

## 역 문제에 대한 특이치 효율화

박성완\*

(논문접수일 2011. 09. 08, 수정일 2011. 11. 25, 심사완료일 2011. 12. 06)

### Efficient Method of Singular Value for Inverse Problem

Sung-Oan Park\*

#### Abstract

This study proposed efficient method of singular value for inverse problem, linear approximation of contact position and loading in single and double meshing of transmission contact element, using 2-dimension model considered near the tooth by root stress. Determination of root stress is carried out for the gear tooth by finite element method and boundary element method. Boundary element discretization near contact point is carefully performed to keep high computational accuracy. The predicted results of boundary element method are good accordance with that of finite element method.

**Key Words :** Efficient method(효율화), Inverse problem(역 문제), Singular value(특이치), Boundary element method(경계요소법), Illposed problem(부적절문제)

### 1. 서론

일반적인 역 문제는 원인으로 부터 결과를 인도하는 순문제와 정반대로 관측결과 에서 원인이 되는 현상을 조사하는 문제이며, 과학연구 및 계측 등에 공통적이며 자연적인 문제이다. 그러나 역 문제는 그 성질상 대량의 데이터를 취급하고 또한 대규모의 수치계산이 필요하기 때문에 현재까지 많은 연구가 진행되어 지지 않았다. 그러나 최근에 컴퓨터 성능의 비약적인 향상, 계측기술의 고정도 측정의 실현 및 수치해석 기술의 발전 등에 의하여 역 문제를 연구하려고 하는 환경이 조성되어 활발한 연구가 진행되고 있다. 현재 역 문제는 공학의 분야에 머무르지 않고 의학, 우주물리학, 원자물리학, 생물학 등 소위 자연과학 분야에 이르기 까지 적극적으로 도입되고 있으며 연구가 진행되고 있다<sup>(1~5)</sup>.

과학 및 공학에서 취급하는 문제는 입력을 부여하여 그것에

대한 응답을 구하는 순방향의 것이 대부분이다. 그러나 항상 입력으로 필요한 정보가 모두 완전하게 주어지는 상황이 실현되는 것은 아니다. 응답이 관측 등에 의하여 주어지므로 그것을 발생시키는 입력이 알려져 있는 경우는 가끔 있다. 특히 무엇인가 새로운 현상을 파악할 때 인지한 것은 현상의 관찰 결과만이다. 경계조건이나 재료 특성치 및 지배방정식도 미지이다. 이와 같이 관찰과 함께 현상을 이해하는 과정은 역 문제 이외의 다른 방법은 없다. 따라서 역 문제는 과학, 공학에 있어서 자주 접하는 본질적인 또한 자연적인 문제인 것을 알 수 있다. 역 문제를 정식화하여 얻어진 방정식의 해를 직접 구하면 심한 진동을 동반한 부 자연스러운 해가 얻어지는 경우가 많다. 이 형태의 문제는 부적절문제(illposed problem)<sup>(6)</sup>라고 부른다. 자연계에 존재하는 온도장, 변형률장, 전기 포텐셜장, 확산에서 감쇄를 포함하는장 등에 있어서 어떤 시점에서 입력이 있어도 그 응답은 입력이 있는 점에서 부터 거리가 멀어짐에 따라서 또는 시간

\* 인천대학교 기계시스템공학부 (sopark@incheon.ac.kr)  
주소: 인천시 연수구 송도동 12

이 경과함에 따라서 감소되어 장은 평활하게 되는 성질이 있다. 따라서 측정점이 입력시점으로 부터 공간적으로나 시간적으로 거리가 멀어지는 만큼 입력을 추정하는 것은 곤란한 것을 알 수 있다. 역 문제에 부적절문제가 많은 것은 이 때문이다. 따라서 본 연구에서는 경계요소법을 적용하여 접촉 문제이면서 동적 문제인 치차에 역 문제를 적용하여 부적절의 문제를 특이치 효율화로 개선하는 방안을 제시하고자 한다.

### 2. 역 문제에 의한 접촉하중 및 접촉위치의 추정

Fig. 1에 평치차의 이뿌리응력과 하중, 치의 위치의 관계를 표시한다. 여기서 단위하중  $F$ 를 이끝으로부터 이뿌리로 하중을 작용하는 경우 각 이뿌리응력을  $\sigma_a \sim \sigma_d$ 로 설정한다. 또한 집중하중  $F_1, F_2$ 가 치면에 작용할 때 2개, 1개 맞물릴때의 각 이뿌리응력은  $\sigma_1 \sim \sigma_4$ 로써 그때의 치의 위치는 피치(pitch)원을 기준으로 이끝에서 맞물림을 하는 경우는  $h_1$ , 이뿌리에서 맞물림을 하는 경우는  $h_2$ 로 설정하여 Fig. 2에 표시한다. Fig. 3에 표시한 것 같이 래크모델(rack model) 및 평치차의 치의 횡방향으로 단위하중을 작용하여 평치차 및 래크모델의 각 이

뿌리에서 계산되는 각 이뿌리응력과 하중 작용점의 관계를 최소화승법을 사용하여 일차근사화하고, 또한 2개 맞물림의 이뿌리응력은 1개 맞물림의 치에 단위하중을 작용할 때 중첩의 원리에 의하여 계산하면,

$$\sigma_1 = (c_1 h_1 + c_2) F_1 + (a_1 h_2 + a_2) F_2 \tag{1}$$

$$\sigma_2 = (d_1 h_1 + d_2) F_1 + (b_1 h_2 + b_2) F_2$$

$$\sigma_3 = (e_1 h_1 + e_2) F_1 + (c_1 h_2 + c_2) F_2$$

$$\sigma_4 = (f_1 h_1 + f_2) F_1 + (d_1 h_2 + d_2) F_2$$

이다. 식 (1)의 계산을 간단하게 하기 위하여  $F_3 = h_1 F_1, F_4 = h_2 F_2$ 와 같이 연립 1차방정식을 만들어서 계수행렬을  $[A]$ , 미지수로 이루어지는 벡터  $[F]$ , 2대 맞물림 때의 이뿌리응력 벡터  $[\sigma]$ 로서

$$[\sigma] = [A] [F] \tag{2}$$

$$[F] = [A]^{-1} [\sigma] \tag{3}$$

식 (3)에서 식 (2)의 미지 벡터  $[F]$ 가 구해진다.

### 3. 수치해석

범용 유한요소해석 패키지(ALGOR)를 사용하여 정적상태의 래크모델 및 치차의 이뿌리응력을 계산하였다. 래크모델 및 평치차의 형상은 KS규격에 따라 모듈(module)  $M$ , 압력각  $\alpha$ , 이높이에 의하여 결정하였다.  $M=4$ 의 치차 모델의 작성 및 계

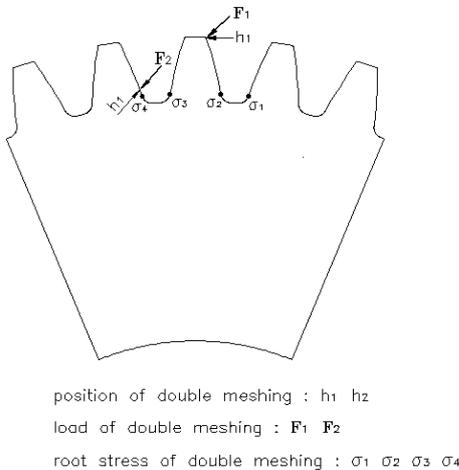


Fig. 1 Relationship between position and root stress

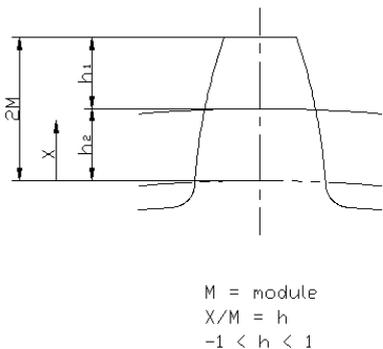


Fig. 2 Determination of  $h$  axis from tip to root

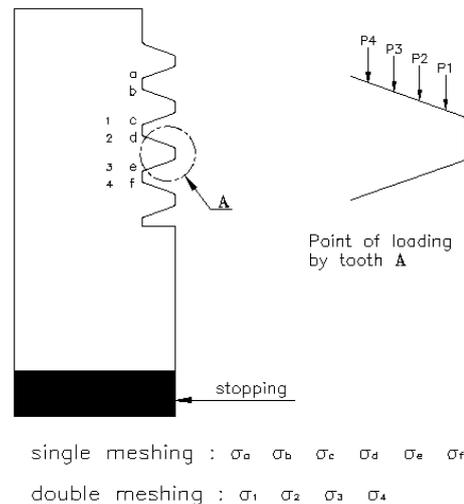


Fig. 3 Relationship between position and root stress of double meshing

산은 래크모델과 동일한 형태로 치차 모델의 치형은 인볼류트곡선으로 치차의 이뿌리의 곡률반경 0.375M, 압력각  $\alpha = 20^\circ$ ,  $M = 4$ , 잇수  $z_1 = 18$ ,  $z_2 = 36$ 으로 하였다.

요소는 2차원 평면요소로 8-노드 아이소파라메트릭(8-node isoparametric)요소를 사용하였으며 계산정도, 계산시간 등을 고려하여 ALGOR의 메쉬엔진(mesh engine)으로 최적의 요소 분할을 하였다. 래크모델의 해석방법은 하중방향을 Fig. 3과 같이 법선방향으로 이끝으로부터 이뿌리로 일정한 단위하중을 작용하여 해석한다. 치차의 해석은  $M=4$ 의 치차의 치의 이끝으로부터 이뿌리의 방향으로 작용선상에서 회전을 반복하면서 동력을 전달한다. 치차 모델은 래크모델과 같은 방법으로 이끝으로부터 이뿌리로 일정한 단위하중을 작용하여 해석을 한다.

Fig. 4는 래크모델의 해석한 결과를 표시하며 단위하중위치, 즉 물림점이 이끝에서 이뿌리로 이동함에 따라 이뿌리응력값  $\sigma_c$ ,  $\sigma_f$ 는 일정한 값을 유지하며  $\sigma_d$ 는 일정한 값을 유지하다가 물림점 P10 부터 서서히 감소하여 P6 점에서 최소값을 나타내고 그 이후는 증가하여 이뿌리응력값과 동일한 값을 나타내고 있다. 또한  $\sigma_e$ 는 이뿌리에서부터 최대값을 나타내며 이끝으로 진행됨에 따라 급격히 감소하여 이끝에서 최소값을 나타내고

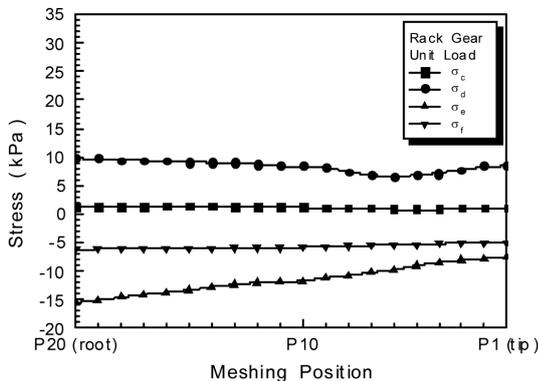


Fig. 4 Determination of root stress and meshing position in rack model

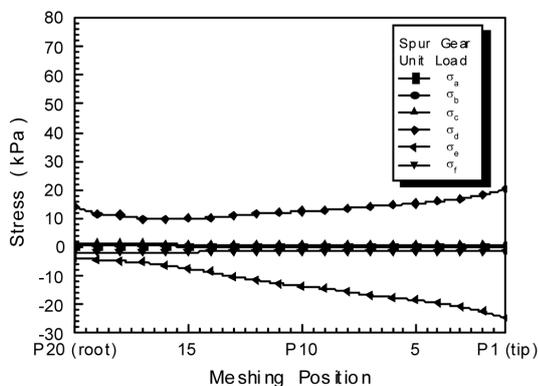


Fig. 5 Determination of root stress and meshing position in spur gear model

있다. 단위하중을 직접받는  $\sigma_d$ 값이 가장 크고 반대편인  $\sigma_e$ 값이 가장 낮은 값을 나타내고 있으며 치의 단위하중에 의한 굽힘작용으로  $d$  점에서는 인장,  $e$  점에서는 압축현상을 나타내고 있다. Fig. 5는  $M=4$ 의 치차의 해석결과를 표시하며 치차의 회전에 있어서 1매의 치를 주목하면 이끝으로부터 이뿌리 방향으로 접촉면을 변화하여 그 과정을 반복회전한다. 결국 치차의 접촉면은 구동 및 피구동의 기초원의 접촉선상(접촉 작용선)으로 작용하고 있는 것을 고려하여 단위하중을 이끝으로부터 이뿌리 방향으로 치직각에서 일정하게 작용하여 해석을 하였다. Fig. 5에 의하여 하중이 이끝으로부터 이뿌리로 진행하면 각 이뿌리응력이 작게 되고 있으며 이뿌리응력  $\sigma_c$ ,  $\sigma_f$ 는 래크모델의 경우와 동일한 경향을 나타내고 있으나  $\sigma_e$ 는 반대의 경향을 나타내고 있다.

그러나  $\sigma_d$ 는 하중이 이뿌리로 진행하면 작게 되지만 이뿌리인 점으로부터는 크게된다. 이것은 치직각에 작용하고 있는 하중이 이뿌리에 가깝게 될 때 압축력이 작게 되며 인장력은 크게 되는 것으로 이뿌리에서는 곡률반경이 작게 되는 영향이 있다고 생각된다.

$\sigma_a$  및  $\sigma_b$ 의 이뿌리응력값이  $\sigma_c$  보다 작으며 또한 계수행렬을 구성하는데 거의 영향이 없다고 생각되어 생략하였다. 전체적으로 단위하중에 의한 선형성이 유지됨을 알 수 있다. 이들의 결과를 식 (2)에 대입하여 계수행렬  $[A]$  를 계산하고 역문제의 해석에 적용한다.

### 3.1 특이치 효율화

본 논문에서 취급하는 문제는 즉 치차의 각 이뿌리응력을 사용하여 입력시의 치의 맞물림 접촉하중 및 접촉위치 구하는 것으로 역 문제에 해당한다.

해의 존재성, 해의 일의성, 해의 안전성의 3가지가 모두 만족될 때 문제는 적절하게 된다. 역문제의 부적절은 이들의 적절에 관한 요건의 범위가 축소 또는 한 가지를 고려하지 않은 것이다<sup>(6)</sup>. 식 (2)로 부터 역문제를 적용하여 해를 구하면 불안정한 해가 얻어지는 이유는 계수행렬  $[A]$ 가 약조건행렬이며 응력 벡터  $[\sigma]$ 의 약간의 오차가 미지 벡터  $[F]$ 의 값을 크게 증폭시킨다. 따라서 계수행렬  $[A]$ 를 구성하는 중 벡터의 선형독립성을 낮게 반영하고 계수행렬  $[A]$ 의 최대 특이치와 최소 특이치의

Table 1 Singular Value

	Rack( $\times 10^{-3}$ )		$m = 4$ ( $\times 10^{-3}$ )	
	h axis	h1,h2 axis	h axis	h1,h2 axis
$\lambda_1$	15.8	15.6	21.9	22.2
$\lambda_2$	6.9	5.85	14.0	10.7
$\lambda_3$	0.29	0.42	3.24	1.97
$\lambda_4$	0.15	0.17	0.05	0.06

비(조건수)의 증대로써 정량화 하였다<sup>(7)</sup>. 우선 rack model의 계수행렬  $[A]$ 에 대하여 분석 한다. rack의 특이치를 ( $\lambda_1 \sim \lambda_4$ )를 Table 1에 표시한다. rack model의 계수행렬  $[A]$ 는  $4 \times 4$ 행렬이며 최대 특이치  $\lambda_1 = 0.0158$ , 최소 특이치  $\lambda_4 = 0.00015$ 의 행렬이다.

$[cond(A)]$ 는 계수행렬  $[A]$ 의 조건수이다.

$$cond(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 105.33 \quad (4)$$

식 (4)와 같이 조건수가 대단히 크게 되는 것을 알 수 있다. 조건수  $[cond(A)]$ 가 크게 되는 만큼 해에 대한 영향이 크게 되는 것은 계수행렬  $[A]$ 가 약조건이기 때문이다<sup>(7)</sup>.

따라서 해에 민감한 계수행렬  $[A]$ 의 영향을 없애는 적절화가 필요하다.

### 3.2 계수행렬 $[A]$ 의 특이치 분해

본 논문에서 취급하는 문제는 즉 치차의 각 이뿌리응력을 사용하여 입력시의 치의 맞물림 접촉하중 및 접촉위치를 구하는 것으로 역 문제에 해당한다. 계수행렬  $[A]$ 는 다음식과 같이 분해가능하다.

$$[A] = [U][B][V]^T \quad (5)$$

여기서,

$[U]$ 는  $N \times N$ 의 직교행렬,

$[V]$ 는  $M \times M$  직교행렬,

$[B]$ 는  $N \times M$ 의 특이치

$\lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots, m, m \leq \min(M, N))$ 을 포함한 대각행렬이다. 여기서 대각행렬  $[B]$ 는 matrix  $[A]$ 의 rank를  $m$ 으로 표시한다.

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\lambda_j \text{는 } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \dots \lambda_m > 0$$

계수행렬  $[A]$ 의 역행렬은  $[A]^{-1} = [V][B]^{-1}[U]^T$ 이다.

특이치 분해는 축소 특이치 분해법으로 작은 특이치를 이산화하여 강제적으로 zero로 바꾸어 계수행렬  $[A]$ 의 rank를 감소

시켜 약조건을 순화하는 방법이다. 본 논문에 있어서 대각행렬  $[B]$ 의 특이치가  $\lambda_4 = 0$ 은  $rank(k = 1)$ ,  $\lambda_3$  및  $\lambda_4 = 0$ 은  $rank(k = 2)$ ,  $\lambda_2$  및  $\lambda_3$ 과  $\lambda_4 = 0$ 은  $rank(k = 3)$ 으로 정의하여 실용식으로 부터 얻어지는 추정치는  $rank(k = 0, 1, 2, 3)$ 로 표시한다. 여기서  $rank(k = 0)$ 의 경우는 특이치 분해한 상태이며 rank를 감소시키지 않는 상태이다. 또한 남은 특이치의 수를  $p (p \leq m)$ 로 하면 식 (3)에 의한 미지량 vector  $[F]$ 는 계수행렬  $[A]$ 의 역행렬을 사용하면

$$[F] = [V][B]_p^{-1}[U]^T[\sigma] \quad (7)$$

와 같이 된다. 대각행렬  $[B]$ 의 역행렬  $[B]_p^{-1}$ 는 특이치를 역수로 표시한 것이다. 결국 대각행렬  $[B]$ 의 역행렬  $[B]_p^{-1}$ 은 식 (8)과 같이 나타낸다<sup>(7)</sup>.

$$[B]_p^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_p} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

## 4. 경계요소법 해석

경계요소법에 의한 래크모델 및 평치차 모델의 해석에 있어서 경계요소 프로그램<sup>(8-14)</sup>을 치차의 인볼류트곡선을 일직선으로 이산화한 선형요소를 사용하여 계산하였다. 래크모델 및 치차의 요소수를 결정하기 위해 여러 종류의 모델을 이끝에서 집중하중을 작용하여 이높이(이끝높이+이뿌리높이)의 요소분할수에 따른 이뿌리에서의 최대응력값을 Fig. 6 및 Fig. 7에 표시하고 그들의 값을 비교하기 위하여 적당한 분할수를 결정하였다. 그 결과 이끝면, 이끝높이, 이뿌리높이를 (6/13/13)으로 요소분할하였다. Fig. 8은 래크모델, Fig. 9는 평치차의 요소분할도이다. 구속조건은 유한요소해석과 동일하게 래크모델 및 평치차의 저면을 완전구속하였다. 물성치로 중탄성계수  $E$ 는 206GPa, 횡탄성계수  $G$ 는 82GPa, 프아송비  $\nu$ 는 0.3으로 하였다.

경계요소법의 계산에 의하여 구한 이뿌리응력을 식 (2)에 대입하여 역문제를 해석한다. 또한 이뿌리응력에 대하여 유한요소해석 결과와 비교할 필요가 있다. 치차는 접촉위치가 변화하면서 동력전달을 하므로 치차의 이뿌리응력의 계산위치는 추정식의 작성에 있어서 중요하다. 그래서 Hofer의 30°접선방향의 위험다면 위치에서 이뿌리응력을 계산한 결과를 사용조건

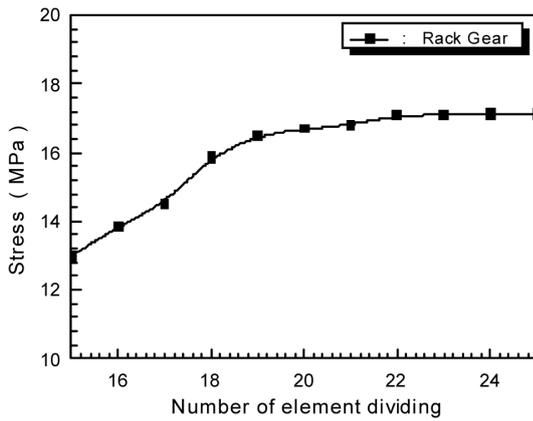


Fig. 6 Determination of element number in rack model of whole depth

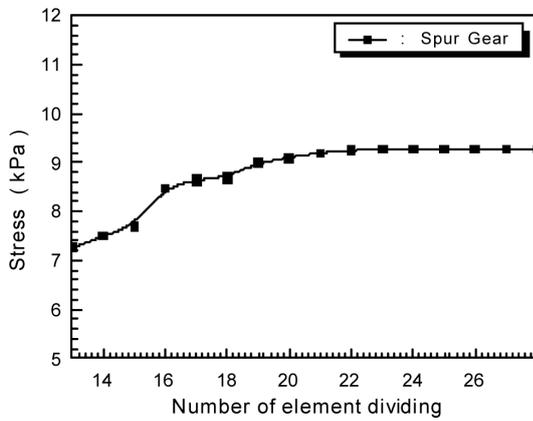


Fig. 7 Determination of element number in spur gear model of whole depth

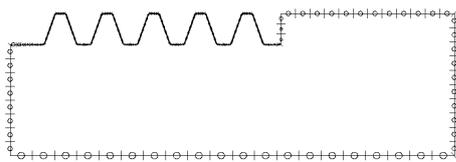


Fig. 8 Mesh pattern of rack model by BEM

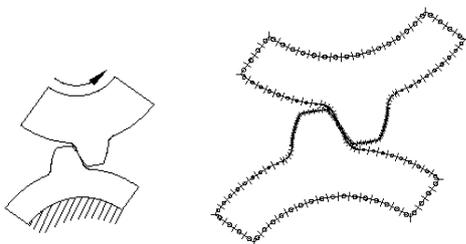


Fig. 9 Mesh pattern of spur gear model by BEM

으로 하였다. 래크모델 및 평치차를 사용하여 유한요소법과 경계요소법 해석결과, 하중을 직접받는  $d$  점에서 이뿌리응력( $\sigma_d$ )의 오차가 작은 위치를 Fig. 10에 표시한다. Fig. 10에서 Fig.

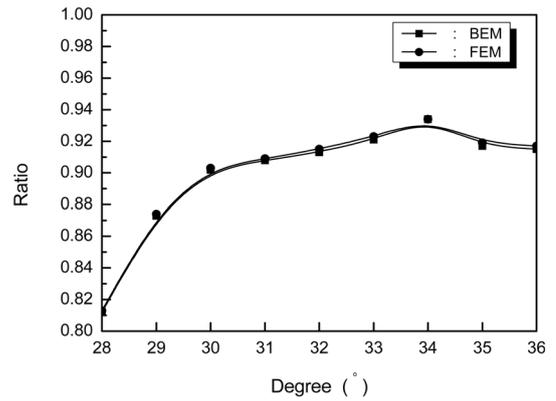


Fig. 10 Comparison ratio for the root stress of BEM with FEM

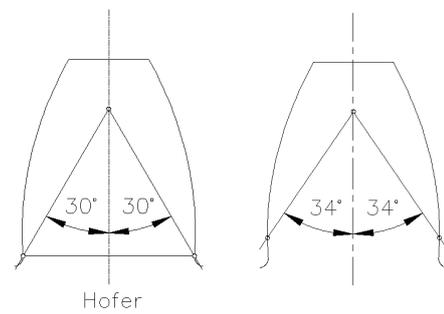


Fig. 11 Critical section of tooth

11와 같이 34°떨어진 위치에서 유한요소법 및 경계요소법 해석에 의한 이뿌리응력의 오차가 작은 것을 알 수 있었다.

#### 4.1 추정값의 계산

치차는 회전시에 이끝 및 이뿌리부근에서 2매 맞물림을 하면서 회전하므로 추정값은 예측 가능하지만 실제의 치차에서 큰 오차가 나타나는 것을 알 수 있다. 경계요소법에 의한 해석결과를 식 (1)에 적용하기 위하여 Fig. 2에 표시한 것 같이 치차의 피치원을 기준으로 이끝에서 맞물림을 하는 경우는  $h_1$  이뿌리에서 맞물림을 하는 경우는  $h_2$  로 이끝으로부터 이뿌리로 일차식으로 근사한 근사계수를 Table 2에 정리했다. 여기서 역문제에 의한 추정값을 어느 정도 오차까지를 평가하는가에 대하여 서술한다. 본 논문에서 제안하는 방법에 있어서 추정한 해의 오차를 평가하는 것은 토크를 추정하는데 있어서 중요하다. 그래서 평치차 모델을 사용하여 2매시에 추정값의 한계를 검토한다. 평치차 모델의 이끝과 이뿌리 각각 일점에  $F_1$ 은 5~9.9 N,  $F_2$ 를 0.1~5 N으로 변화시킨 경우와  $F_1$ 은 0.1~5 N,  $F_2$ 는 5~9.9 N의 부하하중을 가한 경우 추정값의 결과를 Fig. 12~Fig. 15에 나타낸다. Fig. 12~Fig. 15에 의하여 하중  $F_1$ 의 역할이 10%까지 급격하게 변화하는 것을 알 수 있으나  $F_2$ 는 안정되고 있는 것을 알 수 있다. 결국 추정값이 10% 이하인 상태에서 하중  $F_1$ 을 구하여 토크를 평가하는 것은 신뢰성이 부족하

게 된다. 또한 위에서 서술한 것과 같은 하중  $F_1$ 의 영향에서 치차의 위치  $h_1$ 도 동일한 경향을 나타내고 있다. 그래서 본 연구에서 부터 얻어지는 추정값의 판정기준을 다음과 같은 판정

**Table 2 Accuracy Coefficient of Root Stress**

	Rack( $\times 10^{-3}$ )		$m = 4(\times 10^{-3})$			
	h axis	h1,h2 axis	h axis	h1,h2 axis		
$a_1$	0.00	0.00	-0.02	-0.04		
$a_2$	0.00	0.00	0.34	0.33		
$b_1$	0.00	0.00	-0.08	-0.12		
$b_2$	0.00	0.00	0.41	0.40		
$c_1$	-0.1	-0.51	-0.1	-0.18	-0.31	-0.15
$c_2$	0.6	0.46	0.55	0.92	0.87	0.9
$d_1$	2.5	-0.37	2.7	6.19	0.63	7.83
$d_2$	7.1	6.30	6.94	12.6	10.6	11.8
$e_1$	-4.1	-3.96	-11.5	-11.7		
$e_2$	-11.8	-11.9	-12.5	-12.5		
$f_1$	-0.6	-0.55	0.16	0.17		
$f_2$	-5.1	-5.14	-0.73	-0.74		

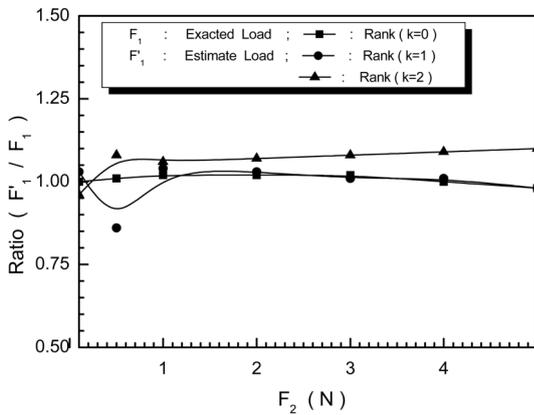
조건을 설정한다.

I. 추정하중  $F_1 \left( \frac{F_1}{(F_1 + F_2)} \right)$ 이 10% 이하로 있으면  $F_1 = 0$ 으로 또한 접촉위치  $h_1$ 은 존속하지 않는다.

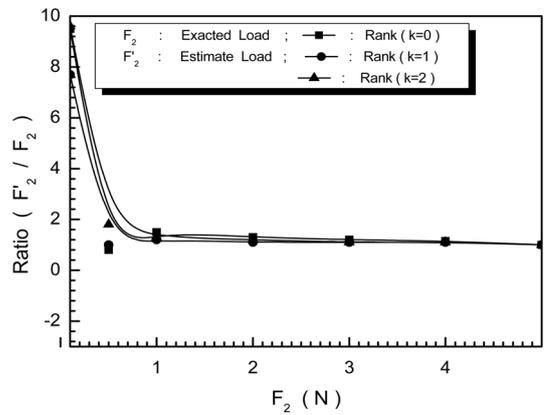
II. 추정하중  $F_2 \left( \frac{F_2}{(F_1 + F_2)} \right)$ 가 10%이하로 있으면  $F_2 = 0$ 으로 또한 접촉위치  $h_2$ 는 존속하지 않는다.

여기서, 얻어진 추정값이 판정조건 I, II에 있으면 치차의 맞물림은 1매 맞물리는 것으로 한다.

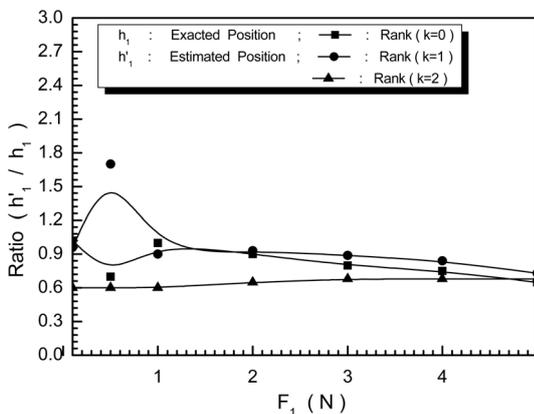
분해한 특이값을 사용하여 래크모델의 예측값을 평가하기 위한 부하하중 800 N을 1개에 가하여 이뿌리응력을 식 (2)에 대입하여 예측값( $F_1'$ ,  $F_2'$ )를 구한 결과를 각각 Fig. 16~Fig. 17에 표시한다. Fig. 16~Fig. 17로부터  $F_1'$ ,  $F_2'$ 의 이미 알려진 값과 예측값과의 오차는 5% 정도이다. 결국 특이값 분해로 예측한 해가 그것만큼 변화하지 않는 것으로부터 1개 맞물림 때의 특이값 분해에 의한 추정값은 신뢰성이 있다고 말할 수 있다. 본 논문의 목표인 2개 맞물림 때에 평치차의 특이값 분해로 해의 추정을 평가할 필요가 있다. 부하하중 1000 N을 2개에 작용하고 이뿌리응력을 식 (2)에 대입하여 예측값( $F_1'$ ,  $F_2'$ )



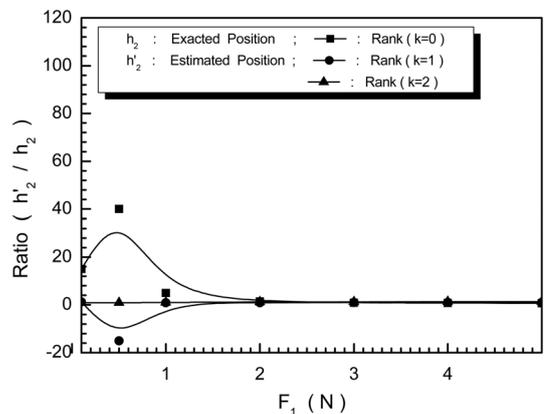
**Fig. 12 Determining of error**



**Fig. 14 Determining of error**



**Fig. 13 Determining of error**



**Fig. 15 Determining of error**

을 구한 결과를 각각 Fig. 18~Fig. 19에 표시한다. Fig. 18~Fig. 19로부터 추정하중  $F_1'$ 의 특이값 분해 및 비특이값 분해로 추정값은 이미 알려진 값과 비교하여 어느 정도 변화하지 않은 것을 알 수 있다. 그러나  $F_2'$ 의 경우는 이미 알려진 값과 추정값과의 오차가 크게 나타난다. 결국 2개 맞물림 때의 경우에도 1개와 동일한 형태의 안정된 추정값이 예측된다. 결국 역

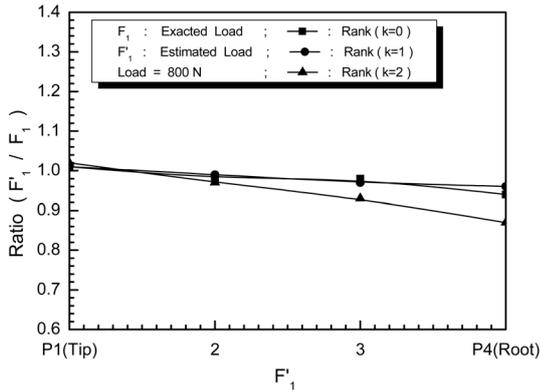


Fig. 16 Relationship between meshing position and root stress by torque

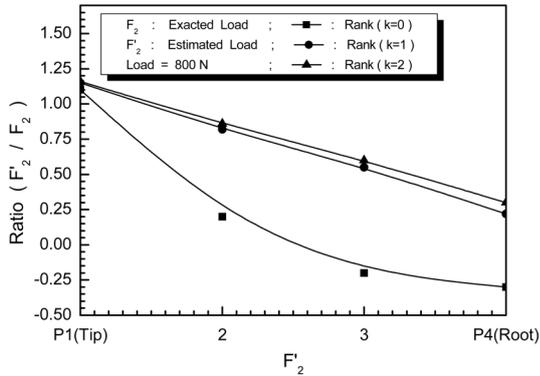


Fig. 17 Relationship between meshing position and root stress by torque

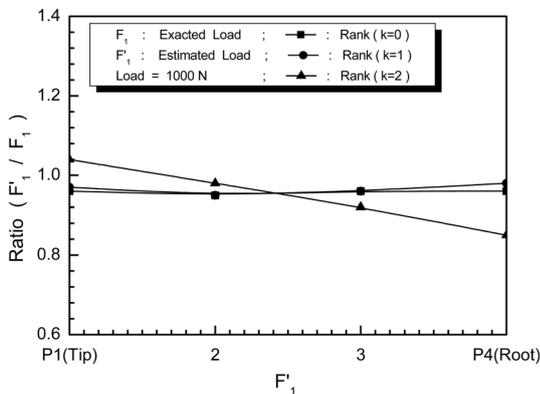


Fig. 18 Relationship between meshing position and root stress by torque

행렬의 감도가 민감하다고 할 수 있으나 랭크를 감소시키면 안정된 값이 얻어지는 것을 알 수 있다. Fig. 16~Fig. 19에 표시한 것 같이 랭크를 1로할 때가 이미 알려진 값에 가장 가깝게 있는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 위의 사항을 고려하여 식 (3)으로부터 추정값을 구한 경우는 랭크 = 1 을 사용한 것이다.

#### 4.2 토크의 추정

본 논문에서 식 (2)로부터 추정값(부하)을 사용하여 토크의 검증을 한다. 토크에 관하여 식 (3)으로부터 추정된 부하하중을 실제의 하중으로 가정한다. Fig. 20에 표시한 것과 같이 토크의 추정에 대하여 구동축의 치차의 이뿌리응력을 사용하여 식 (3)으로부터 추정하중 ( $F_1' + F_3'$ ) 과 기초원 반지름  $R_{g1}$  을 곱하는 것으로 표시된다. 단지 하중 ( $F_1' + F_3'$ ) 과 ( $F_2' + F_4'$ ) 은 일정하다는 조건으로 하면 다음과 같이 표시하는 것이 가능하다.

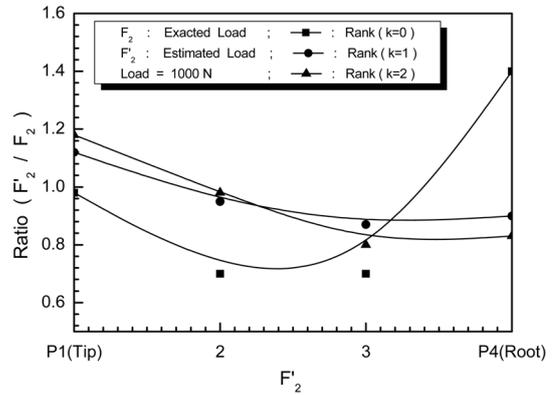


Fig. 19 Relationship between meshing position and root stress by torque

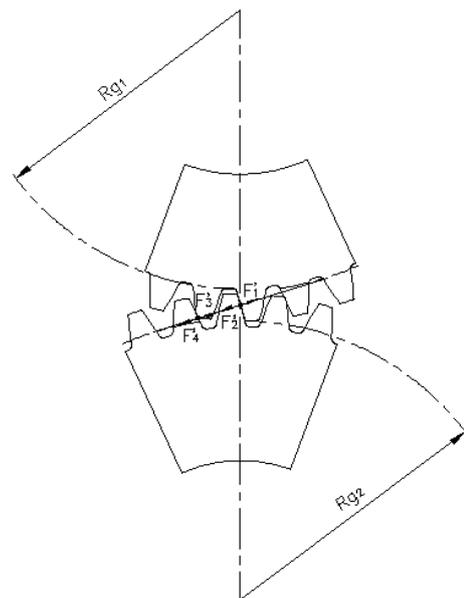


Fig. 20 Relationship between loading and torque

$$T_1 = (F'_1 + F'_3) R_{g1} \quad (9)$$

$$T_2 = (F'_2 + F'_4) R_{g2}$$

여기서,  $T_1$  과  $T_2$  는 구동 및 피구동축의 토크,  $R_{g1}$  과  $R_{g2}$  는 구동 및 피구동축의 기초원 반지름이다. 부하 토크를 추정하기 위하여  $M=4$ 인 치차를 측사이의 거리 100mm로 부하 토크 (0.5, 1, 2N·m)를 각각 이끝으로부터 이뿌리의 P1~P9로 일정하게 변화시켜 각 이뿌리응력을 식 (2)와 식 (3)을 사용하여 추정 토크를 구하였다. 식 (3)을 사용하여 추정한 토크의 결과는 Fig. 21에 표시한다. 또한 부하 토크 비율은 식 (3)으로 부터 추정한 토크  $T'_2$  를 실제값  $T_2$  로 나눈 결과이다. 피구동축의 부하 토크를 계산하여 실제값으로 설정하였다. Fig. 21로부터 추정한 토크는 5% 정도의 오차를 포함하고 있다. 결국 이뿌리 응력을 사용하여 추정한 하중이 오차를 포함하고 있기 때문에 추정 토크도 5% 정도의 오차를 포함한 것을 알 수 있다. Fig. 22는 부하 토크(5, 10, 20N·m)를 각각 이끝으로부터 이뿌리의 P1~P9로 일정하게 변화시켜 각 이뿌리응력을 사용하여 부하 토크를 추정한 결과 Fig. 21보다 안정된 추정값이 얻어짐을 알

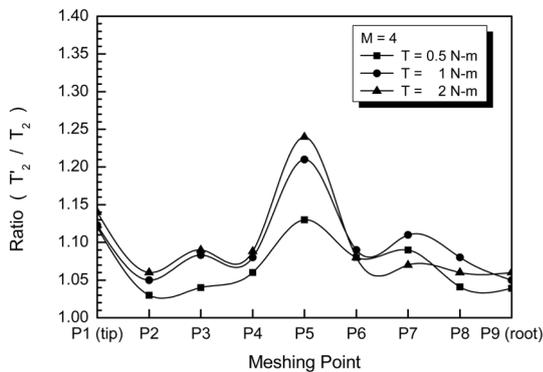


Fig. 21 Relationship between  $T'_2 / T_2$  and position ( $T'_2$  = estimated torque,  $T_2$  = exact torque)

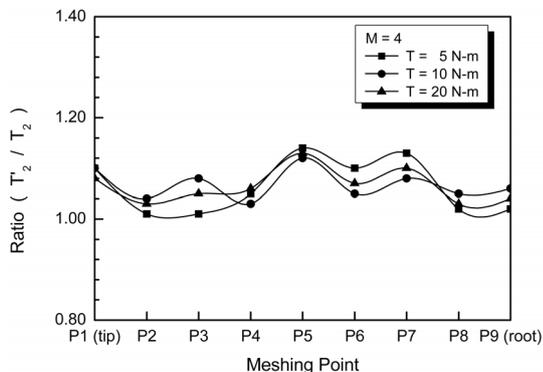


Fig. 22 Relationship between  $T'_2 / T_2$  and position ( $T'_2$  = estimated torque,  $T_2$  = exact torque)

수 있다. 따라서 이들의 결과로 이뿌리응력을 사용하여 식 (2)와 식 (3)으로부터 부하 토크의 추정이 가능한 것을 알 수 있었다. 따라서 Table 2의 근사계수를 대입한 식 (1)의 일차 근사식의 적용성을 확인할 수 있었다.

## 5. 결론

역 문제에서 접촉요소이면서 동적요소인 치차에 적용하여 부적절문제를 특이치 효율화로 개선하는 방안을 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 치차에 하중을 가할 때 인접치차의 이뿌리응력과 그 하중 위치와의 관계를 선형 근사화하고 경계요소법으로 계산한 이뿌리 응력을 보조정보로 치차의 접촉위치와 그때의 접촉 하중을 추정할 수 있는 근사식을 제안한다.
- (2) 역문제의 해석에 있어서 추정값의 정도향상을 위하여 추정값의 오차에 영향을 미치는 계수행렬의 최대 특이값과 최소 특이값의 비를 계수행렬의 랭크를 감소시켜 악조건을 순화하는 방법으로 증대시켜서 랭크=1로 정량화하여 본 해석의 타당성을 검증하였다.
- (3) 이뿌리응력을 사용하여 부하 토크의 추정이 가능한 것을 알 수 있었으며 예측값과의 오차는 5%정도였다.

## 참고 문헌

- (1) Arai, N., Harada, S., and Aida, T., 1981, "Research on Bending Strength Properties of Spur Gears with Thin Rim," *Transaction of JSME C*, Vol. 47, No. 413, pp. 47~56.
- (2) Kubo, A., Ueno, T., Jin, J., Ariura, Y., and Nakanishi, T., 1985, "On Tooth Contact Marking and Gear Performance (1st Report, Fundamental Characteristics of Tooth Contact Marking)," *Transaction of JSME C*, Vol. 51, No. 467, pp. 1559~1567.
- (3) Arai, N., Kawamoto, S., Yoneda, H., Hirogaki, T., and Mizumoto, K., 1991, "A Study of Spiral Bevel Gear (Analysis of Tooth Root Stress by Three Dimensional Finite Element Method)," *Transaction of JSME*, Vol. 57, No. 538, pp. 2114~2117.
- (4) Arai, N., Kawamoto, S., Hirogaki, T., Mizumoto, K., and Uenishi, Y., 1991, "Characteristics of Meshing in Spiral Bevel Gears (Comparison of the Gleason-type Gear with the Oerlinko-type Gear)," *Transaction of JSME C*, Vol. 57, No. 540, pp. 2703~2708.

- 
- (5) Filiz, I. H., Eyercioglu, O., 1995, "Evaluation of Gear Tooth Stresses by Finite Element Method," *Trans. of the ASME*, Vol. 117, pp. 232~239.
  - (6) Tanaka, H., Ohkami, Y., 1997, "Estimation of Impact Force on a Space Vehicle based on an Inverse Analysis Technique," *Transaction of JSME C*, Vol. 63, No. 608, pp. 1172~1178.
  - (7) Arora, S. Jasbir, 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, New York, pp. 125~131.
  - (8) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 153~180.
  - (9) Banerjee, P. K., 1994, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, pp. 87~99.
  - (10) James, H. K., 1994, *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, pp. 87~93.
  - (11) Park, S. O., 1994, "A Study for Mutual Interference between Circular Inclusion and Crack in Finite-Width Plate by Boundary Element Method," *Transaction of KSME*, Vol. 18, No. 6, pp. 1474~1482.
  - (12) Park, S. O., 2001, "Analysis of Spiral Bevel Gear by Inverse Problem," *Transaction of KSMTE*, Vol. 10, No. 5, pp. 85~95.
  - (13) Park, S. O., 2003, "Analysis of Torque on Spur Gear by Inverse Problem," *Transaction of KSMTE*, Vol. 12, No. 5, pp. 24~33.
  - (14) Park, S. O., 2008, "Evaluation of Stress Intensity Factor using Boundary Element Alternating Method," *Journal of the Korean Soc. of Mechanical Technology*, Vol. 10, No. 2, pp. 1~8.