임을 암시하고, 똑같은 수의 곱이 그 수의 제곱을 의미하는 것은 체의 공리가 이용된 것을 암시한다. 따라서 실수계의 체의 공리를 바탕으로 $a^{\frac{m}{n}}$을 똑같은 수 $a^{\frac{1}{n}}$을 m개 곱한 것, 즉 $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{n}}$으로 인식하여 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$으로 정의하여 학습지도하는 것이 바람직하다.

Ⅲ. 자연수, 정수, 유리수, 실수에 관한 지수법칙의 관계성

다음의 정리 4, 정리 5, 정리 6, 정리 7를 증명하는 과정에서 일반적으로 실수계의 체의 공리가 이용되었고 정리 8를 증명하는 과정에서 실수계의 완비적 공리가 이용되었다.

정리 4. 임의 양수 a, b와 임의 자연수 n, $m \in \mathbb{N}$에 대해

(ⅰ) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(ⅱ) $(a^m)^n = a^{mn}$

(ⅲ) $(ab)^m = a^m b^m$

은 일반적으로 수학적 귀납법을 이용하여 증명된다(Bartle & Sherbert).

정리 5. 임의 정수 m, $n \in \mathbb{Z}$에 대해 정리 4의 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)이 성립한다.

정리 6. 임의 양의 유리수 $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ $(n,\ q \neq 0)$, $m,\ p,\ n,\ q \in \mathbb{N}$에 대해

(ⅰ) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(ⅱ) $(a^r)^s = a^{rs}$

(ⅲ) $(ab)^r = a^r b^r$ $(a,\ b > 0)$

이 성립한다.

정리 7. 임의 유리수에 대해 정리 6의 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)이 성립한다.

정리 8. 임의 실수 r, $s \in \mathbb{R}$에 대해 정리 6의 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)이 성립한다.

증명. 실수계의 완비적 공리에 의해, 임의 무리수에 수렴하는 증가하는 유리수열이 존재(Denlinger, 2011, Johnsonbaugh & Pfaffenberger, 1981)함을 이용한다.

일반적으로

정리 4 → 정리 5 → 정리 6 → 정리 7 → 정리 8

가 성립하고

정리 8 → 정리 7 → 정리 6 → 정리 5 → 정리 4

이 성립한다. 따라서, 실질적으로 정리 4, 정리 5, 정리 6, 정리 7, 정리 8는 모두 동치이다.

Ⅳ. 응용

다음의 정리 9에서 정의된 함수 f와 g의 합성함수 $g \circ f$는 함수 g와 f의 합성함수 $f \circ g$와 같다. 이 결과는 정리 10에서도 확장됨을 알 수 있다.

정리 9. 두 함수 $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$과 $g(x)=x^{\frac{q}{p}}$ $(n,\ p \neq 0)$, $m,\ n,\ p,\ q \in \mathbb{N}$에 대해 $f \circ g = g \circ f$가 성립한다.

증명. 실제로 임의 실수 x에 대해

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{q}{p}}) = f(x^{\frac{q}{p}})^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{q \cdot m}{p \cdot n}}$$

이고

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^{\frac{m}{n}}) = f(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{q}{p}} = x^{\frac{m \cdot q}{n \cdot p}}$$

이다. 따라서, 지수법칙에 의해 $f \circ g = g \circ f$이다.

정리 10. 두 함수 $f(x)=x^s$와 $g(x)=x^t$의 합성함수 $f \cdot g$와 $g \cdot f$는 서로 같다(s, $t \in \mathbb{R}$).

증명. 실제로 임의 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대해

$$(f \cdot g)(x) = f(x^t) = (x^t)^s = x^{t \cdot s}$$

이고

$$(g \cdot f)(x) = f(x^s) = (x^s)^t = x^{s \cdot t}$$

이다. 따라서 $f \cdot g = g \cdot f$이다.

두 함수 f와 g의 곱 fg는 g와 f의 곱 gf와 같음은 정리 8(ⅰ)의 지수법칙과 체의 공리의 덧셈에 관한 교환법칙에 의해 확인이 된다. 실제로 임의 실수 x에 대해

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^r \cdot x^s = x^{r+s} = x^{s+r} = x^s \cdot x^r = g(x) \cdot f(x) = (gf)(x)$$

이다.

Ⅴ. 결론

모든 수학적 특성은 관련된 공리와 정의를 바탕으로 이루어진다. 따라서 수학적 내용을 올바르게 학습·지도하기 위해서는 관련된 공리와 정의를 바르게 전달해야 한다. 물론 학생의 수준이 미치지 못해 공리와 정의를 지도하기가 힘든 경우에는 최소한 학습·지도를 진행하는 교사는 관련된 공리와 정의를 습득하고 이용할 수 있어야 한다. 또한 교과서의 구성에 있어서도 구체적으로 공리와 정의를 명시하지 못할지라도 최대한 관련된 공리와 정의가 전달될 수 있도록 쉬운 예로써 만들어져야 한다. 물론 교사용으로 마련된 교과서 익힘용은 말할 것도 없다. 그러나 현재 사용되고 있는 모든 고등학교 수학1 교과서(15종)에서는 지수법칙 중에서 $a^{\frac{m}{n}}$을 $a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$으로 정의하여 지도하도록 되어 있다. 이러한 정의는 그 근거가 애매모호하다. 실제로 $a^{\frac{m}{n}}$을 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$으로 정의하는 것은 실수계(Real number system)의 체의 공리(field axiom) 중에서 곱셈에 관한 결합법칙을 근거로 한다. 정의의 지도가 바르지 못하면 뒤이어 일어나는 학습적 모순은 많은 어려움을 가져올 것이다. 비록 조그마한 한 단편의 내용의 잘못일지는 몰라도 이 나라의 모든 고등학생들에게 미치는 결과는 매우 크다. 따라서 교과서의 집필은 매우 중요한 국가적 대사이므로 교과서의 저자들은 신중을 기해야 하며 심의하는 학자들도 최선을 다해야 할 것이다.

참고문헌

[1] 강신덕 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)교학사.
[2] 강신덕 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)교학사.
[3] 강신덕 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)교학사.
[4] 교육인적자원부(2007), 수학과 교육과정, 교육인적자원부 고시 제2007-79호 [별책 8].
[5] 금종해 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)에듀왕.
[6] 김부윤 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 교과서다음(주).
[7] 김수환 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 교학사.
[8] 김원경 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)비유와상징.
[9] 김원경 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)비상교육.
[10] 김해경 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 더텍스트.
[11] 김홍종 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 성지출판(주).

[12] 김홍종 외(2010), 중학교 수학2 교과서, 성지출판(주).
[13] 김홍종 외(2011), 중학교 수학3 교과서, 성지출판(주).
[14] 도종훈, 박윤범, 고등학교 수학교과서에 제시된 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$의 정의에 관한 소고, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제50권 제1호, 61-67 (2011.2).
[15] 박규홍 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)동화사.
[16] 박규홍 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)동화사.
[17] 박규홍 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)동화사.
[18] 박영훈 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)천재문화.
[19] 박영훈 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)천재문화.
[20] 박영훈 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)천재문화.
[21] 박윤범 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 웅진씽크빅.
[22] 박윤범 외(2010), 중학교 수학2 교과서, 웅진씽크빅.
[23] 박윤범 외(2011), 중학교 수학3 교과서, 웅진씽크빅.
[24] 박종률 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)도서출판디딤돌.
[25] 송근화 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)새롬교육.
[26] 송근화 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)새롬교육.
[27] 신항균 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)지학사.
[28] 신항균 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)지학사.
[29] 신항균 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)지학사.
[30] 양승갑 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 금성출판사.
[31] 우무하 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 박영사.
[32] 우정호 외(2010), 중학교 수학2 교과서, 두산동아(주).
[33] 우정호 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 두산동아(주)
[34] 유병훈 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 법문사.
[35] 유희찬 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 대한교과서(주).
[36] 유희찬 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)미래엔컬처그룹.
[37] 유희찬 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, (주)미래엔컬처그룹.
[38] 유희찬 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)미래엔컬처그룹.
[39] 윤성식 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)더텍스트.
[40] 윤성식 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)더텍스트.
[41] 윤성식 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)더텍스트.
[42] 윤재한 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)더텍스트.
[43] 윤재한 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, (주)더텍스트.

[44] 이강섭 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 도서출판지학사.
[45] 이강섭 외(2010), 중학교 수학2 교과서, 도서출판지학사.
[46] 이강섭 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 지학사.
[47] 이강섭 외(2011), 중학교 수학3 교과서, 도서출판지학사.
[48] 이대현 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 두레교육(주).
[49] 이동원 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 법문사.
[50] 이만근 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 고려출판.
[51] 이병수(2008), 기초 실해석학, 교우사.
[52] 이영하 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)교문사.
[53] 이준열 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, (주)천재교육.
[54] 장건수 외(2009), 중학교 수학1 교과서, 지구문화사.
[55] 정광식 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)대교.
[56] 정동명, 조승제(2004), 실해석학 개론, 경문사.
[57] 정상권 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)금성출판사.
[58] 정상권 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)금성출판사.
[59] 정상권 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, (주)금성출판사.
[60] 정상권 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)금성출판사.
[61] 정창현 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)대교.
[62] 정창현 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)대교.
[63] 최영기(2000), $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류해석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 39(2), 145-150.
[64] 최용준 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)천재문화.
[65] 최용준 외(2010), 중학교 수학2 교과서, (주)천재문화.
[66] 최용준 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 천재교육.
[67] 최용준 외(2011), 중학교 수학3 교과서, (주)천재문화.
[68] 황석근 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, 교학사.
[69] 황선욱 외(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)좋은책신사고.
[70] 황선욱 외(2010), 고등학교 수학1 교과서, (주)좋은책신사고.
[71] R. G. Bartle & D. R. Sherbert(2000). Introduction to Real Analysis, 3ed, John Wiley & Sons, Inc., New York.
[72] G. Bilodeau Gerald, R. Thie Paul and G. E. Keough(2010), An Introduction to Analysis, 2ed, Massachusetts, Jones and Bartlett Publishers.
[73] C. G. Denlinger(2011), Elements of Real Analysis, Jones and Bartlett Publishers, Boston.

[74] J. S. Howland(2010), Basic Real Analysis, Jones and Bartlett Publishers, LIC, Boston.
[75] R. Johnsonbaugh & W. E. Pfaffenberger(1981), Foundations of Mathematical Analysis, Marcel Dekker, Inc., New York.
[76] W. F. Trench(2003), Introduction to Real Analysis, Pearson Education.
[77] W. R. Wade(2004), An Introduction to Analysis, Pearson Education Inc., NJ.

Byung-Soo Lee
Department of Mathematics
Kyungsung University
Busan 608-736, Korea
E-mail address: bslee@ks.ac.kr