

논문 2012-49SC-3-4

출력지연을 갖는 이산시간 비선형 시스템의 관측기 설계

(Observer Design for Discrete-Time Nonlinear Systems with Output Delay)

이 성 렬*

(Sungryul Lee)

요 약

본 논문에서는 출력에 시간지연이 존재하는 이산 시간 비선형 시스템에 대한 상태관측기 설계방법을 제안한다. 비선형항에 대한 Lipschitz 조건을 가정하고 비선형항을 하나의 상태변수처럼 고려함으로써 비선형 이산시간 오차동역학방정식의 안정도 문제가 시간지연을 갖는 선형방정식의 안정도 문제로 변환될 수 있음을 보인다. 또한, 시간 지연 값에 의존적인 충분조건을 선형행렬 부등식을 이용하여 제시한다. 마지막으로 제안한 결과의 유효성을 증명하기 위하여 모의실험 예제를 제공한다.

Abstract

This paper presents the observer design method for discrete-time nonlinear systems with delayed output. It is shown that by considering a nonlinear term of error dynamics as an additional state variable, the discrete-time nonlinear error dynamics with time delay can be transformed into the discrete-time linear one with time delay. Sufficient conditions for existence of state observer are characterized by linear matrix inequalities. Finally, an illustrative example is given in order to show the effectiveness of our design method.

Keywords : output delay, nonlinear systems, linear matrix inequalities

I. 서 론

시간 지연 시스템은 최근에 가장 많이 연구되고 있는 분야 중의 하나이다. 시간 지연은 시스템 고유의 특성으로 인하여 발생하기도 하지만 시스템과 제어기가 통신 네트워크로 연결된 상황에서 필연적으로 발생한다. 따라서 시간지연은 시스템 방정식이나 시스템의 입력과 출력에서 모두 나타날 수 있다. 이러한 시간지연은 시스템을 불안정하게 만드는 요인이 되므로 이를 보상하는 기술이 매우 중요하다.

시간 지연 시스템의 안정화에 관한 대부분의 연구는

Lyapunov-Krasovskii 정리와 Razumikhin 정리에 기반한다.^[1] 최근에는 기존의 상태피드백 제어기 설계문제를 불확실성이 존재하는 시간지연 시스템의 강인제어기 설계 또는 출력 피드백 제어기 설계문제로 확장하는 연구가 활발히 진행되고 있다.^[2-6]

한편, 안정화 문제에 대한 연구와 더불어 시간지연 시스템에 대한 상태 관측기 설계문제가 활발히 연구되고 있다. 특히, 최근에는 출력지연이 존재하는 비선형 시스템에 대한 관측기설계 문제가 많은 관심을 받고 있다. [7]에서는 지연된 출력을 갖는 비선형 시스템에 대하여 예측기반의 체인형 관측기를 제안하였고 Gronwall 정리를 이용하여 지수함수적인 수렴성을 증명하였다. [8]에서는 센서지연이 존재하는 선형시스템을 지연에 무관한 편미분방정식으로 변환하고 이에 기반하여 관측기를 설계하고 백스테핑 방법을 이용하여 안정

* 정회원-교신저자, 군산대학교 제어로봇공학과
(Dept. of Control & Robotics Eng.,
Kunsan National University)

접수일자: 2012년3월7일, 수정완료일: 2012년5월1일

도를 증명하였다. [9]에서는 출력에 시변지연을 갖는 비선형시스템에 대하여 상태변수에 시간지연을 포함하는 관측기형태를 제안하고 Lyapunov-Razumikhin 함수를 이용하여 안정도를 증명하였다. [10]에서는 출력지연을 갖는 비선형 시스템에 대하여 시간지연을 갖는 체인형 고이득 관측기를 제안하였고 Lyapunov-Krasovskii functional을 이용하여 안정도를 증명하였다.

본 논문에서는 출력에 시간 지연이 존재하는 이산시간 비선형시스템에 대한 상태 관측기를 제안한다. 오차동역학 방정식에 나타나는 비선형항을 하나의 상태변수처럼 취급함으로써 기존의 시간지연 선형시스템의 안정도 해석방법을 그대로 적용할 수 있음을 보인다. 또한, 기존 연구와는 다르게 관측기의 존재조건을 선형행렬부등식을 이용하여 제공한다.

II. 문제 정의

본 논문에서는 다음과 같은 지연된 출력을 갖는 이산시간 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Phi(x(k), u(k)) \\ y(k) &= Cx(k-d) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x(k) \in R^n, u(k) \in R^m, y(k) \in R^p$ 는 각각 시스템의 상태벡터, 시스템의 입력, 시스템의 출력을 나타낸다. A, B, C 는 각각 적당한 크기를 갖는 상수 행렬이다. $\Phi: R^n \times R^m \rightarrow R^q$ 는 비선형벡터함수이고 $d > 0$ 는 알려진 시간 지연값이다.

식 (1)에 대하여 다음과 같은 상태 관측기를 제안한다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + B\Phi(\hat{x}(k), u(k)) \\ &\quad + K(y(k) - C\hat{x}(k-d)) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, 행렬 K 은 관측기의 이득행렬이다. 식 (1)은 출력에 시간지연이 존재하므로 기존의 설계방법으로는 안정도를 보장할 수 없다. 다음에서 본 논문의 주요결과를 증명하는 데 필요한 가정을 소개한다.

가정1: 모든 $x_1, x_2 \in R^n$ 에 대하여 다음 식을 만족시키는 상수 $\gamma > 0$ 가 항상 존재한다.

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad (3)$$

식 (3)을 Lipschitz 조건이라 부르고 γ 를 Lipschitz 상수라고 부른다. 대부분의 비선형항들은 적어도 부분

적으로는 가정 1을 만족시킨다.

본 논문의 목표는 시스템 (1)이 가정 1을 만족시킬 때 식(2)가 시스템 (1)의 상태 관측기가 될 충분조건을 유도하는 것이다.

III. 주요 결과

본 장에서는 식 (2)가 시스템 (1)의 관측기가 될 충분조건을 유도하겠다.

정리1: 시스템 (1)이 가정1을 만족시킨다고 가정하자. 만약, 주어진 상수 $\beta > 0, \gamma > 0, d > 0$ 에 대하여 식 (4)를 만족시키는 행렬 $\hat{K}, P = P^T > 0, S = S^T > 0, U_i, i = 1, 2, 3$ 가 존재한다면 식 (2)는 식 (1)의 상태 관측기이다. 식 (2)의 이득행렬은 $K = P^{-1}\hat{K}$ 이다.

$$\begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & U \\ * & -P & 0 & 0 \\ * & * & -d^{-1}P & 0 \\ * & * & * & -d^{-1}P \end{pmatrix} < 0 \quad (4)$$

위 식에서 각 행렬은 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \begin{pmatrix} -P + S + \beta\gamma^2 I + U_1 + U_1^T & -U_1 + U_2^T & U_3^T \\ * & -S - U_2 - U_2^T - U_3^T \\ * & * & -\beta I \end{pmatrix} \\ \Theta_{12} &= \begin{pmatrix} A^T P \\ -C^T \hat{K}^T \\ B^T P \end{pmatrix} \\ \Theta_{13} &= \begin{pmatrix} (A - I)^T P \\ -C^T \hat{K}^T \\ B^T P \end{pmatrix} \\ U &= \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

증명: 추정오차를 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ 으로 정의하자. 식 (1), (2)을 고려하면 오차동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(k+1) &= Ae(k) + B\Phi(x(k), u(k)) \\ &\quad - B\Phi(\hat{x}(k), u(k)) - KCe(k-d) \\ &= Ae(k) - KCe(k-d) + B\Delta\Phi \end{aligned} \quad (6)$$

위 식에서 $\Delta\Phi = \Phi(x(k), u(k)) - \Phi(\hat{x}(k), u(k))$ 이다.

식 (6)의 안정도 해석을 위하여 다음과 같은 Lyapunov-Krasovskii functional을 고려하자.

$$\begin{aligned}
V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) \\
V_1(k) &= e^T(k)Pe(k) \\
V_2(k) &= \sum_{i=k-d}^{k-1} e^T(i)Se(i) \\
V_3(k) &= \sum_{i=-d}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \eta^T(m)Z\eta(m) \\
\eta(m) &= e(m+1) - e(m)
\end{aligned} \tag{7}$$

위 식에서 P, S, Z 는 양한정 대칭행렬이다. 식 (7)의 forward difference를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\
&= \phi^T(k)[\Sigma_1^T P \Sigma_1 - \Sigma_2^T P \Sigma_2] \phi(k) \\
&\quad + e^T(k)Se(k) - e^T(k-d)Se(k-d) \\
&\quad + d\eta^T(k)Z\eta(k) - \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j)Z\eta(j)
\end{aligned} \tag{8}$$

위 식에서 각 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi(k) &= \begin{pmatrix} e^T(k) & e^T(k-d) & \Delta\Phi^T \end{pmatrix} \\
\Sigma_1 &= \begin{pmatrix} A & -KC & B \end{pmatrix} \\
\Sigma_2 &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

식 (3)의 양변을 제곱하면 모든 $\beta > 0$ 에 대하여 다음식이 성립한다.

$$\beta\gamma^2 e^T(k)e(k) - \beta\Delta\Phi^T \Delta\Phi \geq 0 \tag{10}$$

식 (8)의 우변에 식 (10)을 더하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &\leq \phi^T(k)[\Sigma_1^T P \Sigma_1 - \Sigma_2^T P \Sigma_2] \phi(k) \\
&\quad + \beta\gamma^2 e^T(k)e(k) - \beta\Delta\Phi^T \Delta\Phi \\
&\quad + e^T(k)Se(k) - e^T(k-d)Se(k-d) \\
&\quad + d\eta^T(k)Z\eta(k) - \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j)Z\eta(j) \\
&= \phi^T(k)\Sigma\phi(k) \\
&\quad + d\eta^T(k)Z\eta(k) - \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j)Z\eta(j)
\end{aligned} \tag{11}$$

위 식에서 각 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \text{diag}(S + \beta\gamma^2 I, -S, -\beta I) \\
\Sigma &= \Sigma_1^T P \Sigma_1 - \Sigma_2^T P \Sigma_2 + \Sigma_3
\end{aligned} \tag{12}$$

여기서 다음과 같은 함수 Ψ 를 정의하자.

$$\Psi = 2\phi^T(k)U[e(k) - e(k-d) - \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta(j)] \tag{13}$$

위 식에서 행렬 U 는 설계변수로서 (5)에서 주어졌다.

식 (13)로부터 $\Psi=0$ 임을 쉽게 알 수 있으므로 식 (11)

의 우변에 Ψ 를 더해도 식은 변화 없다.

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &\leq \phi^T(k)\Sigma\phi(k) \\
&\quad + d\eta^T(k)Z\eta(k) - \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j)Z\eta(j) \\
&\quad + 2\phi^T(k)U[e(k) - e(k-d) - \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta(j)]
\end{aligned} \tag{14}$$

또한, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&- \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j)Z\eta(j) - 2\phi^T(k)U \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta(j) \\
&= - \sum_{j=k-d}^{k-1} [\phi^T(k)U + \eta^T(j)Z]Z^{-1}[\phi^T(k)U + \eta^T(j)Z]^T \\
&\quad + d[\phi^T(k)U]Z^{-1}[\phi^T(k)U]^T
\end{aligned} \tag{15}$$

$Z > 0$ 이므로 다음이 성립한다.

$$- \sum_{j=k-d}^{k-1} [\phi^T(k)U + \eta^T(j)Z]Z^{-1}[\phi^T(k)U + \eta^T(j)Z]^T < 0 \tag{16}$$

식 (15),(16)을 고려하면 식 (14)는 다음처럼 정리된다.

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &< \phi^T(k)\Sigma\phi(k) \\
&\quad + d\eta^T(k)Z\eta(k) \\
&\quad + \phi^T(k)\Gamma\phi(k) \\
&\quad + d\phi^T(k)UZ^{-1}U^T\phi(k) \\
&= \phi^T(k)\Theta\phi(k)
\end{aligned} \tag{17}$$

위 식에서 행렬 $\Theta, \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 는 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned}
\Theta &= \Sigma + d\Gamma_1^T Z \Gamma_1 + \Gamma + dUZ^{-1}U^T \\
&= \Sigma_1^T P \Sigma_1 - \Sigma_2^T P \Sigma_2 + \Sigma_3 + d\Gamma_1^T Z \Gamma_1 + \Gamma + dUZ^{-1}U^T \\
\Gamma_1 &= \begin{pmatrix} A - I & -KC & B \end{pmatrix} \\
\Gamma_2 &= \begin{pmatrix} U & -U & 0 \end{pmatrix} \\
\Gamma &= \Gamma_2 + \Gamma_2^T
\end{aligned} \tag{18}$$

Schur's Complement를 이용하여 $\Theta < 0$ 은 다음과 같은 선형행렬부등식으로 변환할 수 있다.^[11]

$$\begin{pmatrix} -\Sigma_2^T P \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Gamma & \Sigma_1^T P & \Gamma_1^T Z & U \\ * & -P & 0 & 0 \\ * & * & -d^{-1}Z & 0 \\ * & * & * & -d^{-1}Z \end{pmatrix} < 0 \tag{19}$$

식 (19)에서 $P = Z, PK = \hat{K}$ 으로 정의하면 식 (19)는 식 (4)과 같다. 따라서 식 (4)가 만족하면 식 (6)은 점근적으로 안정하다. ■

IV. 모의 실험

이번 장에서는 본 논문에서 제안한 설계 방법의 유효성을 증명하기 위하여 모의 실험 결과를 제시한다. 모의 실험을 위하여 다음과 같은 행렬과 시간지연을 갖는 시스템 (1)을 고려해보자

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.98 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.95 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ 0) \quad (20)$$

$$\Phi(x(k), u(k)) = 0.5\sin(x_1(k)) + u(k), d = 10$$

$$x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k))^T \in R^3$$

시스템 (20)은 가정1을 만족시키고 $\gamma = 0.5$ 이다. $\beta = 0.1$ 으로 놓고 선형행렬부등식 (4)를 풀면 해와 이득행렬 K 는 다음과 같다.

$$P = \begin{pmatrix} 8.06 & -8.91 & 0.10 \\ -8.91 & 17.35 & -1.07 \\ 0.10 & -1.07 & 0.72 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.18 & -0.25 & -0.002 \\ -0.25 & 0.52 & -0.04 \\ -0.002 & -0.04 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} -0.82 & 0.90 & -0.01 \\ 0.92 & -1.78 & 0.11 \\ -0.01 & 0.11 & -0.07 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.82 & -0.90 & 0.01 \\ -0.90 & 1.75 & -0.11 \\ 0.002 & -0.10 & 0.07 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = (0.005 \ -0.009 \ -0.000)$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 0.282 \\ -0.080 \\ -0.005 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.074 \\ 0.036 \\ 0.036 \end{pmatrix} \quad (21)$$

시스템의 입력과 초기값을 다음처럼 설정하고 시스

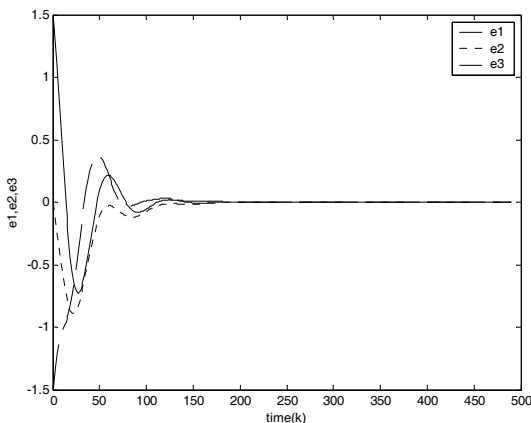


그림 1. 관측기의 추정오차 $e(k)$ 의 그래프
Fig. 1. The graph of estimation error $e(k)$.

템 (1)과 관측기 (2)에 대하여 모의실험을 수행하였다.

$$u(k) = 0.5\sin(0.01k)$$

$$x(k) = (1.5 \ 0 \ -1.5)^T$$

$$\hat{x}(k) = (0 \ 0 \ 0)^T$$

$$-d \leq k \leq 0 \quad (22)$$

그림 1은 추정오차의 그래프를 나타낸다. 모두 점근적으로 안정함을 볼 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 출력지연이 존재하는 이산시간 비선형시스템의 관측기 설계방법을 제안하였다. 기존의 연구와는 다르게 선형행렬부등식을 이용하여 관측기가 존재할 충분조건을 제시하였다. 또한, 모의 실험을 통하여 제안한 설계방법의 유효성을 입증하였다.

참고 문헌

- [1] K. Gu, V. Kharitonov, and J. Chen, "Stability of Time-Delay Systems", Birkhauser, Boston, 2003
- [2] Y. He, M. Wu, J. She and G. Liu, "Parameter - Dependent Lyapunov Functional for Stability of Time-Delay Systems With Polytopic-type Uncertainties," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 49, no. 5, pp. 828-832, May, 2004.
- [3] Y. He, Q.Wang, L.Xie, and C.Lin, "Futher Improvement of Free-Weighting Matrices Technique for Systems With Time-Varying Delay," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 52, no. 2, pp. 293-299, Feb., 2007.
- [4] H.Gao and T.Chen, "New Results on Stability of Discrete-Time Systems With Time-Varying State Delay," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 52, no. 2, pp. 328-334, Feb., 2007.
- [5] H.Gao, J.Lam, C.Wang, and Y. Wang, "Delay-dependent output-feedback stabilization of discrete-time systems with time-varying state delay," IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 151, no. 6, pp. 691-698, Nov., 2004
- [6] Y.He, M.Wu, G.Liu, and J. She, "Output Feedback Stabilization for a Discrete-Time Systems With Time-Varying Delay," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, no. 10, pp. 2372-2377, Nov., 2008.
- [7] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe, "A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output," IEEE Trans.

- Autom. Control, vol. 47, no. 1, pp. 96 - 101, Jan. 2002.
- [8] M. Krstic, and A. Smyshlyaev, "Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays", Systems & Control Letters, vol. 57, 2008
- [9] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes, "An observer for a class of nonlinear systems with time varying observation delay", Systems & Control Letters, vol. 59, 2010
- [10] T. Ahmed-Ali, E. Cherrier, and F. Lamnabhi-Lagarrigue, "Cascade High Gain Predictors for a Class of Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 57, no. 1, Jan. 2012
- [11] S. P. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnam, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", Philadelphia, PA: SIAM, vol. 15, 1994.

 저 자 소 개



이 성 렬(정회원)

2003년 연세대학교 전기전자
공학과 박사졸업.

2003년~2006년 삼성전자
책임연구원

2007년~현재 군산대학교
제어로봇공학과 조교수

<주관심분야 : 비선형제어 및 응용>