

# 중복 분해 기법을 이용한 인공위성 편대 비행의 분산제어

## Decentralized Control of Multiple Satellites Formation Flying Based on the Overlapping Decomposition Technique

이 호 재\* · 김 도 완†  
(Ho Jae Lee · Do Wan Kim)

**Abstract** - This paper presents a decentralized controller design for formation flying of multiple satellites based on the overlapping decomposition technique. Each satellite is assumed to avail only the information of its own and in front of itself, which restricts the structure of a controller gain matrix to an overlapped form. The concerned large-scale system is expanded using the overlapping decomposition technique. Design condition is represented in terms of linear matrix inequalities with small-scale systems in a decentralized form, based on the expanded system. The resulting controller is contracted to the original overlapped form so as to close the original system. A numerical simulation shows the effectiveness of the proposed technique.

**Key Words** : Multiple satellites formation flying, Large-scale systems, Overlapping decomposition technique, Stability

### 1. 서 론

위성의 안정적인 궤도 비행의 핵심은 위성체가 미리 계획된 목표 궤도의 비행이다. 그러나 우주공간은 태풍, 자기장, 지구 중력등에 의하여 매우 불확실한 환경이어서, 단일 위성으로는 우주임무의 신뢰성 확보가 쉽지 않다. 이러한 난점은 여러 대의 위성이 하나의 편대를 이루어 비슷한 궤도를 비행하며 동일 임무를 수행하는 편대 비행(formation flying)으로 해결가능하다 [1, 2, 3].

편대를 구성하는 위성의 수가 증가할수록 동역학 방정식의 차원은 산술적으로 증가한다. 대규모 시스템(large-scale system)을 위한 제어기의 수치적 설계 가능성(feasibility)은 지극히 낮다. 이를 극복하기 위해서 위성체를 개별 소규모 시스템으로 간주하고 각 소규모 시스템이 상호 연결된 시스템(interconnected system)으로 재구성하여 분산 제어기(decentralized controller)를 설계하는 것이 효과적이다. 또한 편대 비행의 제어를 위하여 위성이 편대를 구성하는 위성의 모든 정보를 사용하는 것은 바람직하지 않다 [3]. 대신 개별 위성의 정보와 그것의 주동기(leader) 역할을 수행하는 위성의 정보만을 사용하는 것이 보다 현실적이다 [4]. 이것은 편대내 정보 흐름의 제약 조건이 되며 제어기 설계시 이득 행렬의 형태적 제약 조건-중복 분산 제어기(overlapping decentralized controller)-으로 나타난다.

본 논문은 정보 흐름의 제약 조건을 갖는 대규모 시스템을 위한 분산 제어기의 효율적 설계를 위하여 중복 분해 기법(overlapping decomposition technique)을 도입한다 [5, 6,

7, 8]. 중복 분해 기법에 의하여 확장된 대규모 시스템에 기반한 제어기 설계 조건은 소규모 시스템의 위한 선형 행렬 부등식의 형태로 표현된다. 설계된 중복 분산 제어기는 원래의 대규모 시스템에 적용되기 위하여 등가적으로 축약되며 페루프 시스템의 안정도가 보존됨이 증명된다. 수치적 예제를 들어 제안된 기법의 효용성을 입증한다.

### 2. 동역학

뉴턴의 제 2법칙에 의하여 편대 내  $i$ 번째 인공위성  $\mathbf{i}$ 의 관성 좌표계에서의 질점 동역학(particle dynamics)은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 r^i}{dt^2} = \frac{f^i}{m^i} \quad (1)$$

여기서  $r^i \in \mathbb{R}^3$ 는 관성 좌표계의 원점에서 인공위성까지의 거리이며,  $m^i \in \mathbb{R}_{>0}$ 은 질량이다.

**참고 1:** 중복 분해 기법은 소규모 시스템들의 상태 변수가 상호 연결된 대규모 시스템에 적용된다. 인공위성 편대의 상대 위치를 상태 변수로 사용하여 표현된 동역학의 소규모 시스템들은 상태변수를 중복하지 않아 중복 분해 기법을 적용할 수 없다.

$\mathbf{i}$ 를  $j$ 번째 인공위성  $\mathbf{j}$ 의 주동기라 하자.  $\mathbf{j}$ 의 관성 좌표계에서의 편대를 유지하기 위한  $\mathbf{j}$ 의 기준 위치는 다음과 같이 표현되고 [4]

$$r_d^j = r^i + h^{ij}$$
$$v_d^j = \frac{dr^i}{dt} + \frac{dh^{ij}}{dt} \quad (2)$$

관성 좌표계에서의 기준 속도는 다음과 같이 표현된다.

여기서  $h^{ij} \in \mathbb{C}^2$ 는  $\mathbf{i}$ 에서부터  $\mathbf{j}$ 의 상대 기준 위치이며 미리 주어진다고 가정한다.  $\mathbf{j}$ 의 위치 오차는

\* 정 회 원 : 인하대학교 전자전기공학부 부교수  
† 교신저자, 종신회원 : 국립한밭대학교 전기공학과 조교수  
E-mail : dowankim@hanbat.ac.kr  
접수일자 : 2012년 4월 24일  
최종완료 : 2012년 6월 20일

$$e_r^j := r_d^j - r^j = r^i - r^j + h^{ij}$$

로 정의되고 속도 오차는

$$e_v^j := v_d^j - v^j$$

로 정의된다. 따라서 (2)와 (1)을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{de_r^j}{dt} &= \frac{dr^i}{dt} - \frac{dr^j}{dt} + \frac{dh^{ij}}{dt} \\ &= -\left(v_d^i - \frac{dr^i}{dt}\right) + \left(v_d^j - \frac{dr^j}{dt}\right) + \frac{dh^{ij}}{dt} + \left(\frac{dr^0}{dt} + \frac{dh^{0i}}{dt}\right) \\ &\quad - \left(\frac{dr^i}{dt} + \frac{dh^{ij}}{dt}\right) \\ &= -e_v^i + e_v^j \end{aligned}$$

와

$$\frac{de_v^j}{dt} = \frac{d^2r^i}{dt^2} - \frac{d^2r^j}{dt^2} + \frac{d^2h^{ij}}{dt^2}$$

로 계산된다.  $u^j := \frac{f^j}{m^j}$ 로 정의하고,  $u^i$ 도 유사하게 정의하면 (1)로부터

$$\frac{de_v^j}{dt} = u^i - u^j + \frac{d^2h^{ij}}{dt^2}$$

의 동역학을 얻는다. 유사하게  $i$ 의 주동기 역할을 하는 지구 중심  $0$ 과,  $j$ 를 주동기로 하는  $k$ 번째 인공위성  $k$ 를 고려하면 다음의 대규모 인공위성 편대의 오차 동역학을 얻는다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_r^i \\ e_v^i \\ e_r^j \\ e_v^j \\ e_r^k \\ e_v^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r^i \\ e_v^i \\ e_r^j \\ e_v^j \\ e_r^k \\ e_v^k \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ u^j \\ u^k \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2h^{0i}}{dt^2} \\ \frac{d^2h^{ij}}{dt^2} \\ \frac{d^2h^{jk}}{dt^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. 제어기 설계

시스템 (3)은 다음의 상태 방정식으로 표현된다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \quad (4)$$

여기서  $x \in \mathbb{R}^{18}$ 는 상태,  $u \in \mathbb{R}^9$ 는 입력,  $w \in \mathbb{R}^{18}$ 는 섭동이다. (3)을 살펴보면,  $e_v^i$ 는  $0$ 과  $i$ 의 상대 위치 동역학과  $i$ 와  $j$ 의 상대 위치 동역학에 동시에 포함되고,  $e_r^j$ 는  $i$ 와  $j$ 의 상대 위치 동역학과  $j$ 와  $k$ 의 상대 위치 동역학에 동시에 포함된다. 한편,  $0$ 와  $i$ 의 상대 위치 동역학과  $i$ 와  $j$ 의 상대 위치 동역학은  $u^i$ 를 동시에 포함한다. 유사하게  $i$ 와  $j$ 의 상대 위치 동역학과  $j$ 와  $k$ 의 상대 위치 동역학은  $u^j$ 를 동시에 포함한다. 따라서 (3)은 시스템 행렬에서 분할된 행렬들로 표현되는

소규모 시스템들이 중복된 요소에 대응되는 상태 변수로 상호 연결되고, 입력 행렬에서 분할된 행렬들이 중복된 요소에 대응되는 입력으로 상호 연결되는 대규모 시스템을 표현한다.

**참고2:** 기준 상대 위치를 나타내는  $h^{??}$ 은 급격히 변화하지 않음을 가정한다. 여기서  $?$ 는 적절한 윗첨자를 나타낸다.

즉  $\left\| \frac{d^2h^{??}}{dt^2} \right\|$ 은 유계된다. 따라서, 다음의 시스템

$$\mathcal{S} : \dot{x} = Ax + Bu$$

이 점근적으로 안정(asymptotically stable)되면 (4)는 궁극적으로 균일하게 유계(ultimately uniformly bounded)된다. 만일  $h^{??}$ 이 시불변이라면  $\mathcal{S}$ 의 점근적 안정성은 (4)의 점근적 안정성을 의미한다. 본 논문에서는 논의에 집중하기 위하여  $\mathcal{S}$ 만을 고려한다.

$\mathcal{S}$ 를 제어하기 위하여 다음의 선형 궤환 제어기를 생각하자.

$$\mathcal{K} : u = Kx$$

본 논문의 목적은 대규모 시스템  $\mathcal{S}$ 의 분산 제어 이득  $K$ 를 효율적으로 설계하는 것이다. 이것은 상호 연결된 대규모 시스템을 소규모 시스템으로 분해하여, 소규모 시스템을 위한 제어기를 설계하고, 이것을 다시 합성하여  $\mathcal{S}$ 에 적용하여 원래의 대규모 시스템에 궤환하는 방식을 취할 것이다. 이를 위하여 공간  $\mathbb{R}^{18+3 \times 2} \times \mathbb{R}^{9+3 \times 2}$ 에서 정의되는 시스템  $\tilde{\mathcal{S}}$ 을 생각하자.

$$\tilde{\mathcal{S}} : \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$$

이제 확장(expansion) 개념을 도입하자.

**정의 1** (확장): 임의의 초기 상태  $x_0 \in \mathbb{R}^{18}$ 와 임의의 입력  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{9+3 \times 2}$ 에 대하여

$$\tilde{x}(t; Vx_0, \tilde{u}) = Vx(t; x_0, U\tilde{u}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

를 만족하도록 하는  $U$ 와  $V$ 가 존재한다면 시스템  $\tilde{\mathcal{S}}$ 은 시스템  $\mathcal{S}$ 의 확장이다 [7].

이제 (3)의  $A$ 에서 분할된 행렬이 중복된 요소에 대응하는 부분 상태 벡터들  $-e_v^i, e_v^j \in \mathbb{R}^3$  -을 중복하여 확장된 상태를

$$\tilde{x} := \underbrace{(e_r^i, e_v^i, e_v^i)}_{=: \tilde{x}_1}, \underbrace{(e_r^j, e_v^j, e_v^j)}_{=: \tilde{x}_2}, \underbrace{(e_r^k, e_v^k, e_v^k)}_{=: \tilde{x}_3} \in \mathbb{R}^{18+3 \times 2}$$

라 하자. 변환  $V := x \in \mathbb{R}^{18} \rightarrow \tilde{x} \in \mathbb{R}^{18+3 \times 2}$ 의 표준 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$V := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

유사하게  $B$ 의 분할된 행렬이 중복된 요소에 대응하는  $u^i$ 와  $u^j$ 를 중복하여 확장한 입력을

$$\tilde{u} := \underbrace{(u^i, u^i, u^i)}_{=: \tilde{u}_1}, \underbrace{(u^j, u^j, u^j)}_{=: \tilde{u}_2}, \underbrace{(u^k, u^k, u^k)}_{=: \tilde{u}_3} \in \mathbb{R}^{9+3 \times 2}$$

이라 하자.  $u$ 와  $\tilde{u}$ 의 변환 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$U : \mathbb{R}^{9+3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^9$$

여기서  $U$ 의 표준 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$U := \left[ \begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

정의 1에 의하여  $\tilde{\mathcal{S}}$ 가  $\mathcal{S}$ 의 확장이 되기 위한 조건은  $\tilde{A}V = VA, \tilde{B} = VBU$ 이다 [7]. 따라서

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \\ &=: \left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_3 \end{array} \right] \\ \tilde{B} &= \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & 0 \\ \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I & -I \end{array} \right] \\ &=: \underbrace{\left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{B}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{33} \end{array} \right]}_{=: \tilde{B}_M} + \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} \\ \tilde{B}_{21} & 0 & \tilde{B}_{23} \\ \tilde{B}_{31} & \tilde{B}_{32} & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

이다.

$\tilde{\mathcal{S}}$ 를 제어하기 위하여 다음의 선형 폐환 제어기를 생각하자.

$$\tilde{\mathcal{K}} : \tilde{u} = \tilde{K}\tilde{x}$$

폐루프 시스템은

$$\tilde{\mathcal{K}} : \dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})\tilde{x}$$

이다. 이제  $\tilde{\mathcal{S}}$ 를 적절히 제어하는  $\tilde{\mathcal{K}}$ 를 설계할 수 있다면 이것을  $\mathcal{S}$ 에 폐환하기 위해서  $\tilde{\mathcal{K}}$ 를  $\mathcal{K}$ 로 등가적으로 변환하여야 한다.

**정의 2** (축약): 임의의 초기 상태  $x_0 \in \mathbb{R}^{18}$ 와 임의의 입력  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{9+3 \times 2}$ 에 대하여  $u = U\tilde{u}$ 가

$$Kx(t; x_0, U\tilde{u}) = U\tilde{K}\tilde{x}(t; Vx_0, \tilde{u})$$

를 만족하도록 하는  $U$ 와  $V$ 가 존재한다면  $\mathcal{K}$ 는  $\tilde{\mathcal{K}}$ 의 축약이다 [7].

정의 2로부터  $\tilde{K}$ 가  $U\tilde{K}V = K$ 의 관계를 만족한다면  $\mathcal{K}$ 는  $\tilde{\mathcal{K}}$ 의 축약이다 [7].

편대 임무를 성공적으로 수행하기 위해서는 편대 내의 모든 인공위성의 상태를 활용하는 것이 좋으나, 제한된 정보만을 사용하는 것이 보다 현실적인 상황을 고려하는 것이다 [4].

**가정 1:** 본 논문에서는 인공위성은 자신과 주동기 인공위성의 정보만을 이용함을 가정한다.

$\tilde{K}$ 가

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \left[ \begin{array}{cc|ccc|ccc} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{11} & 0 & K_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{56} & K_{57} & K_{58} \end{array} \right] \quad (5) \\ &=: \left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{K}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{32} & \tilde{K}_{33} \end{array} \right] \end{aligned}$$

의 형태일 때  $K$ 는

$$K = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} K_{11} & \frac{K_{12}+K_{23}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{33} & K_{34} & \frac{K_{35}+K_{46}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{56} & K_{57} & K_{58} \end{array} \right]$$

로 축약된다. 이 형태의  $K$ 는 가정 1의 제약 조건을 만족하며 중복 분산 제어기의 형태이다.

(5)는 블록 대각 행렬이 아니고  $\mathcal{S}$ 는 제어 가능하지 않아 축약 가능한  $\tilde{\mathcal{K}}$ 를 설계하는 작업이 단순하지 않다. (5)를 변형한 다음의 블록 대각 형태의 이득 행렬을 고려하자.

$$\begin{aligned} \tilde{K}_M &= \left[ \begin{array}{cc|ccc|ccc} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{56} & K_{57} & K_{58} \end{array} \right] \\ &=: \left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{K}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_{33} \end{array} \right] \end{aligned}$$

이제  $(\tilde{A}, \tilde{B}_M)$ 를 점근적으로 안정화시키는  $\tilde{K}_M$ 은 리아푸노프 함수  $V(\tilde{x}) := \tilde{x}^T Y^{-1} \tilde{x}$ 를 도입하여 설계할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} Y = Y^T &= \left[ \begin{array}{cc|cccc|ccc} ? & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{array} \right] \quad (6) \\ &=: \left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Y}_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

이다. 여기서 ?는 적절한 블럭 요소를 나타내고 \*는 대칭 요소의 전치를 나타낸다.

$(\tilde{A}, \tilde{B})$ 의 블럭 대각 행렬들  $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_{11}), (\tilde{A}_2, \tilde{B}_{22}), (\tilde{A}_3, \tilde{B}_{33})$ 과 호환되는  $\tilde{x}$ 의 부분 집합을 각각  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ 이라 하자.  $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_{ii})$ 는 제어 가능하므로 리아푸노프 함수들  $\tilde{W}_i = \tilde{x}_i^T Y_i^{-1} \tilde{x}_i$ 이  $\dot{W}_i|_{\tilde{x}_i=(\tilde{A}_i+\tilde{B}_{ii}\tilde{K}_{ii})\tilde{x}_i} < -\alpha_i \|\tilde{x}_i\|^2$ 를 만족하는  $\alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}$ 이 존재하도록  $\tilde{K}_M$ 을 다음의 선형 행렬 부등식을 풀어

$$\tilde{Y}_i > 0 \quad (7)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{Y}_i \tilde{A}_i^T + \tilde{L}_i^T \tilde{B}_i^T + \tilde{A}_i \tilde{Y}_i + \tilde{B}_i \tilde{L}_i & * \\ \tilde{Y}_i & -\frac{1}{\alpha_i} \end{array} \right] < 0 \quad (8)$$

설계할 수 있다. 이 때  $\tilde{K}_{ii} = \tilde{L}_i \tilde{Y}_i^{-1}$ 다.

**정리 1:** 선형 행렬 부등식 (7), (8)의 해가 존재한다면  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ 도 Hurwitz이다.

**증명** 선형 행렬 부등식 (7), (8)의 해가 존재하면  $\lambda(\tilde{A} + \tilde{B}_M \tilde{K}_M) < 0$ 이고 이것은  $\lambda(\tilde{A} + \tilde{B}_M \tilde{K}) < 0$ 를 의미한다. 왜냐하면  $\tilde{A} + \tilde{B}_M \tilde{K}_M$ 과  $\tilde{A} + \tilde{B}_M \tilde{K}$ 는 각각 블럭대각행렬이고

블록 하부 삼각 행렬이면서 동일한 블록 대각 행렬을 갖기 때문이다.

이제  $\tilde{\mathcal{S}}$ 와  $\tilde{\mathcal{K}}$ 로 구성되는 페루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\tilde{x}}_i = (\tilde{A}_i + \tilde{B}_{ii} \tilde{K}_{ii}) \tilde{x}_i + \left( \sum_{-(j=h=i)}^3 \tilde{B}_{ij} \tilde{K}_{jh} \tilde{x}_h \right), \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (9)$$

**참고 3:** 다음은 동치이다.

- (a)  $S$ 가  $M$ -행렬이다.
- (b)  $DS + S^T D$ 는 양한정 행렬이다.
- (c)  $S$ 의 주 소행렬식(leading principal minors)들이 양이다.

**정리 2:** 선형 행렬 부등식 (7), (8)의 해로부터 다음

$$s_{ih} = \begin{cases} \alpha_i - 2 \left( \sum_{j \neq i}^3 \|\tilde{Y}_i^{-1} \tilde{B}_{ij} \tilde{K}_{jh}\| \right), & i = h \\ -2 \left( \sum_{j=1}^3 \|\tilde{Y}_i^{-1} \tilde{B}_{ij} \tilde{K}_{jh}\| \right), & i \neq h \end{cases}$$

로 정의된 행렬  $S = (s_{ih})$ 이  $M$ -행렬이면 (9)는 점근적으로 안정하다.

**증명** (9)의 궤적을 따라 계산된 리아푸노프 함수의 미분은

$$\dot{W}_i|_{(9)} \leq - \left( \alpha_i \|\tilde{x}_i\|^2 - 2 \|\tilde{x}_i\| \times \left( \sum_{-(j=h=i)}^3 \|\tilde{Y}_i^{-1} \tilde{B}_{ij} \tilde{K}_{jh}\| \|\tilde{x}_h\| \right) \right)$$

이다. 이제 적절한  $d_i \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여 합성 리아푸노프 함수  $\tilde{W} = \sum_{i=1}^3 d_i \tilde{W}_i$ 는

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} &\leq - \sum_{i=1}^3 d_i \left( \alpha_i \|\tilde{x}_i\|^2 - 2 \|\tilde{x}_i\| \left( \sum_{-(j=h=i)}^3 \|\tilde{Y}_i^{-1} \tilde{B}_{ij} \tilde{K}_{jh}\| \|\tilde{x}_h\| \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \phi^T (DS + S^T D) \phi \end{aligned}$$

로 계산된다. 여기서

$$\phi = (\|\tilde{x}_1\|, \|\tilde{x}_2\|, \|\tilde{x}_3\|), \quad D = \text{diag}\{d_1, d_2, d_3\}$$

이다.  $DS + S^T D$ 가 양한정 행렬이면  $\dot{\tilde{W}}$ 는 음한정이므로 (9)는 점근적으로 안정하다. 이것은  $S$ 가  $M$ -행렬인 것과 동치이다.

**정리 3** (안정도 보존): 확장된 페루프 시스템  $\tilde{\mathcal{S}}$ 이 점근적으로 안정하면 원래의 페루프 시스템  $\mathcal{S}$ 도 점근적으로 안정하다.

**증명**  $\mathcal{S}$ 에 대하여 리아푸노프 함수

$$V(x) := x^T V^T Y^{-1} V x (= \tilde{W}(\tilde{x}))$$

를 고려하자. 이것은 명백히 양한정 함수이며  $\dot{W}(x)$ 의 음한정은 다음과 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} \dot{W}(x)|_{\mathcal{S}} &= \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}} V(A + BK)x \\ &= \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}} (\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{K}) \tilde{x} \\ &= \dot{\tilde{W}}(\tilde{x})|_{(9)} < 0 \end{aligned}$$

#### 4. 수치적 예제

리아푸노프 행렬을 (6)의 형태로 선정하고,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$

로 선정하여 선형 행렬 부등식 (7), (8)를 풀면

$$\tilde{K}_M = \begin{bmatrix} 6.89 & 8.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.77 & 7.61 & 9.03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.88 & 3.17 & 3.13 & 0 \end{bmatrix}$$

$\otimes I_3 \in \mathbb{R}^{15 \times 24}$

를 구할 수 있으며 이것을  $\tilde{K}$ 의 형태로 변경하면

$$\tilde{K}_M = \begin{bmatrix} 6.89 & 8.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.89 & 0 & 3.79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.77 & 7.61 & 9.03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.77 & 7.61 & 0 & 3.79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.88 & 3.17 & 3.13 & 0 \end{bmatrix}$$

$\otimes I_3 \in \mathbb{R}^{15 \times 24}$

를 얻는다. 여기서 고차원의 행렬을 지면에 표시하기 위하여 크로네퍼 델타 연산자  $\otimes$ 를 사용하였다.  $S$ 는

$$S = \begin{bmatrix} 9.68 & -0.17 & 0 \\ -1.07 & 9.60 & -0.18 \\ -0.68 & -1.43 & 10 \end{bmatrix}$$

로 계산되며 이것은  $M$ -행렬이다. 왜냐하면  $D = \text{diag}\{1, 1, 1\}$ 로 선정하면  $DS + S^T D$ 는 양한정 행렬이기 때문이다. 따라서  $\tilde{\mathcal{S}}$ 와  $\tilde{K}$ 로 구성된 페루프 시스템은 점근적으로 안정하다. 이제 이것을 추약하면

$$K = \begin{bmatrix} 6.89 & 6.06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.77 & 7.61 & 6.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.88 & 3.17 & 3.13 \end{bmatrix} \otimes I_3 \in \mathbb{R}^{9 \times 18}$$

를 얻는다.  $\mathcal{S}$ 와  $\mathcal{K}$ 로 구성된 페루프 시스템도 점근적으로 안정하다. 그림 1은  $\mathcal{S}$ 의 페루프 시간 응답을 나타낸다. 앞의 논의에서 증명되었듯이 모든 상태 변수는 영으로 수렴함을 알 수 있다.

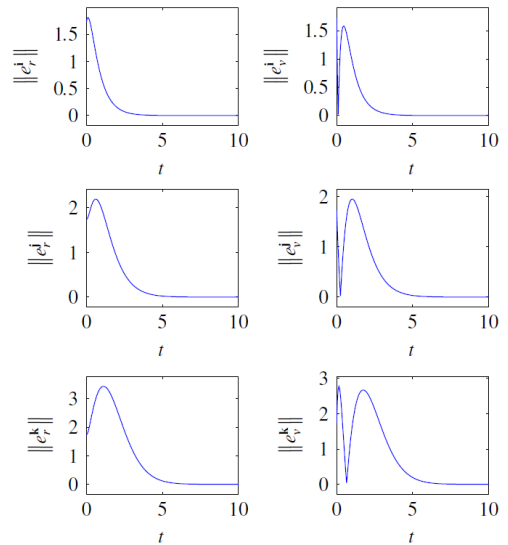


그림 1  $\mathcal{S}$ 의 페루프 시간 응답

Fig. 1 Closed loop time response of  $\mathcal{S}$

#### 5. 결론

본 논문은 대규모 인공위성의 편대 비행의 분산 제어 문

제를 다루었다. 고려한 시스템은 소규모 시스템의 상태와 입력이 상호 연결된 시스템으로 간주될 수 있으며 중복 분해 기법을 사용하여 소규모 시스템의 제어기 설계 문제로 변환하였다. 설계된 제어기는 축약되어 원래의 대규모 시스템에 적용된다. 수치적 예제를 들어 제안된 기법의 효용성을 보였다.

**감사의 글**

이 논문은 2011년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업의 지원을 받아 수행된 연구임(2011-0005656)

**참 고 문 헌**

[1] R. Pongvthithum, S. M. Veres, S. B. Gabriel, and E. Robers, "Universal adaptive control of satellite formation flying," *International Journal of Control*, vol. 78, no. 1, pp. 45-52, 2005.

[2] Ho Jae Lee and Do Wan Kim, "Sampled-Data Control of Formation Flying using Optimal Linearization," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 61-66, 2009.

[3] M. Mesbahi and F. Y. Hadaegh, "Formation flying control of multiple sapcecraft via graphs, matrix inequalities, and switching," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 24, no. 2, pp. 369-377, 2001.

[4] D. M. Stipanovic, G. Inalhan, R. Teo, and C. J. Tomlin, "Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vegicles," *Automatica*, vol. 40, pp. 1285-1296, 2004.

[5] D. D. Siljak, *Decentralized Control of Complex System*, ser. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1991, vol. 184.

[6] A. Iftar, "Decentralized estimation and control with overlapping input, state, and output decomposition," *Automatica*, vol. 29, no. 2, pp. 511-516, 1993.

[7] A. Iftar and U. Ozguner, "Contractible controller design and optimal control with state and input inclusion," *Automatica*, vol. 26, no. 3, pp. 593-597, 1990.

[8] A. I. Zecevic and D. D. Siljak, "A new approach to control design with overlapping information structure constraints," *Automatica*, vol. 41, pp. 265-272, 2005.

**저 자 소 개**



**이 호 재 (李 皓 載)**

1998년 연세대학교 전기공학과(공학사). 2000년 연세대학교 대학원 전기컴퓨터공학과(공학석사). 2004년 동대학원 전기전자공학과(공학박사). 2005년 University of Houston, Houston, TX, USA 방문 조교수. 현재 인하대학교 전자전기공학부 교수. 관심분야는 비선형 샘플치제어, 편대비행 제어, 디지털 재설계



**김 도 완 (金 度 完)**

2002년 연세대학교 전기공학과(공학사). 2004년 연세대학교 대학원 전기전자공학과(공학석사). 2007년 동 대학원 전기전자공학과(공학박사). 2008년 연세대학교 산업기술 연구소 연구원 및 University of California at Berkeley, CA, USA 박사 후 과정. 2009년 연세대학교 전기전자공학과 BK 연구교수. 현재 한밭대학교 전기공학과 조교수. 관심분야는 비선형 샘플치제어, 지능제어, 디지털 재설계.