대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 22 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 22, No. 2, 163-178. May 2012

십진체계에 기초한 실수의 분류에 관한 연구

정 영 우*

수를 십진체계에 기초하여 표현하려는 노력은 초・중등학교의 관련 수학 지식들에 대한 개념망 구축과 지도의의에 대한 본질적 이해를 준다. 나아가 고유한 표현의 자연수, 정수, 유리수, 실수를 십진체계로 표현하려는 과정에서 확대된 십진체계인 소수를 분류할 수 있으며, 실수 분류를 위한 하나의 관점을 얻게 된다. 본 연구에서는 자연수의 십진체계 표현에서 출발하여 실수를 십진체계 형태로 표현하려는 과정에서 나타나는 수학적 지식들의 교수학적 의의를 고찰하고, 실수의 분류에 관한 이론적 근거를 제공한다. 이러한 연구는 초・중등학교의 교사가 학교수학을 비판적 안목에서 이해하게 하며, 관련지식에 대한 이론적 배경을 제공한다. 나아가 관련된 수학적 지식들의 내적 연결성과 일관성 있는 교육과정 구성의 단초를 제공한다.

I. 연구의 필요성 및 의의

초・중등학교 수학과 교육과정에서는 수로서 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수, 복소수를 다루는데, 이들은 고유의 수 표현을 위주로 정의된다. 예를 들어, 자연수는 Peano의 공리에 의한 정의가 학문적 정의이나 2007 개정 초등학교 교육과정해설(교육과학기술부, 2008b)에서는 '1, 2, 3, ⋯ 등과 같은 수'로 자연수를 정의하고 있다.[1] 수 표현을 통한 이러한 수의 정의는 정수나 유리수, 복소수도 마찬가지이다. 단지 중학교 3학년에서 다루는 무리수는 교과서에 따라 '유리수가 아닌 수' 또는 '순환하지 않는 무한소수'로 정의하고 있다. 그리고 실수는 유리수의 집합과 무리수의 집합의 합집합으로 정의한다.

더불어 초・중등학교의 지도내용을 살펴보면, 또 다른 수의 표현이 다루어지고 있음을 알 수 있다. 즉, 초등학교와 중학교에서 다루는 소수, 고등학교에서 다루는 수열과 수열의 극한, 급수, 연분수, 2009 개정 수학과 교육과정의 <고급수학>에서 새롭게 다루는 테일러급수(교육과학기술부, 2011) 등이 모두 수 표현들이다. 또한 45를

$$45 = 40 + 5 = 4 \times 10 + 5 \times 1$$

이나

$$45 = 5 \times 9 = 5 \times 3 \times 3$$

과 같이 분해(또는 전개)하여 나타내는 것도 또 다른 관점에서의 수 표현이다.

그렇다면 왜 고유의 수 표현 외에 이처럼 다양한 수 표현들이 다루어지고 있는 것일까? 그것은

* 부산대학교, nahime1130@hanmail.net

1) 초등학교에서는 자연수란 용어를 교과서에서는 사용하고 있지 않으며, 2007 개정 초등학교 수학과 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008b)에서만 사용하고 있다. 또한 중학교에서도 자연수에 대한 정의를 다루지는 않고 있다.

그러한 수 표현들이 서로 다른 목적성과 유용성을 가지고 있기 때문이다. 따라서 이러한 수 표현에 대한 이해와 수 표현들 사이의 관계성을 살펴보는 것은 학교수학에서 다루는 수 관련 내용들의 필요성과 목적성 그리고 의의를 이해하게 하며, 수 감각과 수적(數的) 안목을 높여준다.

그 중에서도 소수는 초·중등학교 수학 전반에서 다루는 다양한 수학적 지식들과 연계된 중요한 개념으로, 수와 소수와의 관계성을 이해하는 것은 중등학교 수의 지도에서 필수적이다. 그리고 소수의 위치적 기수법에 의한 표현인 십진체계의 확장은 그에 대한 본질적이고도 원리적인 이해를 준다.

그러나 이혜련(2006), 박임숙(2001), 나귀수(2001) 등은 교사나 학생들이 소수 표현 도입의 목적성이나 수의 분류, 수 개념에 대해 정확하게 이해하지 못하고 있다고 밝히고 있다. 그 이유는 현행 학교수학에서 소수와 관련한 용어들이 명확하게 정의되지 않고 있으며, 실수의 분류에서도 소수와의 관계성이 교과서마다 다르게 다루어지고 있기 때문이다. 따라서 이를 통합·조정하는 교수학적 논의가 요구된다.

수와 소수의 관계에 관한 교수학적 선행연구로는 다음과 같은 것들이 있다.

정원(2009)과 장혜원(2011)은 소수의 발생적 논제인 Stevin과 그의 저서에 관한 소개를 통해 소수의 의의와 지도에 관한 시사점을 논하고 있으며, 박수정(2007)은 유리수와 소수의 관계를 정확히 이해하는 것은 실수 개념의 이해와 수 체계 확장을 위해 필요함을 강조하고 있다. 또한 이강섭·엄규연(2007)과 김홍기(2004)도 학교수학에서 제시하는 유리수와 순환소수와의 관계에 문제가 있음을 지적하며, 0을 순환마디로 사용할 것과 유한소수를 '0이 순환하는 소수'로 정의할 것을 주장하였다. 그리고 홍우철(2006)은 수와 소수와의 관계에서 언급되는 주요 내용에 대해 학문적 관점에서 이론적 배경을 제시하였다.

이러한 연구들은 Stevin의 소수 구성의 의의나 유리수와 소수와의 관계 중 특히 유한소수에 논점을 맞추어 문제를 제기하고 그 해결방안을 모색할 뿐이며, 홍우철(2006)의 연구도 실수와 소수의 관계에 관한 중등수학내용을 학문적 입장에서 이론적으로 전개하고 있을 뿐, 자연수에서 실수로 이어지는 교수학적 조직화를 일관된 관점에서 발생적으로 맥락화한 연구는 거의 없다.

본 연구에서는 수와 소수 표현과의 관련성을 십진체계에 초점을 맞추어 교수학적으로 고찰한다. 그러기 위해 위치적 기수법 - 특히, 십진체계 - 에 의한 자연수의 표현을 바탕으로 나머지 다른 수들을 십진체계와 같은 방법으로 표현하려는 과정에서 부딪치는 문제와 그 극복과정을 교수학적으로 조직함으로써, 실수를 분류하는 하나의 관점을 제시하고, 관련 수학적 지식들의 의의에 관하여 고찰한다.

II. 문제제기 및 이론적 전개

1. 문제제기

2009년 5월 1일 부산대학교 사범대학 수학교육과 게시판에 다음과 같은 질문이 올라왔다.[2)]

> 1/30, 2/30, 3/30, ⋯, 100/30 중에서 유한소수가 되는 분수의 개수는 모두 몇 개인가?
> 답은 33이라고 하다가 갑자기 답이 30으로 정정되어서 논란에 쌓여있는 중간고사 문제입니다. 해결을 부탁드립니다.

2) http://mathedu.pusan.ac.kr/

이 문제의 핵심은 '정수는 유한소수인가?'이다. 예비교사들과 교사들에게 이에 대한 답을 생각해 보게 하였더니 <그렇다>와 <그렇지 않다>의 두 가지 의견으로 갈렸다. 과연 정수는 유한소수인가?

논의의 근거를 2007 개정 수학과 교육과정 해설과 교과서에서 찾아보자. 위의 문제와 관련된 내용은 중학교 2학년 <수와 연산> 영역의 유리수의 소수 표현에 대한 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008a)에서 찾아볼 수 있다.

> 1 유리수와 순환소수
>
> ① 순환소수의 의미를 이해한다.
>
> ◦ 유한소수, 무한소수, 순환소수의 의미를 이해하게 한다.
>
> 주어진 분수에서 분자를 분모로 나누어보면 계산 결과가 정수이거나 소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 *경우*와 그렇지 않은 *경우*가 있다. 간단한 예를 통해 이러한 *경우*를 확인하고 각각을 유한소수와 무한소수라 함을 이해하게 한다.
>
> ② 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.
>
> ◦ 유한소수, 무한소수, 순환소수의 뜻을 이해하게 하고, 유리수는 정수나 유한소수 또는 무한소수로 나타낼 수 있으며, 이때 무한소수는 모두 순환소수임을 알게 한다.
>
> 주어진 분수의 분자를 분모로 나누어보면 정수이거나 소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 경우와 그렇지 않은 경우가 있다. 실제 계산을 통하여 이러한 경우를 확인하고 유한소수와 무한소수의 뜻을 이해하게 하고, 정수는 유한소수임을 알게 한다.

①, ②의 내용을 살펴보면, ②에서 유리수는 분자를 분모로 나누어 소수로 나타내는 조작을 하면, 그 결과 정수, 유한소수, 무한소수로 나타낼 수 있으며, 정수는 유한소수라고 명시하여 포함관계가 있음을 설명하고 있다. 그러나 ①의 내용은 '경우'라는 용어에 초점을 두느냐 아니냐에 따라 '정수/소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 경우/그렇지 않은 경우'의 세 가지로 또는 '정수이거나 소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 경우/그렇지 않은 경우'의 두 가지로 해석할 수 있다. 이것은 뒤에서 언급되는 '이러한 경우를 확인하고 각각을 유한소수와 무한소수라 함을 이해하게 한다.'에서 경우가 지칭하는 범위가 불명확하여 더욱 혼란을 주고 있다. 만일 후자라면, 유한소수의 정의는 '정수이거나 소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 소수'가 된다. 하지만 전자나 ②의 분류에 따르면, 유한소수의 정의는 '소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 소수'이다. 즉, 수학과 교육과정에서 유한소수의 정의는 명확하게 주어져 있지 않으며, 더욱이 '정수는 유한소수이다.'라는 것으로 포함관계를 논하고 있지만, 유한소수의 정의와 관련하여 관계를 설명하고 있지 않다. 이것이 앞의 문제가 논의의 대상이 되는 이유이다.

2007 개정 수학과 교육과정을 구체화한 총 12종의 교과서에서 유한소수는 크게 다음과 같이 두 가지 유형으로 정의되고 있다.

> (유형 1) 나눈 결과가 정수 또는 소수이며, 소수 가운데 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한개인 것을 유한소수, 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 무한히 많은 소수를 무한소수라 한다.

이러한 진술은 정상권 외(2010), 이준열 외(2010), 신항균 외(2010), 이강섭 외(2010), 정창현

외(2010), 유희찬 외(2010), 박규홍 외(2010)의 7종에서 찾아볼 수 있다.

> (유형 2) 모든 유리수는 나눗셈으로 계산하면 소수로 나타낼 수 있다. 모든 유리수는 유한소수 또는 무한소수로 나타낼 수 있다.

이러한 진술은 박종률 외(2010), 김홍종 외(2010), 최용준 외(2010), 송근화 외(2010), 윤성식 외(2010)의 5종에서 찾아볼 수 있다.

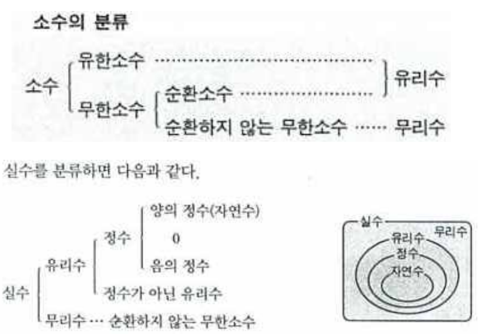
(유형 1)의 경우는 유리수를 '정수'와 '소수'로 분류하고, 소수를 다시 유한소수와 (순환하는) 무한소수로 분류하고 있다. 이것은 교육과정 해설의 ②의 분류를 따르고 있지만, 교육과정 해설보다 명확하게 분류하고 있음을 알 수 있다. 반면 (유형 2)는 유리수를 '유한소수'와 '무한소수'로 분류하고 있으며, 정수인 경우를 예로 다루고 있지 않아 정수를 유한소수에 포함시키고 있는지 아닌지 정확히 알 수 없다. 그러나 유리수에 정수가 포함된다는 선행학습에 비추어 포함하는 개념으로 다루고 있음을 추측할 수 있다. 한편, 정수와 (유한) 소수와의 관계에 대해서는 정상권 외(2010) 만이 직접적으로 언급하고 있다. 즉, 12종의 교과서에서 7종만이 '정수가 아닌 유리수'의 '소수 표현'이라는 관점에서 소수를 논하고 있으며, 정수와 유한소수의 관계를 직접적으로 언급한 것은 1종에 불과했다. 그러나 그마저도 결과만 서술하고 있을 뿐 그 근거를 다루고 있지는 않다.

이러한 수와 소수와의 관련성은 중학교 3학년 <수와 연산> 영역에서 다시 한 번 다루어진다. 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008a)의 내용은 다음과 같다.

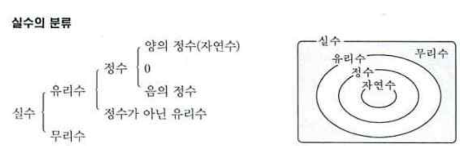
> $\boxed{1}$ 제곱근과 실수
> ② 무리수의 개념을 이해한다.
> ◦ 무리수의 존재를 알고 이를 바탕으로 실수를 이해하게 한다.
> (중략) 실수 전체의 집합이 유리수 전체의 집합과 무리수 전체의 집합의 합집합이고, 이들 두 집합에는 공통된 원소가 없음을 이해하게 한다. 유리수는 유한소수와 순환소수로 표현될 수 있음을 바탕으로, 무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알게 한다.

여기에서도 유리수가 유한소수와 순환소수로 나타내어짐을 언급하고 있어 정수를 유한소수로 보고 있음을 추론할 수 있다.

이 내용을 중학교 3학년 교과서에서는 실수의 분류로 도식화하여 정리·제시하고 있다. 그런데 실수의 분류는 교과서마다 다양하게 제시되고 있어 교육과정과 같은 혼란을 보여주고 있다.



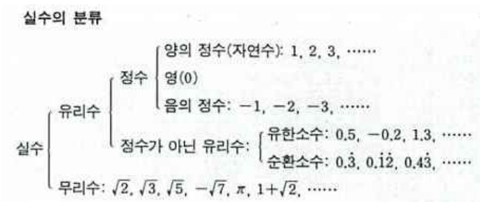
이준열 외(2010)



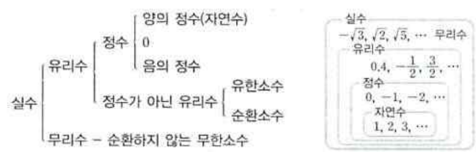
박영훈 외(2010)

(유형 1) 실수의 분류와 소수의 분류를 각각 제시한 경우

(유형 1)은 소수의 분류와 실수의 분류를 각각 제시하고 있으며, 소수와 실수의 관계를 직접적으로 언급하고 있지 않다. 따라서 유한소수를 정수를 포함하는 개념으로 보고 있는지 어떤지 분명하지 않다.[3] 이러한 유형은 이준열 외(2010), 박영훈 외(2010), 최용준 외(2010), 우정호 외(2010)의 4종에서 보여진다. 이들 중 이준열 외(2010)는 실수의 분류에서 무리수만을 소수 표현으로 정의하고 있으며, 나머지는 수 집합으로 분류하고 있다.



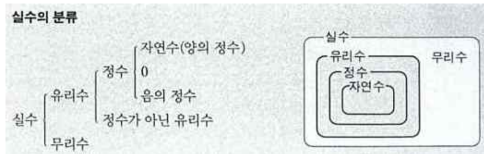
이강섭 외(2010)



유희찬 외(2010)

(유형 2) 실수와 소수의 분류를 함께 제시한 경우

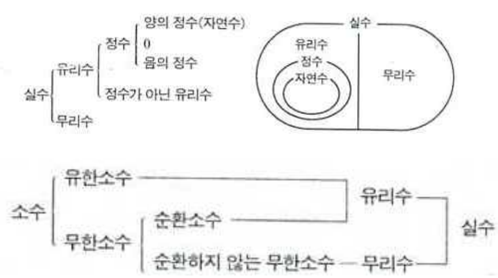
(유형 2)는 소수의 분류와 실수의 분류를 함께 다루고 있는 경우로, 이강섭 외(2010)와 유희찬 외(2010)의 두 종이 해당한다. 이들은 소수를 정수와 분리된 개념으로 제시하고 있으며, 소수 표현에 있어 이강섭 외(2010)는 정수가 아닌 유리수의 경우로, 유희찬 외(2010)는 정수가 아닌 유리수와 무리수의 경우로 제시하고 있다. 따라서 (유형 2)의 경우, 정수는 유한소수가 아니다.



김홍종 외(2010)

(유형 3) 실수의 분류만 제시한 경우

(유형 3)은 소수의 분류를 다루고 있지 않으며, 단지 실수의 분류만을 제시한 경우이다. 이러한 유형은 윤성식 외(2010), 김원경 외(2010), 박규홍 외(2010), 정상권 외(2010)의 5종이다.



박윤범 외(2010)

(유형 4) 소수와 실수의 관계를 제시한 경우

(유형 4)는 소수의 분류에서 실수와의 관계를 명백히 주고 있다. 이것은 유한소수가 정수를 포함하는 개념임을 함의하고 있다. 이러한 유형은 박윤범 외(2010)에서만 보여 진다.

이처럼 중학교 2학년의 유리수의 소수 표현이나 중학교 3학년의 실수의 분류에서 '정수는 유한소수인가?'에 대해 다루고 있지 않거나 다루더라도 그 근거나 관계를 명확히 밝히지 않고 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은 유한소수에 대한 명확한 정의나 인식이 학교수학에 부족하

3) 소수의 분류에서는 유리수의 범위가 불명확하며, 실수의 분류에서는 소수의 범위가 불명확하다.

기 때문이다. 따라서 유한소수의 명확한 정의와 이에 따른 분류관점을 정립할 필요가 있다.

그렇다면 이러한 혼란을 감수하면서 왜 소수를 지도해야만 하는가? 그 이유는 소수 표현이 '유리수의 집합과 무리수의 집합의 합집합이 실수의 집합이라는 것', 그리고 '유리수의 집합과 무리수의 집합이 서로 소라는 것'을 논의할 수 있는 근거이기 때문이다. 즉, 유리수와 무리수 고유의 표현은 비교 대상이 될 수 없으며, 더군다나 서로 소라는 것을 보장할 수 없지만 소수 표현에서는 이것을 보일 수 있기 때문이다. 따라서 이러한 의의가 강조되기 위해서는 실수와 소수의 관계가 반드시 다루어져야 한다. 이것은 Stevin이 소수를 구성할 때의 목적인 이산적인 수로 연속적인 양을 구명하고, 표현적 통합을 이룩하려고 한 내용(장혜원, 2011)이기도 하다. 현행 수학과 교육과정에서는 실수의 집합과 유리수의 집합, 무리수의 집합 사이의 관계를 이용하여 무리수를 정의하고 소수 표현을 다루고 있는데, 이는 결과적인 내용 다음에 발생적인 내용을 지도하는 형태로 잘못된 것이다. 따라서 실수의 분류와 소수의 분류는 반드시 지도되어야 하며, 이때 그 관련성이 같이 드러나야 한다.

수는 다양한 관점에서 전개가 가능하며, 교수학적·인식론적 수준을 고려하여 맥락 의존적으로 정의를 다룰 수는 있지만, 교육과정에서는 하나의 관점 속에 통일된 하나의 분류를 설정할 필요가 있다.

따라서 본 연구에서는 실수 분류의 하나의 이론적 근거로 십진체계에 기초한 수의 분류를 제시하고자 한다.

이러한 연구는 교육과정 전반에 걸쳐 산재해 있는 수와 관련된 수학적 개념들의 연결성을 자연스럽게 인식시킬 수 있어 인간 활동의 산물로서의 수학, 목적성 있는 활동으로서의 수학, 계통성 등에 대한 직접적인 경험도 줄 수 있다. 그리고 교사의 전문성 신장과 가르칠 지식에 대한 이론적 배경을 준다.

2. 이론적 전개

'정수는 유한소수인가?'를 판단하기 위한, 나아가 실수와 소수와의 관계를 규명하기 위한, 그래서 실수를 분류하기 위한 하나의 이론적 근거는 '수를 십진체계로 나타내려는 과정'에서 찾을 수 있다.

십진체계는 위치적 기수법의 밑수가 10인 경우이다. 위치적 기수법의 정의는 다음과 같다.

정의 1 밑수 b가 선택된 후에 기본기호들이 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ b-1$ 에 대해 채택된다. 그래서 b개의 기본기호가 생기는데, 이를 흔히 이 체계의 숫자(digit)라고 부른다. 그러면 임의의 수 N은 다음과 같은 형식으로 유일하게 표현된다 :

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$$

여기서 $0 \le a_i < b,\quad i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$ 이다. 그런 다음에 밑수를 b로 하는 수 N을 다음과 같이 기본 기호의 수열로 표현한다 :

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$

따라서 임의의 주어진 숫자에서의 기본기호는 밑수의 어떤 멱의 배수로 표현되는데, 이때 멱은 기본기호가 나타내는 위치에 따라 달라진다(Eves, 1995).[4)]

여기서 밑수가 10인 경우를 십진체계라 한다. 따라서 십진체계에 의해 모든 자연수는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$

4) 명확성을 기하기 위해서는 밑수의 멱이 없는 경우를 표현하는데 0에 대한 어떤 기호가 필요하다(Eves, 1995).

를 기본기호로 하여 위치 수 체계의 표현으로 나타낼 수 있다.

① 자연수를 십진체계로 나타내기

$\alpha \in \mathbb{N}$일 때,

$$\alpha = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_n \times 10^0$$

(단, $0 \le a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \le 9,\ a_0 \ne 0$)

이제 정수부터 실수까지를 십진체계 형태로 나타내도록 하자.

② 정수를 십진체계로 나타내기

이 경우 십진체계로 나타냄에 있어 부호 즉, 양과 음의 표현이 문제가 된다. 이 문제는 a_i를 정수로 확장함으로써 쉽게 해결할 수 있다. 따라서 정수는 다음과 같이 조건을 조정하면 십진체계의 형태로 나타낼 수 있다 :

$\alpha \in \mathbb{Z}$일 때,

$$\alpha = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_n \times 10^0$$

(단, $-9 \le a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \le 9,\ a_0 \ne 0$)

③ 유리수를 십진체계로 나타내기

이 경우 0과 1 사이의 유리수에 대해 생각하는 것으로 충분하다. 나머지는 정수만큼을 고려하면 된다. 예를 들어, 0과 1의 중점인 $\frac{1}{2}$을 생각해 보자. $\frac{1}{2}$의 존재성과 $\frac{1}{2}$이 정수가 아님은 쉽게 보일 수 있다.

지금까지의 정보를 가지고는 0과 1은 십진체계로 나타낼 수 있으나, $\frac{1}{2}$은 십진체계로 나타낼 수 없다. 따라서 이것을 십진체계의 형태로 나타내기 위해서는 추가적인 조건 - 밑수의 멱(거듭제곱, 지수)을 음수의 경우로 확장하는 것 - 이 필요하다. 그러면 $\frac{1}{2}$과 같은 유리수는 다음과 같이 나타낼 수 있다 :

$\alpha \in \mathbb{Q}$일 때,

$$\alpha = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_n \times 10^0 + b_1 \times 10^{-1} + b_2 \times 10^{-2} + \cdots + b_m \times 10^{-m}$$

(단, $-9 \le a_1, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m \le 9,\ a_0 \ne 0$)

이것을 '확대된 십진체계'라 한다. 이것의 위치적 기수법에 의한 표현이 바로 (유한)소수이다. 즉,

$$a_0 a_1 \cdots a_n . b_1 b_2 \cdots b_m$$

그렇다면 $\frac{1}{2}$은 확대된 십진체계로 어떻게 나타낼 수 있을까? $\frac{1}{2}$은 0과 1의 중점이라는 것과 등식의 성질을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다 :

$$(0+1) \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 5 \times 10^{-1}$$

즉, $\frac{1}{2} = 5 \times 10^{-1}$으로 표현할 수 있으며, 소수 표현으로는 $\frac{1}{2} = 0.5$이다. 이로써 $\frac{1}{2}$은 확대된 십진체계로 나타낼 수 있다. 이제 $0, \frac{1}{2}, 1$을 확대된 십진체계로 나타낼 수 있다. 이때 $\frac{1}{2}$은 십진체계로 나타낼 수 있는 0과 1의 중점이다. 그렇다면 십진체계로 나타낼 수 있는 수들의 중점은 다시 십진체계로 나타낼 수 있다는 추측을 할 수 있다. 몇 번 더 이 과정을 반복해 보자 :

0과 $\frac{1}{2}$의 중점 $\frac{1}{4}$은

$$(0+\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10}$$

$$=\frac{25}{10^2}=25\cdot10^{-2}$$

$$=(2\cdot10+5\cdot10^0)\cdot10^{-2}$$

$$=2\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}$$

이다. 또한 $\frac{1}{2}$과 1의 중점 $\frac{3}{4}$은

$$(\frac{1}{2}+1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{10}\cdot\frac{5}{10}=75\cdot10^{-2}$$

$$=(7\cdot10+5\cdot10^0)\cdot10^{-2}$$

$$=7\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}$$

이다. 이러한 귀납적 추측에 의해 다음과 같은 사실을 발견하게 된다.

정리 1 확대된 십진체계로 나타나는 수들의 중점은 분모가 2와 5만의 거듭제곱으로 나타나며, 그 중점도 확대된 십진체계로 나타낼 수 있다.

증명 이 경우 0과 1 사이의 확대된 십진체계로 나타낼 수 있는 수에 대해 생각하는 것으로 충분하다. 나머지는 정수만큼을 고려하면 된다. α와 β를 그러한 수라 하자. 그러면

$$\alpha=a_1\times10^{-1}+a_2\times10^{-2}+\cdots+a_n\times10^{-n}$$

$$\beta=b_1\times10^{-1}+b_2\times10^{-2}+\cdots+b_m\times10^{-m}$$

$$(-9\le a_1,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_m\le9,\ a_n,b_m\ne0)$$

으로 둘 수 있다. 이것은

$$\alpha=\frac{a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_n\times10^0}{10^n}$$

$$\beta=\frac{b_1\times10^{m-1}+b_2\times10^{m-2}+\cdots+b_m\times10^0}{10^m}$$

으로 재표현할 수 있다. 이때 일반성을 잃지 않고 $n\ge m$이라 하면 정수의 계산 원리에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{a_1\times10^{n-1+m}+\cdots+a_n\times10^m}{10^{n+m}}+\frac{b_1\times10^{m-1+n}+\cdots+b_m\times10^n}{10^{m+n}}$$

$$=\frac{1}{10^{n+m}}\{(a_1+b_1)\times10^{m+n-1}+\cdots+(a_m+b_m)\times10^n+a_{m+1}\times10^{n-1}+\cdots+a_n\times10^m\}$$

$$=(a_1+b_1)\times10^{-1}+\cdots+(a_m+b_m)\times10^{-m}+a_{m+1}\times10^{-m-1}+\cdots+a_n\times10^{-n}$$

이다. 따라서

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\{(a_1+b_1)\times10^{-1}+\cdots+(a_m+b_m)\times10^{-m}+a_{m+1}\times10^{-m-1}+\cdots+a_n\times10^{-n}\}$$

$$\frac{(\alpha+\beta)\times5}{2\times5}=\frac{1}{2\times5}\{5(a_1+b_1)\times10^{-1}+\cdots+5(a_m+b_m)\times10^{-m}+5a_{m+1}\times10^{-m-1}+\cdots+5a_n\times10^{-n}\}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=5(a_1+b_1)\times10^{-2}+\cdots+5(a_m+b_m)\times10^{-m-1}+5a_{m+1}\times10^{-m-2}+\cdots+5\times a_n\times10^{-n-1}$$

이다. 이때, a_i+b_i나 5를 곱한 값이 10 이상이면 위치적 기수법에 의해 자릿수와 계수를 조정하

게 된다. 따라서 확대된 십진체계로 나타나는 수들의 중점은 확대된 십진체계로 나타낼 수 있으며, 분모가 2와 5만의 거듭제곱으로 나타난다.

이렇게 확대된 십진체계로 나타내어지는 수를 위치적 기수법으로 표현한 것이 '유한소수'이다. 그렇다면 모든 유리수는 확대된 십진체계 - 즉, 유한소수 - 로 나타낼 수 있을까? 그 답은 <아니다>이다. 반례로 $\frac{1}{3}$을 생각해 보자. $\frac{1}{3}$은 존재하며 정수가 아니다. 그렇다면 $\frac{1}{3}$을 확대된 십진체계로 나타낼 수 있을까?

문제 $\frac{1}{3}$은 확대된 십진체계로 나타낼 수 없다는 것을 증명하여라.

풀이 $\frac{1}{3}$을 확대된 십진체계로 나타낼 수 있다고 가정하자. 그러면 적당한 n에 대하여 b를 정수라 하면, 다음과 같이 표현할 수 있다 :

$$\frac{1}{3} = b \times 10^{-n} \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$3b = 10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$$

$$b = \frac{2^n \times 5^n}{3}$$

b가 정수이므로 $3|2^n$ 또는 $3|5^n$이다. 이것은 모순이다.

이때, 십진체계나 확대된 십진체계는 유한개의 항으로 이루어진다는 것에 유의해야 한다. 따라서 위의 문제는 다음과 같이 일반화된다.

정리 2 일반적으로 p가 소수이고, $p \neq 2$이고 $p \neq 5$일 때, $\frac{1}{p}$은 확대된 십진체계로 절대 나타낼 수 없다. 더욱이 $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ 이 소수로써 각 p_i가 2나 5가 아닐 경우

$$\frac{1}{p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n}$$

은 확대된 십진체계로 나타낼 수 없다. 따라서 모든 유리수를 확대된 십진체계로 나타낼 수는 없다.

증명 p가 소수이고, $p \neq 2$이고 $p \neq 5$일 때, $\frac{1}{p}$이 확대된 십진체계로 나타낼 수 있다고 하자. 그러면

$$\frac{1}{p} = a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \ \cdots \ + a_n \times 10^{-n}$$

이다.

$$\frac{1}{p} \times 10^n = (a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \cdots + a_n \times 10^{-n}) \times 10^n$$

$$= a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \ \cdots \ + a_n \times 10^0$$

따라서 10^n은 p로 나누어 떨어져야 한다. 그런데 $10^n = (2 \times 5)^n$에서 2, 5 이외의 소인수를 가지지 않는다. 그러나 p는 2나 5 이외의 소인수를 가져야 한다. 이것은 조건에 모순이다. 유사하게

$$\frac{1}{p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n}$$

은 확대된 십진체계로 나타낼 수 없다는 것을 보일 수 있다.

정리 1은 중학교 2007 개정 수학과 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008a)에서 유한소수의 판정법으로 변환되어 제시되고 있다.

◦ 주어진 분수를 유한소수로 나타낼 수 있는지를 판별하게 한다.

분수를 기약분수로 고쳐서 분모의 소인수가 2나 5뿐이면 유한소수로 나타낼 수 있고 그렇지 않으면 유한소수로 나타낼 수 없음을 이해하여, 주어진 분수를 유한소수로 나타낼 수 있는지의 여부를 판단하게 한다.

이와 같이 유리수를 십진체계로 나타내려는 과정에서 확대된 십진체계를 정의하게 되고, 구체적인 예를 다루는 과정에서 정리 1을 발견하게 되지만, 학교수학에서는 이를 결과적인 측면에서 판정법으로 제시하고 있다.

이제 $\frac{1}{3}$과 같이 확대된 십진체계로 나타낼 수 없는 수가 존재한다는 것을 알았지만, 이러한 문제 상황을 극복하기 위해 확대된 십진체계를 이용하여 $\frac{1}{3}$의 값을 추측해 가는 과정을 생각해 보자. 우선 구간 $[0,\ 1]$을 10등분한 경우의 값을 추측하자.

$$\frac{k-1}{10} < \frac{1}{3} < \frac{k}{10} \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

이므로

$$3(k-1) < 10 < 3k$$

$$3k-3 < 10,\ 10 < 3k$$

$$3k < 13,\ 10 < 3k$$

$$\frac{10}{3} < k < \frac{13}{3}$$

이고, 따라서 $k=4$이다. 즉,

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{10}$$

또는

$$0.3 < \frac{1}{3} < 0.4$$

이다. 더 정밀한 값을 위하여 구간 $[\frac{3}{10},\ \frac{4}{10}]$을 다시 10등분하자. 그러면 $\frac{1}{3}$은 다음과 같이 추측할 수 있다 :

$$\frac{3}{10}+\frac{k-1}{100} < \frac{1}{3} < \frac{3}{10}+\frac{k}{100} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\ ,\ 10)$$

$$\frac{30+k-1}{100} < \frac{1}{3} < \frac{30+k}{100}$$

$$\frac{29+k}{100} < \frac{1}{3} < \frac{30+k}{100}$$

$$87+3k < 100 < 90+3k$$

$$3k < 13 \text{ or } 10 < 3k$$

$$\frac{10}{3} < k < \frac{13}{3}$$

이고, 따라서 $k=4$를 얻는다. 즉,

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100} < \frac{1}{3} < \frac{3}{10}+\frac{4}{100}$$

이다. 다시 구간 $[\frac{3}{10}+\frac{3}{100},\ \frac{3}{10}+\frac{4}{100}]$을 10등분하자. 그러면 $\frac{1}{3}$은 다음과 같이 추측할 수 있다 :

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{k-1}{1000} < \frac{1}{3} < \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{k}{1000}$$
$$(k=1,\ 2,\ \cdots\ ,\ 10)$$

$$\frac{300+30+k-1}{1000} < \frac{1}{3} < \frac{300+30+k}{1000}$$

$$900+90+3k-3 < 1000 < 900+90+3k$$

$$987+3k < 1000 < 990+3k$$

$$3k < 13 \text{ or } 10 < 3k$$

$$\frac{10}{3} < k < \frac{13}{3}$$

이고, 따라서 $k=4$를 얻는다. 즉,

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000} < \frac{1}{3} < \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}$$

이다. 이러한 과정을 반복하면

$$\frac{1}{3} = 3\times10^{-1}+3\times10^{-2}+3\times10^{-3}+\cdots$$

이고, 이것은 위치적 기수법에 의해 $0.333\cdots$이다. 그러나 유리수의 경우에는 분자를 분모로 나눔으로써 쉽게 이 값을 찾을 수 있다.

그렇다면 무리수는 확대된 십진체계로 나타낼 수 있을까? 즉, 유한소수로 나타낼 수 있을까? 답은 <아니다>이다. 그렇다면 어떻게 그 값을 추측할 수 있을까? 무리수는 확대된 십진체계인 유한소수를 이용하여 다음과 같이 추측할 수 있다.

④ 무리수를 십진체계로 나타내기

예를 들어, $\sqrt{2}$를 생각해 보자. $\sqrt{2}$의 존재성과 무리수성은 쉽게 보일 수 있다[5]. 그런데 이 수는 유리수의 경우처럼 직접 나누어볼 수 없다. 그러므로 다음과 같이 유한소수와 중점을 이용하여 그 값을 추측하자 :

$1^2=1,\ 2^2=4$이므로	$1<\alpha<2$
$(1.5)^2=2.25$이므로	$1<\alpha<1.5$
$(1.25)^2=1.5625$이므로	$1.25<\alpha<1.5$
$(1.375)^2=1.890625$이므로	$1.375<\alpha<1.5$
$(1.4375)^2=2.06640625$이므로	$1.375<\alpha<1.4375$
$(1.40625)^2=1.977539063$이므로	$1.40625<\alpha<1.4375$
$(1.421875)^2=2.021728516$이므로	$1.40625<\alpha<1.421875$
$(1.4140625)^2=1.999572754$이므로	$1.4140625<\alpha<1.421875$
$(1.41796875)^2=2.010635376$이므로	$1.4140625<\alpha<1.41796875$
$(1.41601565)^2=2.00510025$이므로	$1.4140625<\alpha<1.41601565$
$(1.415039075)^2=2.002335584$이므로	$1.4140625<\alpha<1.4150391$
$(1.4145508)^2=2.000953966$이므로	$1.4140625<\alpha<1.4145508$
$(1.41430665)^2=2.0002633$이므로	$1.4140625<\alpha<1.4143067$
$(1.4141846)^2=1.999918083$이므로	$1.4141846<\alpha<1.4143067$
$(1.414245650)^2=2.000090759$이므로	$1.4141846<\alpha<1.41424565$
$(1.414215125)^2=2.00000442$이므로	$1.4141846<\alpha<1.41421525$
$(1.414199925)^2=1.999961428$이므로	$1.414199925<\alpha<1.41421525$
$(1.414207588)^2=1.999983101$이므로	$1.414207588<\alpha<1.41421525$
$(1.414211419)^2=1.999993938$이므로	$1.414211419<\alpha<1.4142152$
$(1.414213310)^2=1.999999285$이므로	$1.41421331<\alpha<1.4142152$
$(1.414214265)^2=2.000001969$이므로	$1.41421331<\alpha<1.414214265$
$(1.414213783)^2=2.000000623$이므로	$1.41421331<\alpha<1.414213783$

$$\vdots$$

$$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$$

따라서 $\sqrt{2}$는

$$\sqrt{2}=1\times10^{0}+4\times10^{-1}+1\times10^{-2}+\cdots$$

임을 알 수 있다. 그리고 이 결과는 $\frac{1}{3}$과 같은 유형이며, 이를 '무한소수'라 부른다.

따라서 십진체계로 수들을 나타내려는 노력에서 수는 자연수, 정수, 유한소수, 무한소수로 분류할 수 있다. 그리고 자연수와 정수는 밑수의 변화가 아닌 부호의 문제이므로 크게 정수, 유한소수, 무한소수로 분류할 수 있다. 나아가 확대된 십진체계

$$\alpha = a_0\times10^{n}+a_1\times10^{n-1}+\cdots+a_n\times10^{0}$$
$$+b_1\times10^{-1}+b_2\times10^{-2}+\cdots+b_m\times10^{-m}$$

5) 정영우(2008) 참고.

$$(단,\ -9 \le a_1, \cdots, a_n,\ b_1, b_2, \cdots, b_m \le 9,\ a_0 \ne 0)$$

에서 계수 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 를 0으로 두면

$$\alpha = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_n \times 10^0$$

$$(단,\ -9 \le a_1, a_2, \cdots, a_n \le 9,\ a_0 \ne 0)$$

가 되어 유한소수가 정수를 포함하게 된다. 따라서 정수는 유한소수이며, 유한소수 판정법은 정수가 아니고 기약인 유리수에 한정된 내용이다. 그러므로 소수 표현의 관점에서 실수의 분류는 자연수, 정수, 유한소수, 무한소수이며, 유한소수는 정수를 포함한다.

그런데 유리수나 무리수의 고유한 표현은 계산이 가능한 대상이지만, 무한소수는 가능적 무한으로 계산 불가능한 대상이다. 그럼에도 이 둘이 같다는 것을 수학적으로 어떻게 구명할 것인가?

우선 수열과 수열의 극한개념을 이용하여 이 둘의 관계를 구명할 수 있다. 즉, '유리수열의 극한'에 의한 실수의 정의이다.[6] 앞의 예인 $\frac{1}{3}$과 $\sqrt{2}$는 확대된 십진체계의 수들의 극한으로 다음과 같이 정의한다 :

$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ 은

$$a_1 = 0.3,\ a_2 = 0.33,\ a_3 = 0.333,\ \cdots$$

이고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ 로 정의한다. $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$는

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1.4,\ b_3 = 1.41,$$
$$b_4 = 1.414,\ b_5 = 1.4142,\ \cdots$$

이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$ 로 정의한다. 따라서 실수는 다음과 같이 정의한다 :

정의 2 임의의 x가 실수일 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ 을 만족하는 유리수열 $\{a_n\}$이 존재할 때이다.

이처럼 유리수를 확대된 십진체계로 나타내려는 노력은 모든 유리수를 그러한 표현으로 나타낼 수 없다는 한계상황을 만나게 되고, 이를 극복하기 위해 수열과 수열의 극한 개념이 필요해졌다.[7] 그리고 무리수에 대해서도 동일한 개념을 적용하면 궁극적으로 '유한소수열의 극한'으로 실수를 정의하게 된다.

이렇게 해서 실수는 유한소수와 무한소수로 나눌 수 있으며, 실수는 소수로 표현했을 때 유리수의 집합과 무리수의 집합의 합집합이 실수의 집합이며, 유리수의 집합과 무리수의 집합은 서로 소라는 사실을 보일 수 있게 된다.

그리고 이러한 논의의 또 하나의 해법은 '급수' 개념을 이용하는 것이다. 즉, 유한소수열의 극한이란 개념을 확대된 십진체계의 표현으로 번역하여 위의 논의를 전개한 것이 급수이다.

유리수에서 분자를 분모로 나누고, 확대된 십진체계를 이용하면

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$$

이다. 즉, 급수 개념이 나타난다. 이것은 무한등비급수의 합에 의해 분수형태로 나타낼 수 있다. 예를 들어,

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots$$

6) 김남희 외(2010). 이 내용의 발생적 맥락화는 정영우(2010)에서 자세히 구성하고 있다.
7) 실제로 수열과 수열의 극한은 실수를 정의하는 수단이다(정영우, 2010; 김남희 외, 2010).

이고, 이 경우 무한등비급수의 합

$$\frac{0.3}{1-0.1}=\frac{0.3}{0.9}=\frac{1}{3}$$

은 부분합

$$S_1=0.3,\ S_2=0.33,\ S_3=0.333,\ S_4=0.3333,\ \cdots$$

의 극한으로 정의한다. 또한

$$\sqrt{2}=1+0.4+0.01+0.004+0.0002+\ \cdots$$

이고, 이것은 부분합

$$S_1=1,\ S_2=1.4,\ S_3=1.41,$$
$$S_4=1.414,\ S_5=1.4142,\ \cdots$$

의 극한으로 정의한다. 그러므로 수열의 내용과 같아진다.

이처럼 급수 개념으로 '무한합'을 '유한값'으로 정의함으로써 실수는 연산이 정의되는 대수적 구조를 가지게 된다. 즉, 무한소수는 대수적 연산이 가능하지 않지만, 수열의 수렴이나 급수의 개념은 이를 유한값으로 정의하게 하여 대수적 연산이 가능하게 한다.

결론적으로 실수는 수렴하는 유리수열 - 즉, 유한소수열 - 의 동치류의 극한으로 정의하고, 십진체계를 이용하여 소수를 다룰 때 급수의 개념이 나타난다. 급수는 계산 불가능한 무한소수인 실수의 연산을 가능하게 한다. 그리고 유리수는 나누어서 소수로 표현할 수 있으며, 소수는 급수로 표현하여 분수로 나타낼 수 있다. 그러나 무리수는 이러한 알고리즘이 없다는 것이 무리수 지도의 어려움이다.

Ⅳ. 결론 및 제언

학교수학에서 정수와 유한소수와의 관계는 수학과 교육과정 해설 그리고 이를 구체화한 중학교 2학년, 중학교 3학년 교과서에서 일관되게 다루어지지 않고 있어, 학생들은 물론 교사들도 혼란을 겪고 있다. 이에 대해 본 연구에서는 일관된 하나의 관점 아래에 실수를 분류하고, 실수와 소수와의 관계를 규명할 수 있는 이론적 배경으로 십진체계에 의한 수의 확장과정과 관련 개념들에 대해 살펴보았다.

그러나 이러한 혼란은 학교수학에서 다루는 수들이 다양한 관점의 결과물들의 혼합으로 지도되고 있기 때문에 어느 정도 필연적이다. 실제로 십진체계의 관점에서 수를 확장하면 유리수는 수의 분류에서 의미가 없다. 즉, 자연수, 정수, 확대된 십진체계인 유한소수 그리고 무한소수가 실수의 분류가 된다. 그리고 실수의 정의는 유한소수열의 극한이다. 따라서 실수는 해석적 완비체이다.

그러나 방정식의 해집합이란 대수적 관점에서의 수 분류에서는 소수 표현이 의미가 없으며, 자연수, 정수, 유리수, 무리수(실수), 복소수가 수의 분류가 된다. 따라서 복소수는 대수적 완비체이다.

이제 정수는 유한소수인가에 대해 답해보자. 십진체계 관점에서 소수는 정수가 아닌 유리수의 또 다른 표현으로, 유한소수의 조건은 항이 유한개이며, 계수가 정수라는 것이다. 따라서 확대된 십진체계에서 적절한 계수를 0으로 두면 정수가 되므로, '정수는 유한소수에 함의'된다. 그러나 정수만을 다룰 때 소수 표현은 의미가 없다. 소수는 '정수가 아닌 유리수를 논의할 때 필요한 개념'이다. 그러므로 소수가 논의되는 맥락이 충분히 논의되고, 그 결과적 비교에서 정수가 유한소수에 함의된다는 것을 지도

할 필요가 있다. 이러한 맥락적 지도과정은 유한소수의 판정법이라 할 수 있는 '정수가 아닌 분수를 기약분수로 나타내었을 때, 분모가 2 또는 5뿐이면 이 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다'의 지도에서도 중요하다. '정수가 아닌 기약분수'란 조건이 강조되지 않은 채 정수를 유한소수에 포함하면 분모가 1인 경우가 정수가 되고, 이것은 분모가 2 또는 5뿐이 아니어도 성립하게 된다.

그런데 학교수학에서는 이처럼 다른 두 수의 확장 관점을 통합적으로 다루려는 과정에서 유리수 또는 소수 표현에 혼란이 발생하게 되는 것이다.

이처럼 학교수학의 지도에서 '관점'과 '맥락'은 교육과정 구성의 중요한 요소일 뿐만 아니라, 교사들이 교육과정을 비판적 안목에서 판단하고, 자신의 수업을 개연성 있고 일관되게 조직하는데 있어 필수적이다.

본 연구에서 제시한 실수 분류의 관점은 하나의 모델이지만, 정수와 유한소수, 유한소수와 순환소수의 관계에 대해서는 여러 연구에서 문제제기가 되고 있다. 특히 관계를 구명하는 과정에서 0을 순환마디로 인정할 것인지 아닌지에 대한 논의는 이러한 문제제기와 밀접한 관계를 가진다. 따라서 수학과 교육과정을 편성하고 개정을 할 때에는 이러한 의견들을 충분히 수렴하여 일관되고 명확한 정의와 분류가 이루어져야 할 것이다.

본 연구에서는 십진체계 표현에 의해 실수의 분류를 (정수를 포함한) 유한소수와 무한소수로 보는 관점을 제시하였으나, 교육과정 편성에 있어 0을 순환마디로 인정할 경우와 정수를 유한소수에 포함되지 않는다고 할 경우, 어떤 논의가 가능한지에 대한 후속연구가 학습수준과 교수학적 의도를 고려하여 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 서울 : 교육과학기술부.

교육과학기술부(2008a). **중학교 교육과정 해설 (Ⅲ) 수학, 과학, 기술・가정**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2008b), **초등학교 교육과정 해설 Ⅳ**, 서울: 교육과학기술부.

김남희・나귀수・박경미・이경화・정영옥・홍진곤(2006), **수학교육과정과 교재연구**, 경문사.

김부윤・정영우(2008). 중학교에서의 무리수 지도에 관하여. **한국수학사학회지**, 21(1), 139-156.

김원경・조민식・김영주・김윤희・방환선・윤기원・이춘신(2011). **중학교 수학 3**. 서울 : 비상교육.

김흥기(2004). 중학교에서 순환소수 취급과 무리수 도입에 관한 고찰. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구**, 14(1), 1-17.

김흥종・계승혁・오지은・원애경(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : (주)성지출판.

김흥종・계승혁・오지은・원매경(2011). **중학교 수학 3**. 서울: 성지출판(주).

나귀수(2001). 중학교 학생들의 수 개념 조사. 대한수학교육학회지 **학교수학**, 3(2), 267-279.

박규홍・최병철・안숙영・김준식・유미경(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 동화사.

박규홍・최병철・안숙영・김준식・유미경(2011). **중학교 수학 3**. 서울 : (주)동화사.

박수정(2007). **유리수와 소수에 대한 중학생들의 이해 실태와 도입 방법에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

박영훈・여태경・김선화・심성아・이태림・김수미(2011). **중학교 수학 3**. 서울 : 천재문화.

박윤범・남상이・최소희・홍유미(2011). **중학교 수학 3**. 서울 : 웅진씽크빅.

박임숙(2001). 중학교 2학년에서 순환소수의 지도에 관한 연구. **학교수학교육학회 논문집, 1,** 159-175.

박종률・유종광・이창주・오혜정・이미라・박진호(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : (주)도서출판 디딤돌.

송근화・정원석・유기종・우종옥・이홍기・이용경(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : 새롬교육.

신항균・이광연・윤혜영・이지현(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : (주)지학사.

우정호・박교식・박경미・이경화・김남희・임재훈・박 인・이영란・고현주・이정연(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : 두산 동아.

유희찬・류성림・한혜정・강순모・제수연・김명수・천태선・김민정(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : (주)미래엔컬쳐그룹.

유희찬・류성림・한혜정・강순모・제수연・김명수・천태선・김민정(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : (주)미래엔컬쳐그룹.

윤성식・김해경・조난숙・김화영・조준모・정세연(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : 더 텍스트.

윤성식・조난숙・김화영・조준모・장홍월・김해경(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : 더 텍스트.

이강섭・엄규연(2007). 순환소수 지도에서의 문제점과 해결방안. 대한수학교육학회지 **학교수학, 9**(1), 1-12.

이강섭・왕규채・송교식・이강희・안인숙(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : 도서출판 지학사.

이강섭・왕규채・송교식・이강희・안인숙(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : 도서출판 지학사.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : 천재교육.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : 천재교육.

이혜련(2006). **유리수와 소수 개념 이해 실태 분석에 관한 연구.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

장혜원(2011). Stevin의 <소수>의 수학사적 의의와 수학교육적 함의. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구, 21**(2), 121-134.

정상권・이재학・박혜숙・홍진곤・서혜숙・박부성・강은주(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : (주)금성출판사.

정상권・이재학・박혜숙・홍진곤・서혜숙・박부성・강은주(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : (주)금성출판사.

정영우(2010), **실수 체계의 교수학적 조직화에 관한 연구**, 부산대학교 대학원 박사학위논문.

정 원(2009). 시몬 스테빈(Simon Stevin)의 십진소수체계: 기하학과 산수의 본격적인 융합 시도. **한국수학사학회지, 22**(1), 41-52.

정창현・김창동・이치형・민정범・김지용(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : 대교.

최용준・한대희・박진교・김강은・신태양・배명주(2010). **중학교 수학 2.** 서울 : 천재문화.

최용준・한대희・박진교・김강은・신태양・배명주(2011). **중학교 수학 3.** 서울 : 천재문화.

홍우철(2006). 중등학교 수학에서 소수. 부산대학교 **과학교육연구보, 33,** 19-32.

Eves, H. (1995), **수학사**(이우영・신항균 역), 서울: 경문사.

A Study on the Classification of Real Numbers based on the Decimal System

Chung, Young Woo (Pusan National University)

The efforts to represent the numbers based on the decimal system give us fundamental understanding to construct and teach the concept network on the related knowledge of elementary and secondary school mathematics. In the process to represent natural numbers, integers, rational numbers, real numbers as decimal system, we will classify the extended decimal system. Moreover we will obtain the view to classify real numbers.

In this paper, we will study the didactical significance of mathematical knowledge, which arise from process to represent real numbers as decimal system, starting from decimal system representation of natural numbers, and provide the theoretical base about the classification of real numbers. This study help math teachers to understand school mathematics in critical inside-measurement and provide the theore tical background of related knowledge. Furthermore, this study provide a clue to construct coherent curriculum and internal connections of related mathematical knowledge.

* Key Words : decimal system(십진체계), finite decimal(유한소수), decimal(소수), classification of real numbers(실수의 분류)

논문접수 : 2012. 4. 2
논문수정 : 2012. 4. 23
심사완료 : 2012. 5. 10