

모아의 변형률 원을 이용한 삼각형 요소에서의 변형률 계산



이용주

서울과학기술대학교
건설시스템디자인공학과 조교수
(ucesyj@seoultech.ac.kr)



이정환

서울과학기술대학교
건설시스템디자인공학과 석사과정

들어가기

본 연구 노트는 실내모형실험에서 근거리 사진계측기법(close range photogrammetry)을 이용하여 측정된 삼각형 절점의 변형된 위치를 모아의 변형률 원(Mohr's circle of strain)을 적용하여 지반공학적인 데이터인 변형률로 계산하는 방법에 대해 서술하고자 한다.

1. 개요

모아의 변형률 원을 이용하면 알려진 지점의 변위를 기준으로 체적변형률(ϵ_v), 최대 전단변형률($\delta\gamma_{max}$), 팽창각(ψ)을 계산할 수 있다. 모든 변위들은 그림 1에서 보는 바와 같이 VMS프로

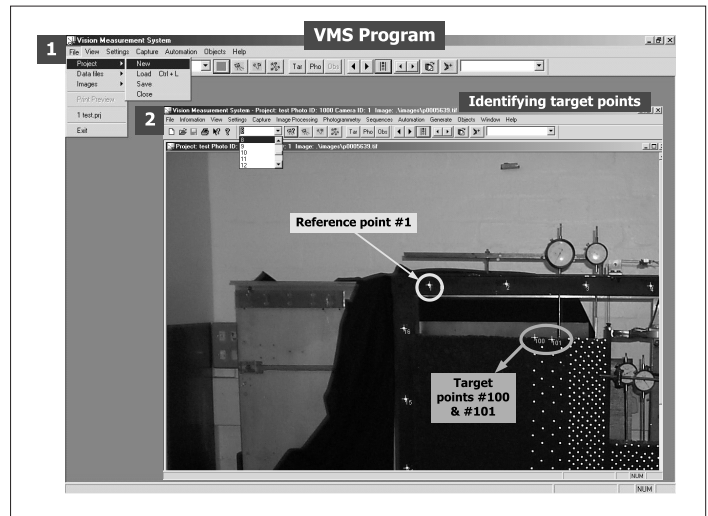


그림 1. VMS 프로그램과 기준점(reference point) 및 측정점(target point)의 번호

그램에 의해 mm 단위로 측정된다.

삼각망의 생성은 “Delaunay triangulation

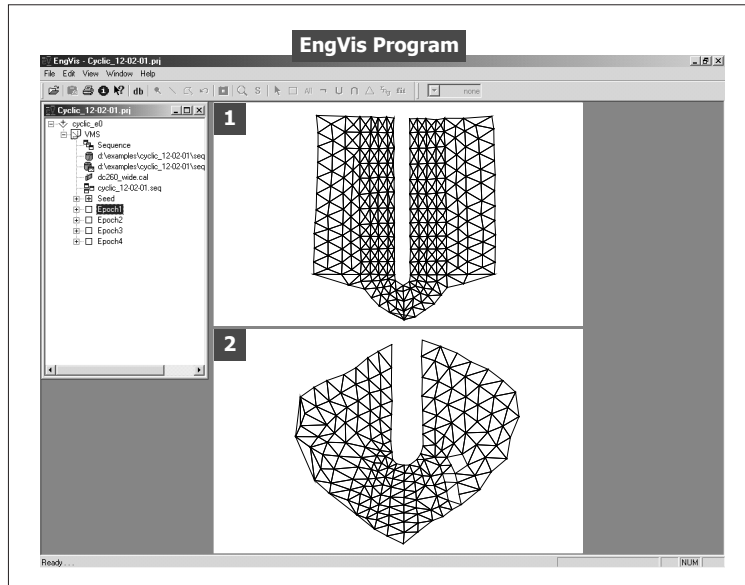


그림 2. EngVis 프로그램을 사용하여 삼각형 유한요소망 생성

system”을 기반으로 EngVis 프로그램에 의해 불규칙한 삼각형 요소들로 구성된다(그림 2참조).

이러한 삼각망은 일반적으로 유한요소해석(FEA) 분야에 사용된다. 또한, 유한요소해석에 있어 변형률은 각각의 삼각형 요소들에 의해서 계산된다.

2. 변형률의 계산

변형률의 계산을 위해 다음과 같은 가정 사항이 필요하다.

- (1) 삼각형 요소의 변위는 삼각형 모서리 부분의 변형을 나타낸다.
- (2) 삼각형 요소의 회전은 고려하지 않는다.

전형적인 흙의 평면변형률 조건에서 삼각형 요소는 그림 3에서 보는 바와 같이 모서리의 점들인 reflective target point인 1, 2, 3점들로 이루어진다. 1, 2에서 1', 2' 로, 2, 3에서 2', 3' 으로, 3, 1에

서 3', 1' 로 선의 변화로 인해 원래 삼각형 1, 2, 3에서 삼각형 1', 2', 3' 로 변형된다. C점은 원래 삼각형 1, 2, 3의 중심점을 나타내며 C'점은 변형된 삼각형 1', 2', 3'의 중심점을 나타낸다. 참고로 reflective target point는 반사되는 성질을 가지는 은색의 스티커로 인위적으로 제작한 플라스틱 막대 표면에 부착되며 디지털 카메라에 의해 흙의 변형을 측정하기 위해 사용된다.

그림 3에서의 변형률(ϵ)은 다음의 식 (1)과 같다.

$$\epsilon_{mn} = \frac{mn - m'n'}{mn} \quad (1)$$

여기서, m과 n은 삼각형 모서리 번호를 나타낸다.

모아의 변형률원에서 각각의 선에 대한 변형률 ϵ_{12} , ϵ_{23} , ϵ_{31} 을 계산하기 위해 그림 4에서 보는 것처럼 수평선(reference line)을 기준으로 하는 각도인 α , θ_{12} , θ_{23} , θ_{31} 을 고려해야 한다.

여기서, α 는 수평선(reference line)에서 최대 주변형

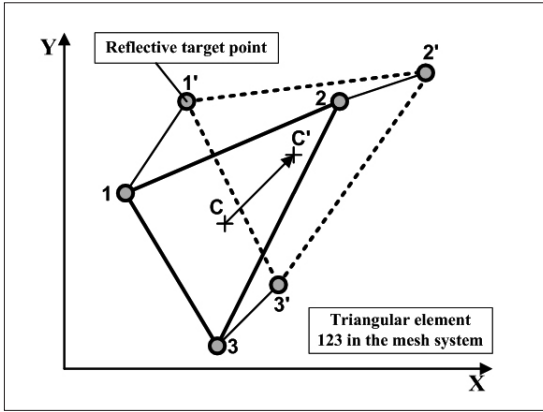


그림 3. 삼각형 요소의 변형 전과 후

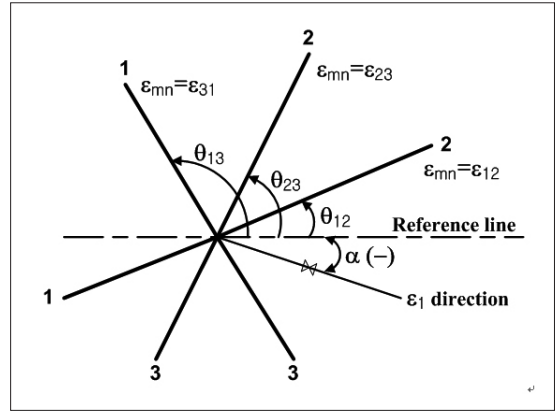


그림 4. 수평선(reference line)을 기준으로 변형률과 각도에 대한 표기

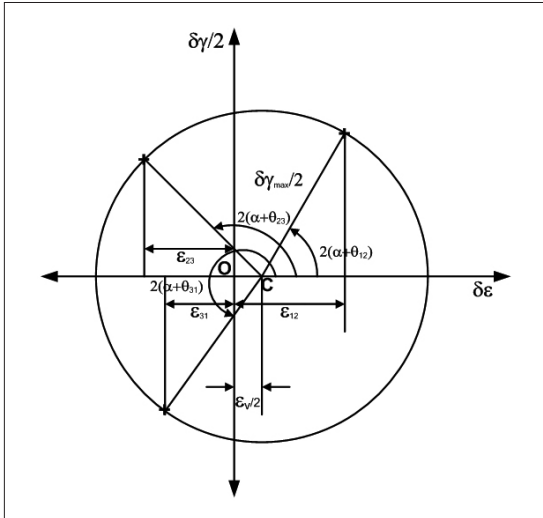


그림 5. 각각의 변수들에 대한 모아의 변형률 원

률(major principal strain, ϵ_1) 방향까지의 각도를 나타낸다. θ_{12} , θ_{23} , θ_{31} 은 기준선에서 삼각형 요소를 이루는 선의 방향을 나타내는 각도이다. 변형률 ϵ_{12} , ϵ_{23} , ϵ_{31} 과 각도 θ_{12} , θ_{23} , θ_{31} 은 원래의 삼각형 1, 2, 3과 변형 후 삼각형인 1', 2', 3' 사이의 모서리 점들의 좌표를 사용하면 수학적으로 계산할 수 있다. 따라서 미지수는 α 이다.

위에서 언급한 다양한 변수들을 모아의 변형률 원으로 나타내면 그림 5와 같다.

그림 5로부터 원의 반지름을 나타내는 최대 전단 변형률인 $\delta\gamma_{\max}/2$ 와 O와 C사이의 거리인 체적변형률 $\epsilon_v/2$ 를 얻을 수 있다. 따라서 변형률 ϵ_{mn} 은 식 (2)와 같다.

$$\epsilon_{mn} = \left(\frac{\epsilon_v}{2} \right) + \frac{\gamma_{\max}}{2} [\cos 2(\theta_{mn} - \alpha)] \quad (2)$$

여기서, m과 n은 12, 23, 31을 나타낸다.

식 (2)에서 ϵ_{12} , ϵ_{23} , ϵ_{31} 과 각도 θ_{12} , θ_{23} , θ_{31} 은 앞에서 언급한 절차를 거쳐 구할 수 있다. 따라서 알 수 없는 변수인 α , ϵ_v , γ_{\max} 는 아래와 같이 결정될 수 있다.

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{A \sin M \sin N + B \sin L \sin K}{A \cos M \sin N + B \cos L \sin K} \right] \quad (3)$$

여기서, $A = \epsilon_{12} - \epsilon_{23}$; $B = \epsilon_{12} - \epsilon_{31}$; $K = \theta_{23} - \theta_{12}$;
 $L = \theta_{12} + \theta_{23}$; $M = \theta_{31} + \theta_{12}$; and $N = \theta_{12} - \theta_{31}$.

$$\gamma_{\max} = \frac{2(\epsilon_{12} - \epsilon_{23})}{[\cos 2(\theta_{12} - \alpha) - \cos 2(\theta_{23} - \alpha)]} \quad (4)$$

$$\epsilon_v = 2 \left[\epsilon_{12} + \frac{\gamma_{\max}}{2} \cos 2(\theta_{12} - \alpha) \right] \quad (5)$$

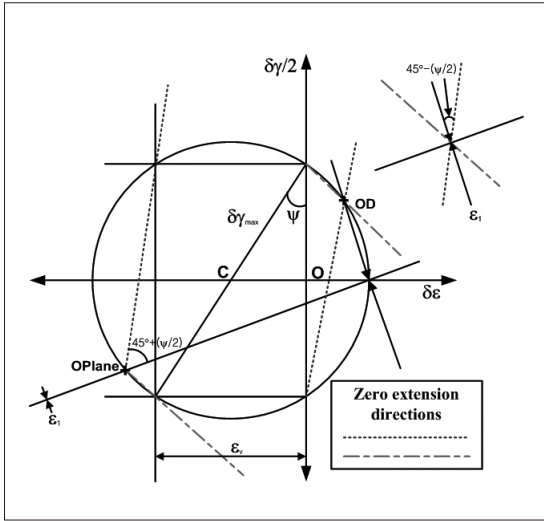


그림 6을 통해 팽창각(ψ)을 다음과 같이 계산할 수 있다.

3. 팽창각의 계산

그림 6에서 보는 바와 같이 $\delta\varepsilon = 0$ 을 나타내는 O점

을 기준으로 왼쪽으로 확장된 선을 그어 만나는 2개의 점에서 극점(OPlane)에 선을 그으면 점선으로 표시한 2개의 Zero extension 선의 방향을 나타낼 수 있다. 이러한 2개의 방향을 다시 $\delta\varepsilon = 0$ 을 나타내는 O점을 기준으로 투영하면 서로 교차되는 점이 나타나는데 이 점이 OD점이다. OD점에서 두 방향은 $90^\circ - \psi$ 로 교차한다. 이 때 최대 주변형률(ε_v)이 작용하는 방향은 교차하는 Zero extension 선 사이의 각도를 양분한다.

$$\psi = \sin^{-1} \left[\frac{\varepsilon_v}{\gamma_{\max}} \right] \quad (6)$$

여기서, 한 가지 주목해야 할 사항은 모어의 변형률 원을 통해 압축이 발생할 때는 음(-)의 팽창각으로 표시되고 반대로 팽창이 발생할 때 양(+)으로 표시된다. 일반적으로 변형률($\delta\varepsilon$)에 대한 모아원의 중심(C)은 팽창보다 압축이 많이 발생하여 O점을 기준으로 전단변형률($\delta\gamma/2$) 축의 왼쪽에 위치해 있다는 사실을 확인할 수 있다.

「지반역학 및 불포화지반기술위원회」 신설 워크숍 개최

한국지반공학회「지반역학 및 불포화지반기술위원회」가 신설되어 아래와 같이 워크숍을 개최하오니 회원여러분들의 많은 참여 바랍니다.

- 일 시 : 2012년 5월 25일 (금) 15:00 ~ 19:00
- 장 소 : 연세대학교 공학관 (추후공지)
- 주 제 : 1. 신설 기술위원회 소개
2. 지반 거동평가 모델링 관련 현황 및 전망
- 참가비 : 정회원 20,000원, 비회원 30,000원, 학생회원 10,000원 (자료집포함)
- 준비위원회
위원장 : 박성완
간 사 : 정영훈, 김영석, 서원석, 조성은, 윤태섭