

회전속도에 따른 고속 스피ن들의 돌출량 예측에 관한 연구

Estimation of Axial Displacement in High-speed Spindle Due to Rotational Speed

배규현¹, 이찬홍², 황주호², 홍성욱^{1,✉}

Gyu-Hyun Bae¹, Chan-Hong Lee², Jooho Hwang², and Seong-Wook Hong^{1,✉}

¹ 금오공과대학교 기전공학과 (Department of Mechatronics, Kumoh National Institute of Technology)

² 한국기계연구원 (Korea Institute of Machines and Materials)

✉ Corresponding author: swhong@kumoh.ac.kr, Tel: 054-478-7344

Manuscript received: 2011.12.5 / Revised: 2012.3.1 / Accepted: 2012.3.5

This paper presents an estimation procedure for axial displacement in spindle equipped with angular contact ball bearings due to rotational speed. High-speed spindle-bearing system experiences axial displacement due to thermal expansion and rotational speed-dependent characteristics of angular contact ball bearings. This paper deals with the axial displacement caused by the rotational speed-dependent effects such as centrifugal force and gyroscopic moments. To this end, a bearing dynamic model is established that includes all the static and dynamic properties of angular contact ball bearing. An analytical formula to calculate the axial displacement based on contact angles between ball and races is derived to discuss the physics regarding the axial displacement in spindle. The proposed dynamic model is compared with a reference and a commercial program. Numerical examples are presented to show the effects of centrifugal force and gyroscopic moment on the axial displacement. The proposed model is also validated with an experimental result.

Key Words: High-speed Spindle (고속 스피ن들), Angular Contact Ball Bearing (각접촉 볼베어링), Axial Displacement (돌출량), Centrifugal Force (원심력), Gyroscopic Moment (자이로모멘트), Rotational Speed (회전속도)

1. 서론

축방향과 경방향의 복합하중을 모두 받게 되는 각접촉 볼베어링(Angular contact ball bearing)은 고속에서 그 특성이 변화되는 것이 잘 알려져 있다.¹⁻³ 특히 회전요소와 내륜이 받게 되는 원심력으로 인해, 베어링 특성에 결정적인 변화를 주게 되는 접촉각이 회전속도에 따라 크게 달라지게 된다.

최근 고속 스피ن들에서, 발열이나 이에 기인한 열팽창 등에 무관하게 일정한 예하중이 가해질 수 있도록 한 쪽 베어링의 지지점이 이동 가능하게 하는 볼부쉬(Ball bush) 또는 슬리브(Sleeve) 방식을 많이 채용하고 있다. Fig. 1은 이와 같은 고속 스피

들을 예시하고 있다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 우측베어링 쌍의 외륜이 볼부쉬로 지지되어 외륜 측에 예하중을 가하게 되면 회전요소를 매개로 내륜에 힘이 전달되고 이 힘은 다시 축을 통해 좌측베어링 쌍의 내륜에 예하중을 주게 된다. 이와 같은 구조로 이루어진 경우 발열이나 원심력 등에 의한 영향이 거의 없이 일정한 예하중을 가할 수 있으나 돌출이 쉽게 발생하게 되는 문제점이 있어 그 원인과 해결에 관심이 모아져 왔다. 특히 공작기계 스피ن들의 경우, 이러한 돌출이 가공정밀도에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있으며 이에 대한 측정 및 보상을 위한 연구가 있어 왔다.^{4,9} 본 논문에서는 각접촉 볼베어링으로 지지된

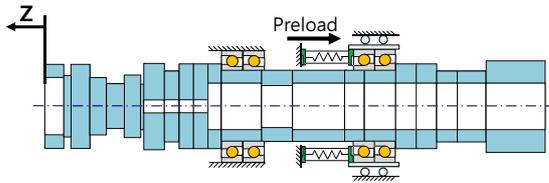


Fig. 1 Spindle model with ball bush type preloading system

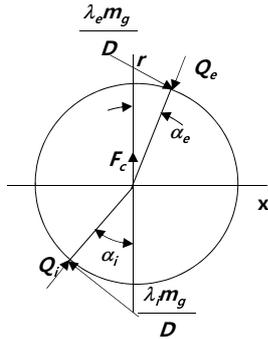


Fig. 2 Free body diagram for a ball subjected to contact forces by inner and outer races, centrifugal force and the friction forces due to gyroscopic moment

고속 스피ن들의 회전속도에 따른 돌출량을 계산하고 그 특성에 대해 고찰하고자 한다.

지난 수십년 동안 생산성과 가공품질 향상을 위해 공작기계용 스피ن들 계의 고속화에 대한 많은 연구가 있어왔다.⁴ 따라서 고속화 과정에서 발생하는 스피ن들에서의 돌출에 대해서도 관심이 모아져 왔으며 그 원인과 보상방법을 중심으로 연구되어 왔다. Moriwaki 등⁵은 회전속도의 변화에 따른 돌출을 관찰하였지만 열팽창 관점에서만 접근하였으며 이에 대한 보상에 대해 논의하였다. 또 다른 연구^{6,7}에서도 돌출에 대해 고찰되었지만 역시 열변형에 의한 변위 및 이에 대한 보상관점에서 논의되었다. 최근 베어링 자체가 갖는 원심력이나 자이로스코프 효과 등에 의한 베어링 특성 변화가 돌출을 발생시킬 수 있다는 점에 대해 참고문헌⁸⁻¹⁰ 등에서 논의를 한 바 있다. 그러나 축방향 하중의 변화에 초점을 맞추므로써 베어링 내부에서의 물리적 현상을 적절히 설명했다고 하기 어렵다. 저자들에 의해서도 상용 베어링 해석 프로그램을 이용한 기본 해석이 수행된 바 있으며 열팽창과 무관하게 베어링의 회전속도에 따라 돌출이 발생됨을 확인하였다.¹¹

본 연구에서는 베어링 볼의 원심력과 자이로스코프 효과 및 내륜의 원심력효과 등 회전속도의 영향을 받는 모든 특성을 고려하여, 불부쉬 방식으로 예하중을 가하는 정예하중(Constant preload) 방식에서의 스피ن들 돌출량 예측 방법을 제시하였다. 또한 이 조건에서 볼과 레이스 사이의 접촉각을 통해 돌출량을 추정하는 방법을 같이 검토하였다.

최근까지 회전유니트의 모델링 및 해석을 통해 시스템 특성을 개선하기 위한 연구가 다각도로 진행되어 왔다.¹² 각접촉 볼베어링 및 이를 채택한 회전축에 대한 특성을 모델링/분석하는 연구 또한 다양하게 진행되어 왔으며, Harris¹에 의해 종합적으로 정리된 바 있다. 본 연구에서는 Harris의 모델을 개량하여 해석적 접근을 용이하게 한 de Mul¹²에 의한 모델에, 내륜의 원심력효과를 포함시켜 앞서 언급한 세가지 회전속도 증속 효과를 모두 고려한 수정된 베어링 모델을 이용하였다. 베어링 모델과 회전체 유한요소 모델을 결합하여 스피ن들의 돌출량 계산이 가능하도록 프로그램을 개발하였으며 이를 적용하여 회전속도에 따른 스피ن들 돌출량의 변화에 대해 분석하였다.

2. 스피ن들-베어링 모델

2.1 베어링 모델^{1,12}

Fig. 2는 임의의 회전요소소에 대해 내외륜에 의한 접촉반력과 원심력, 그리고 자이로모멘트에 의해 접촉점에 가해지는 마찰력을 표현한 자유물체도이다. 그림에서 좌표 x와 r은 각각 축방향과 반경방향의 방향을 의미한다. 또한 Q_i 와 Q_e 는 내륜 및 외륜과의 접촉력이며, α_i 와 α_e 는 각각 내륜 및 외륜과의 접촉각을 의미한다. 볼의 원심력 F_c 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_c = \frac{1}{2} m d_m \omega_c^2 \tag{1}$$

여기서 m, d_m, ω_c 는 각각 볼의 질량, 베어링 피치직경 및 볼의 공전속도를 의미한다. 또한 볼이 받는 자이로모멘트 m_g 는 다음과 같이 표현된다.

$$m_g = \frac{1}{10} m D^2 \omega_c \omega_r \sin \beta \tag{2}$$

여기서 D 는 볼의 직경을, ω_r 과 β 는 각각 볼의 자

로 볼이 이동을 하게 되며 외륜이 고정된 경우, 내륜과 외륜의 접촉각이 동일하게 증가하면서 내륜의 위치가 이동하게 된다(x_p). 베어링이 회전을 하게 되면 Fig. 2 와 같이 볼의 원심력과 자이로모멘트로 인하여 볼의 위치가 Fig. 3(b)와 같이 이동을 하며 내륜과 외륜의 접촉각에 차이가 발생하게 된다. 또한 이로 인해 예하중의 반대방향으로 내륜이 이동하게 되면서 돌출을 발생시키게 된다 (x_c).

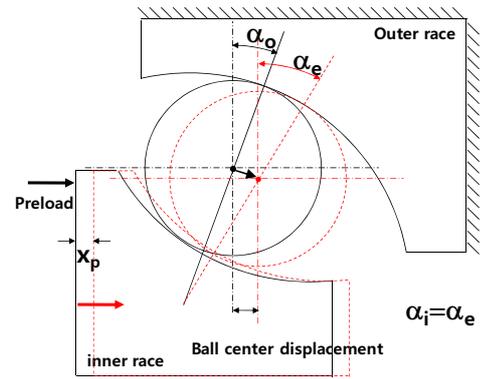
내륜이 회전하고 외륜은 고정되는 경우, 외륜의 곡률반경 중심점을 고정된 기준으로, 볼과 내륜의 이동을 나타내면 Fig. 3(c)와 같다. 그림에서 예하중 인가 시 접촉각이 증가하며 내륜곡률반경 중심이 a 점으로 이동한다고 두고, 회전속도의 증가에 의해 접촉각이 변화하며 내륜 곡률반경 중심이 b 점으로 이동한다고 가정한다. 이 때 Fig. 3(c)로부터 접촉각에 따른 베어링의 축방향 변위 δ_a 를 식(9)와 같이 결정할 수 있다.

$$\delta_a = [(r_e - r)(\sin(\alpha_e) - \sin(\alpha_o)) + (r_i - r)(\sin(\alpha_i) - \sin(\alpha_o))] \quad (9)$$

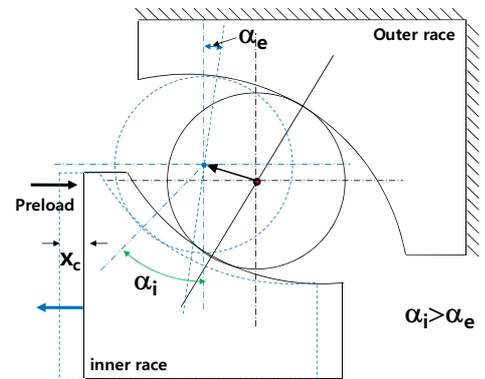
여기서 r_e, r_i 는 각각 외륜, 내륜의 곡률반경을 의미하며, α_o 는 초기 접촉각이다. 한편 초고속 베어링에서는 원심력에 의한 내륜팽창 효과가 커질 수 있는데, 이를 고려하는 방법으로 내륜의 팽창을 내륜 곡률반경 중심의 반경방향 이동으로 근사화하여 계산하는 방법^{14,16} 이 응용되고 있으며 본 연구에서도 이 같은 방식으로 내륜팽창효과를 고려하였다. 내륜팽창에 의해 곡률반경 중심이 반경방향으로 이동하게 되면 Fig. 3(c)에서 볼 수 있는 바와 같이 내륜접촉각이 감소하면서 중심점이 좌측으로 c 점 같이 이동하게 되고 이로 인해 추가적인 축변위를 발생시키게 된다.

7218 베어링에 대해 접촉각과 축변위의 관계를 검증하였다. Fig. 4 의 결과는 회전속도에 의해 발생하는 베어링 축방향 변위 δ_a 에 대해 식(9)의 접촉각을 이용한 결과와 개발프로그램을 통해 얻은 돌출량을 비교한 그림이다. 두 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 따라서 접촉각을 통해 돌출량을 예측할 수 있음을 알 수 있다.

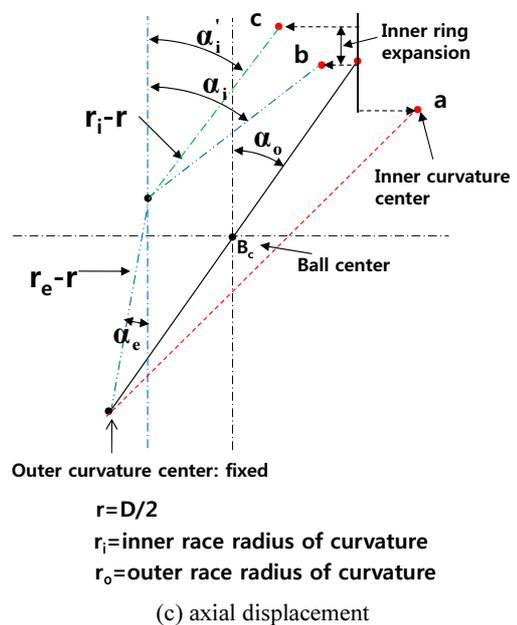
접촉각의 변화 외에도 볼과 내외륜의 접촉변형도 영향을 미칠 수 있으나 전체 변위에 비해 실제 매우 적은 양으로 무시할 수 있다.



(a) Preload



(b) Centrifugal force and gyroscopic moment



Outer curvature center: fixed
 $r = D/2$
 $r_i =$ inner race radius of curvature
 $r_o =$ outer race radius of curvature

(c) axial displacement

Fig. 3 Conceptual diagrams for the relationship between axial displacement and contact angles

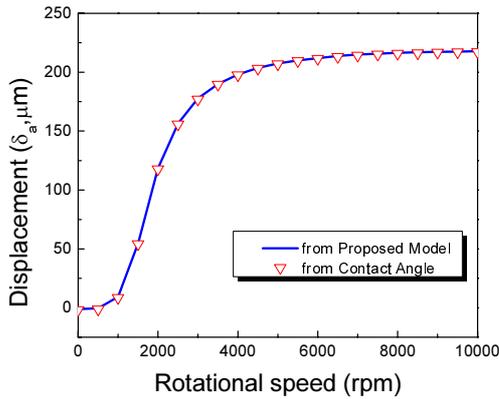


Fig. 4 Comparison of axial displacements computed from the proposed model and equation (9)

4. 스핀들 돌출량 계산

4.1 단순 균일 축 모델

제시된 베어링 모델은 회전축과 결합되어 계산된다. 회전체-베어링 계에서의 계산에 대한 검증은 위해 단순 균일 축에 2 개의 베어링으로 지지된 경우를 고려하였다. Fig. 5 는 고려한 대상 모델이고 베어링은 7008C 로, 초기접촉각은 15° 이며 예하중은 200N 으로 하였다. 먼저 모델의 검증은 위해 제시된 모델을 이용한 계산결과와 상용프로그램의 결과를 비교하였다.

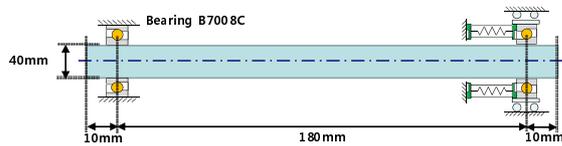


Fig. 5 Simple shaft-bearing model

Fig. 6 은 회전속도를 변화시킬 때 강성의 변화를 상용프로그램의 결과와 비교해서 보여주고 있다. 상용프로그램에서의 결과와 개발된 프로그램에서 고려된 효과에 따른 차이를 비교하기 위해 볼의 원심력만 고려한 경우와 자이로모멘트까지 포함시킨 경우를 같이 비교하였다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 원심력만을 고려한 경우에 비해 자이로모멘트를 포함하면 보다 정확한 강성값을 얻을 수 있다.

한편, Fig. 7 은 정지상태에서의 예하중에 따른 접촉각 α_e , α_f 와 베어링 축방향 변위 δ_a 를 보여주

고 있다. 이 같은 선도는 스핀들을 설치하는 과정에서 예하중량을 결정하는 데 유용하게 활용될 수 있다.

Fig. 8 은 200N 의 예하중이 가해진 상태에서 스핀들을 회전시킬 때의 접촉각 변화를 보여주고 있다. 비교를 위해 베어링 원심력에 의한 내륜의 팽창효과를 고려한 결과를 같이 도시하였다. 베어링 내륜부분도 이미 언급한 바와 같이 원심력에 의해 팽창을 하게 되며 초고속회전 베어링의 경우 영향을 주게 된다.

여기서는 참고문헌 ^{14,16} 에서 도입한 내륜팽창 관련 보정식을 고려하여 내륜팽창효과가 돌출에 미치는 영향을 검토하였다. 회전속도에 따라 내륜 접촉각은 증가하고 외륜접촉각은 감소하는 추세를 보이고 있으며, 자이로모멘트를 고려한 경우 그 변화가 더 크게 나타나고 있다. 내륜팽창 효과는 외륜에서는 크게 나타나지 않으나 내륜접촉각에는 어느 정도의 영향을 미치고 있는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 9 는 볼원심력과 자이로모멘트 및 내륜팽창 효과를 순차적으로 추가하면서 예측된 돌출량을 비교한 것이다. 예하중에 의한 변위는 제외하고 회전속도에 의한 변화만을 도시하였다. 볼의 원심력과 자이로모멘트 및 내륜팽창 효과를 고려함에 따라 축방향 변위가 증가하는 경향을 볼 수 있다. 내륜팽창 효과는 회전속도가 높아지면 그 중요성이 더 커지는 것을 예상할 수 있다.

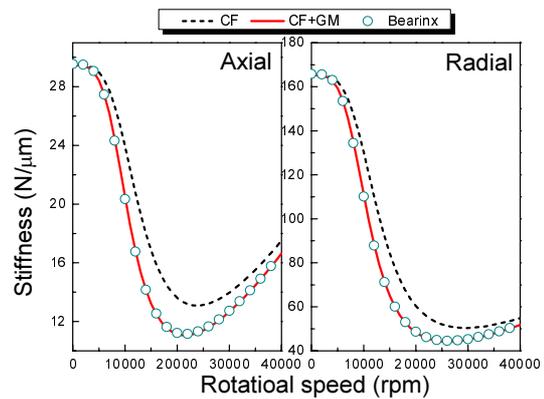


Fig. 6 Comparison of the proposed program and a commercial program for stiffness coefficients as a function of rotational speed (CF: Centrifugal force, GM: Gyroscopic moment)

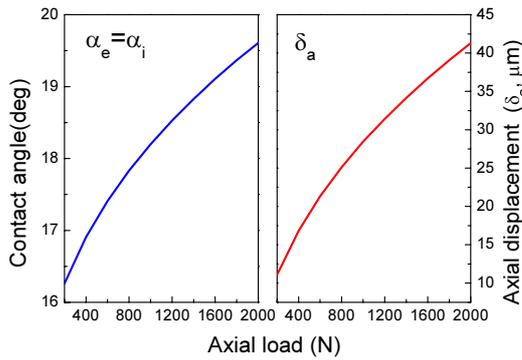


Fig. 7 Contact angle and axial displacement as a function of preload (stationary)

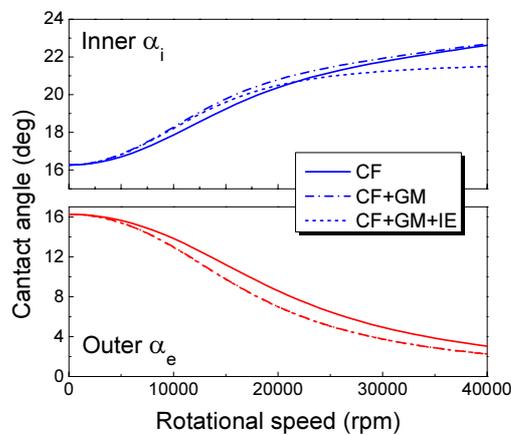


Fig. 8 Contact angles as a function of rotation speed (CF: Centrifugal force, GM: Gyroscopic moment, IE: inner-ring expansion)

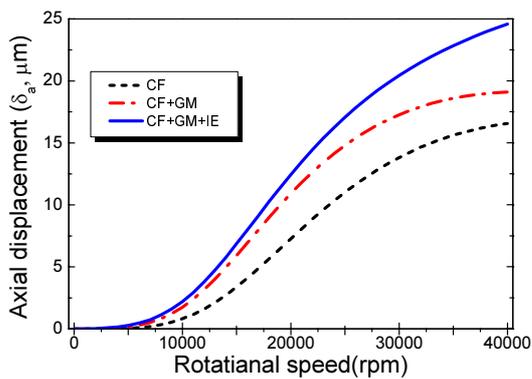


Fig. 9 Comparison of axial displacements due to rotational speed, computed from the proposed model (CF: Centrifugal force, GM: Gyroscopic moment, IE: inner-ring expansion)

Fig. 10 은 예하중 변화 및 회전속도에 따른 베어링 강성 변화를 보여주고 있다. 여기서는 내륜 팽창을 제외하고 비교한 것으로서 예하중이 변화하여도 상용프로그램의 결과와 잘 일치하고 있다. 상용프로그램의 결과가 내륜팽창효과를 고려하지 않은 경우와 잘 일치하고 있는 결과로부터 상용프로그램에서는 내륜팽창 효과를 고려하고 있지 않은 것으로 추정된다.

Fig. 11 는 예하중 및 회전속도에 따른 돌출량 변화를 보여주고 있다. 여기에서도 내륜팽창 효과를 제외한 결과이다. 초기 예하중에 의해 음의 변위가 발생되며 회전속도의 증가에 따라 돌출이 발생

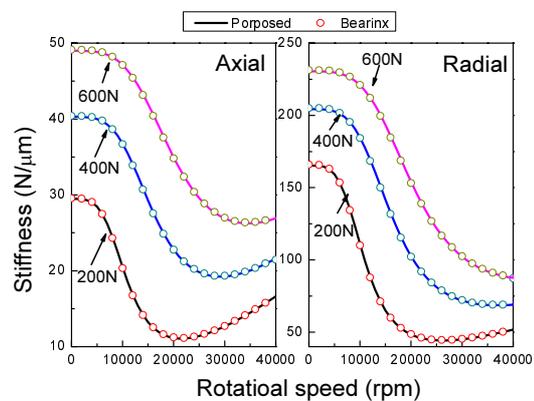


Fig. 10 Stiffness coefficients as a function of rotational speed: computed from the proposed model and a commercial code with the axial preload changed

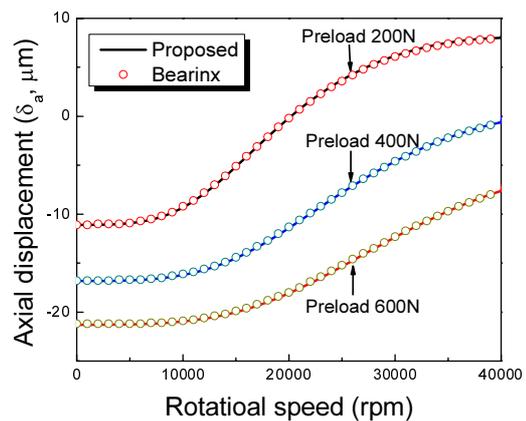


Fig. 11 Axial displacements as a function of rotational speed: computed from the proposed model and a commercial code with the axial preload changed

되는 것을 볼 수 있다. 돌출량 예측에서도 상용프로그램의 결과와 잘 일치하고 있으며 40,000 rpm 까지 15~20 μm 정도의 돌출이 발생하고 있음을 보여주고 있다. 특히 회전속도에 의한 돌출은 예하중이 낮을수록 낮은 속도에서 발생하기 시작하며 속도가 높아지면서 특정값에 수렴하는 양상을 보이게 된다.

4.2 스피들 모델

Fig. 1 에 예시하였던 스피들 모델에서 예하중을 변화시키며 회전속도에 따른 축방향 변위를 살펴 보았다. 축방향 변위에 영향을 미치는 원심력과 자이로모멘트의 효과를 비교해 보기 위해 동일한 조건에서 강철(Steel)을 사용한 경우와 세라믹(Ceramic) 볼을 사용한 베어링에서의 축변위를 동시에 비교하였다. 세라믹 볼은 철에 비하여 강성이 높으며 가벼운 재질로 구성되어 있어 고속회전체에 널리 사용되고 있다.

계산 결과는 Fig. 12 와 같다. 전체적으로 예하중에 따라 초기변위가 -방향으로 생겼다가 속도가 증가함에 따라 점차 +방향으로 돌출이 발생하는 현상을 확인할 수 있다. 이는 참고문헌⁹에서 실험적으로 관측한 결과와 동일한 양상이다.

또한 세라믹 볼 베어링의 축 변위가 초기예하중에 의한 변화나 회전속도에 따른 변화 모두 상대적으로 작은 것을 확인할 수 있다. 이것은 세라믹 볼 요소의 강성이 크고, 관성이 작아 원심력 및 자이로모멘트가 적게 나타나고 있기 때문이다.

최대 돌출량은 예하중 및 볼의 재질에 따라 달라지게 되며 20,000 rpm 까지 약 20~30 μm 정도로 나타나고 있다. 초기 예하중이 커질수록 회전속도에 따른 돌출량이 약간씩 감소하는 경향을 보이게 된다. 접촉각 관점에서도 예하중이 커지면 변화가 제한되는 효과가 있게 되므로 이 같은 특성을 뒷받침하게 된다.

한편 축 자체 변형에 의한 효과를 확인하기 위하여 베어링의 변위와 축 끝단의 변위를 비교하였으나 동일한 값을 얻을 수 있었다. 따라서 축 자체의 축방향 탄성변형은 고려할 필요가 없을 것으로 생각된다. 또한, 베어링의 설치 위치에 따른 변화를 확인하기 위해 베어링 설치 위치를 변화시키며 계산을 수행하였다. 그러나 설치위치와 상관없이 동일한 결과를 볼 수 있었다. 베어링 축방향 변위는 예하중 방법이나 크기에 주된 영향을 받게 되며 베어링 설치 위치에는 큰 영향을 받지 않는

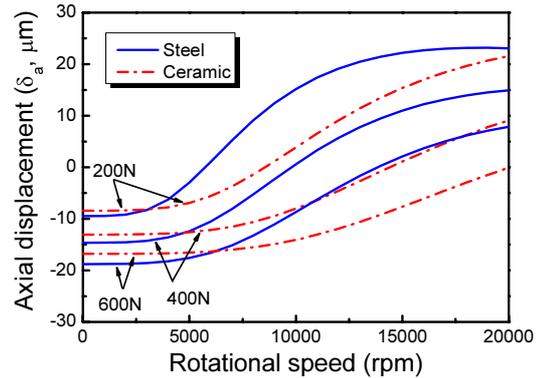


Fig. 12 Spindle axial displacement as a function of rotational speed when steel ball and ceramic ball are implemented

것으로 판단된다. 그러나 베어링에 반경방향 하중이 가해지게 되면 축방향 특성도 영향을 받을 수 있으므로 이에 대한 보완적 연구가 필요할 것으로 판단된다. 또한 실제 스피들에서는 발열에 의한 열팽창이 추가적인 돌출을 일으키게 되는데 이는 스피들의 조건에 영향을 받게 된다.

4.3 실험결과 비교

제안된 방법의 실험적 검토를 위해 참고문헌⁹에 제시한 실험결과와 계산결과를 비교하였다. 실험에 사용되었던 베어링은 NSK 50BNR19XE 이다. 초기접촉각은 18° 이며 내경과 외경은 각각 50, 72mm 인 스피들용이며, 세라믹 볼을 사용하고 있다. 베어링의 내부 정보에 대한 검증을 위해 NSK에서 제공하는 축방향 강성데이터와 개발된 프로그램을 이용한 결과를 비교하였다. Fig. 13 은 축방향 강성을 비교한 것이며 결과에서 확인할 수 있는 바와 같이 정적조건에서 특성이 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

참고문헌⁹에서는 슬리브(sleeve)방식 예하중이 가능한 스피들에서 정예하중을 준 상태로 슬리브에서의 이동량과 축선단에서의 축방향 이동량을 측정하였으며, 궁극적으로 축선단에서의 돌출량을 추정하였다. 본 연구에서는 참고문헌의 최종결과에 해당하는 실험에서 얻어진 축선단의 돌출량을, 제안된 프로그램에서 계산된 결과와 비교하였다. Fig. 14 는 실험결과⁹와 본 연구에서 개발된 프로그램을 통해 계산된 결과이다. 볼의 원심력과 자이로모멘트만을 고려한 경우에는 실험치와 다소의 차이를 보이고 있다. 그러나 내륜의 팽창까지 고

려한 모델은 실험결과에 보다 근접한 것을 볼 수 있다. 세라믹 볼을 사용하는 경우 볼 자체의 회전 속도 효과는 상대적으로 감소하게 되나 내륜팽창 효과는 그대로 유지되어 그 효과가 커진 것으로 추정된다. 계산결과가 실험결과에 추세적으로 잘 일치하고 있어 개발된 모델을 이용하여 회전속도에 따른 돌출량의 예측이 가능함을 확인할 수 있다.

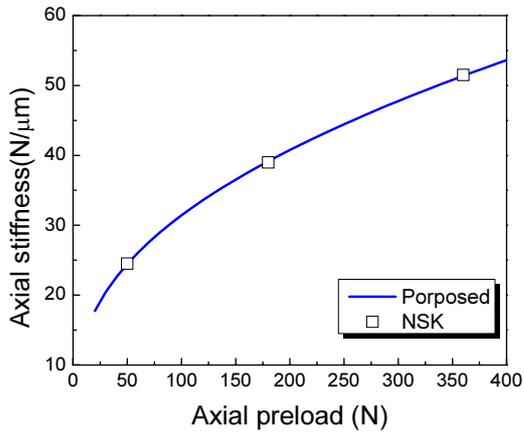


Fig. 13 Comparison of simulated result and reference data for axial stiffness of NSK 50BNR19XE bearing

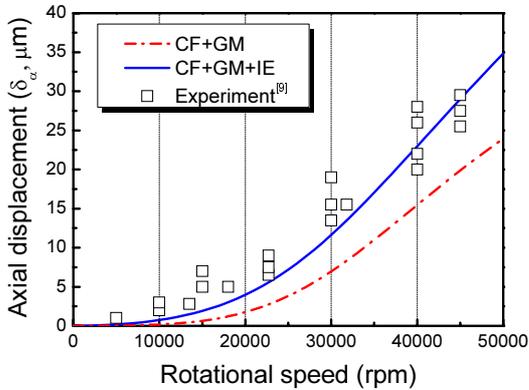


Fig. 14 Spindle axial displacement as a function of rotational speed when steel ball and ceramic ball are implemented

5. 결론

본 논문에서는 각접촉 볼 베어링으로 지지된 고속 스핀들의 회전속도에 따른 돌출량에 대하여 살펴보았다. 이를 위해 베어링의 동적 모델을 구

성하였으며 돌출량 예측에 사용하였다. 회전속도에 따른 돌출량에 대해 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 제시된 모델의 타당성을 확인하기 위해 기존문헌에서 제시된 자료 및 상용프로그램 결과와 비교하였으며 사용된 모델이 기존자료들과 잘 일치함을 확인하였다.

2) 회전속도에 따른 돌출량에 대한 시뮬레이션을 통해 볼에 미치는 원심력과 자이로모멘트가 큰 영향을 미치게 됨을 확인하였다.

3) 베어링 접촉각 변화와의 관련성을 분석하여 회전속도에 따른 돌출량은 베어링 접촉각 변화에 따른 기하학적 연산으로 예측할 수 있음을 확인하였다.

4) 정예하중 방식의 스핀들에서 회전속도에 의한 돌출량은, 다른 하중이 가해지지 않는 한 회전체의 형상이나 베어링 설치위치 등에 영향을 받지 않고 베어링에 가해지는 축방향 예하중 및 볼의 원심력, 자이로모멘트 및 내륜팽창에만 의존한다.

5) 볼부쉬나 스리브 방식의 정예하중이 가해질 때 회전속도에 따른 스핀들 돌출량은 베어링 자체의 회전속도에 의한 축방향 변위와 같다.

6) 회전에 의한 돌출을 개선하기 위해 베어링의 원심력과 자이로모멘트를 줄이는 방식이 활용 가능하며, 그 방법의 하나로 세라믹 볼을 회전요소로 이용하게 되면 크게 개선할 수 있다.

후 기

본 연구는 기계장비 정밀도 시뮬레이션 플랫폼 기술 개발 사업의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- Harris, T. A., "Rolling Bearing Analysis," John Wiley & Sons, 1990.
- Hagi, G. D. and Gafitanu, M. D., "Dynamic characteristics of high speed angular contact ball bearings," Wear, Vol. 211, No. 1, pp. 22-29, 1997.
- Hong, S. W. and Shin, Y. C., "Dynamic analysis of rotor systems with angular contact ball bearings subject to axial and radial loads," Proceeding of the 1st International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery, Paper No. 4009, 2001.

4. Abele, E., Altintas, Y., and Brecher, C., "Machine tool spindle units," *CIRP Annals: Manufacturing Technology*, Vol. 59, No. 2, pp. 781-802, 2010.
5. Senda, H., Sato, R., and Moriwaki, T., "Estimation of thermal displacement under varying rotational condition of spindle," *Transaction of the JSME*, Vol. 70, No. 698, pp. 2813-2818, 2005.
6. Chen, J. S. and Hsu, W. Y., "Characterizations and models for the thermal growth of a motorized high speed spindle," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 43, No. 11, pp. 1163-1170, 2003.
7. Jedrzejewski, J. and Modrzycki, W., "Compensation of thermal displacements of high-speed precision machine tools," *Journal of Machine Engineering*, Vol. 7, No. 1, pp. 108-114, 2007.
8. Zverv, I., Pyoun, Y.-S., Lee, K.-B., Kim, J.-D., Jo, I., and Combs, A., "An elastic deformation model of high speed spindles built into ball bearings," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 170, No. 3, pp. 570-578, 2005.
9. Jedrzejewski, J. and Kwasnya, W., "Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles," *Journal of Manufacturing Technology*, Vol. 59, No. 1, pp. 377-382, 2010.
10. Chen, J.-S. and Hwang, Y.-W., "Centrifugal force induced dynamics of a motorized high-speed spindle," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 30, No. 1-2, pp. 10-19, 2006.
11. Bae, G. H., Lee, C. H., Hwang, J. H., and Hong, S. W., "Evaluation of axial displacement in high-speed spindle supported by angular contact ball bearings," *Proc. of KSPE Autumn Conference*, pp. 299-300, 2011.
12. de Mul, J. M., Vree, J. M., and Maas, D. A., "Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction-part I: general theory and application to ball bearings," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 111, No. 1, pp. 142-148, 1989.
13. Hwang, J., Shim, J. Y., Hong, S. W., and Lee, D. W., "Accuracy simulation of precision rotary motion systems," *Journal of the KSPE*, Vol. 26, No. 3, pp. 285-291, 2011.
14. Jorgensen, B. R. and Shin, Y. C., "Dynamics of spindle-bearing systems at high speeds including cutting loads effects," *ASME Journal of Manufacturing Science and Technology*, Vol. 120, No. 2, pp. 387-394, 1998.
15. Lee, C. W. and Hong, S. W., "Asynchronous harmonic response analysis of rotor-bearing systems," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 2, No. 2, pp. 51-65, 1990.
16. Jorgensen, B. R., "Robust modeling of high speed spindle-bearing dynamics under operating conditions," Ph.D. Dissertation, School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1996.