<학술논문> **DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2012.36.7.805** ISSN 1226-4873

오목한 성능함수에서 공액경사도법을 이용한 단일루프 단일벡터 방법의 수렴성 개선

정성범*· 이세정*· 박경진*†
* 한양대학교 기계공학과

Improvement of the Convergence Capability of a Single Loop Single Vector Approach Using Conjugate Gradient for a Concave Function

Seong-Beom Jeong*, Se-Jung Lee* and Gyung-Jin Park*†
* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received March 7, 2012 ; Revised May 11, 2012 ; Accepted May 14, 2012)

Key Words: Reliability-Based Design Optimization(신뢰성 기반 최적설계), Single Loop Single Vector Approach(단일루프 단일벡터 방법), Conjugate Gradient Method(공액경사도법)

초록: 신뢰성 기반 최적설계의 효과적인 수행을 위하여 개발된 단일루프 단일벡터 방법은 신뢰성 해석의 계산과정을 제거함으로써 최적설계 시 발생하는 과도한 계산비용을 줄일 수 있다. 하지만 성능함수의 오목한 정도가 심할 경우, 수렴을 하지 못하고 발산하는 경향을 보인다. 때문에 일반적인 단일루프 단일벡터 방법은 낮은 수렴성과 부정확성 문제를 내포하고 있다. 본 연구에서는 공액경사도법을 이용한 단일루프 단일벡터 방법을 제안한다. 공액경사도법은 이전 반복과정의 최대가능손상점에서 계산된 방향벡터들을 이용하여 현재 설계점에서의 최대가능손상점을 산출하기 위한 새로운 방향벡터를 구하고 이 방향벡터를 이용하여 현재점에서의 최적화를 수행한다. 이를 다양한 수학예제에 적용하고 다른 방법들과 수치적 성능 비교를 통해 제안한 방법의 유용성을 검증한다. 공액경사도법을 이용한 단일루프 단일벡터 방법은 성능함수 특성에 크게 영향을 받지 않으며 수렴성을 크게 향상시킬 수 있다.

Abstract: The reliability based design optimization (RBDO) approach requires high computing cost to consider uncertainties. In order to reduce the design cost, the single loop single vector (SLSV) approach has been developed for RBDO. This method can reduce the cost in calculating deign sensitivity by elimination of the nested optimization process. However, this process causes the increment of the instability or inaccuracy of the method according to the problem characteristics. Therefore, the method may not give accurate solution or the robustness of the solution is not guaranteed. Especially, when the function is concave, the process frequently diverges. In this research, the concept of the conjugate gradient method for unconstrained optimization is utilized to develop a new single loop single vector method. The conjugate gradient is calculated with gradient directions at the most probable points (MPP) of previous cycles. Mathematical examples are solved for the verification of the proposed method. The numeri cal performances of the obtained results are compared to those of other RBDO methods. The SLSV approach using conjugate gradient is not greatly influenced by the problem characteristics and improves its convergence capability.

1. 서 론

구조물 설계 시 설계자에 의해 정의되는 설계변수나 시스템 파라미터에는 불확실성(uncertainty)이 존재한다. 대표적인 예로 제작공차, 재료 물성치, 작용하중 등이 있다. 확정론적 최적설계(Deterministic Optimization, DO) 기법에서는 이러한 설계변수나 시스템 파라미터의 불확실성을 고려하지 않고 시스템이 만족해야 할 제한조건하에서 목적함수를 최소화하는 과정을 수행한다. 이 때문에 확정론적 최적해에서 불확실성을 고려하면 제품의 성능은 저하될 수 있다. 시스템의 불확실성을 정량적으로 예측하고 이를 설계과정에 적용하기 위한 노력의 일환으로 신뢰성 기반 최적설계 방법(Reliability-Based Design Optimization, RBDO)이 대두되었다.

† Corresponding Author, gjpark@hanyang.ac.kr
ⓒ 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

신뢰성 기반 최적설계는 확정론적 최적설계에서의 구속조건을 확률적으로 처리하여 불확실성이 존재하더라도 구속조건을 만족시키는 최적의 설계를 얻고자 하는 기법이다. 현재까지 신뢰성 기반 최적설계와 관련하여 많은 방법론이 제안되었지만 반복적인 민감도 해석을 필요로 하는 신뢰성 해석으로 인해 많은 설계비용을 초래하였다. 이러한 이유로 과도한 계산비용을 줄여 실제 구조문제에 적용하기 위한 다양한 연구가 시도되고 있다.

기존의 신뢰성 기반 최적설계는 신뢰성 지수 방법(Reliability Index Approach, RIA)[1]과 목표성능치 방법(Performance Measure Approach, PMA) [2,3] 등을 사용하였다. 이중루프 구조라 불리는 이 방법들은 최대가능손상점(Most Probable Point, MPP)를 찾는 내부 최적화 과정과 확률론적 최적해를 찾는 외부 최적화 과정으로 구성된다. 때문에 확정론적 최적설계에 비해 상대적으로 많은 설계비용을 필요로 한다.

1990 년대 말부터 이중루프 구조로 인한 수치적 부담을 줄이기 위해 단일루프 기법에 대한 연구가 진행되었다.[4] 이중 루프 구조를 제거하기 위해서 최적화 문제와 신뢰성 해석을 동시에 수렴시켜 수행하는 단일루프 단일벡터 방법(Single Loop Single Vector Method, SLSV)이 제안되었다. 단일루프 단일벡터 방법은 정확한 최대가능손상점을 구하는 반복과정을 제거하고 설계변수가 최적화됨과 동시에 최대가능손상점도 근사적으로 수렴하도록 한 방법이다. 단일루프 구조는 이중루프 구조를 갖는 RBDO 기법에 비해 효율적이지만 문제 특성에 따라 수렴 강건성이 떨어지는 문제점을 내포하고 있다. 특히 오목한 형태의 성능함수를 처리하는데 어려움을 가지고 있다. 때문에 전체 알고리즘의 효율성 확보와 강건한 수렴성을 위한 방법론이 연구되고 있다.

Choi[5]는 기존의 SLSV 방법의 문제점을 지적하고 비활성화 설계(Inactive Design)와 민감도 기반 근사함수를 이용한 SLSV 를 제안하였다. Yang[6] 등은 각 반복과정의 최대가능손상점에서 얻어진 방향벡터들 사이의 관계에 따라 수정된 HMV(Hybrid Mean Value)[7] 을 이용한 MPP 갱신 알고리즘(HMV SLSV)을 제안하였다. Yang 은 성능함수가 오목한 형태일 경우 수렴하지 않는 문제를 지적하고 함수 형태를 추정하여 이전 반복과정의 최대가능손상점에서 구한 방향벡터들의 단순합으로 계산된 공액경사도를 이용하였다.

또한 이중루프 구조를 단일화시키고자 순차적 단일루프 기법이 연구되었다. Du[8] 등은 신뢰도 평가 순차 기법(Sequential Optimization and Reliability Assessment Method, SORA)을 제안하였다. 이 기법은 신뢰성 해석 문제와 최적화 문제를 순차적으로 반복하여 효율적인 최적화를 도모하였다. 위의 연구들은 신뢰성 기반 최적설계의 실제 구조문제로의 적용을 위해 수치적 안정성, 수렴 강건성, 합리적인 설계비용을 모두 만족할 수 있는 방법론을 개발하고자 하는 노력이다.

본 연구에서는 기존 SLSV 방법이 내포하고 있는 단점을 개선하기 위해 Fletcher 와 Reeves[9,10]가 제안한 공액경사도법(Conjugate Gradient Method)을 이용한 단일루프 단일벡터 방법을 제안한다. 공액경사도법은 이전 반복과정의 최대가능손상점에서 계산된 방향벡터들을 이용하여 현재 설계점에서의 최대가능손상점을 산출하기 위한 공액경사도를 구한다. 이 방향벡터를 이용하여 현재점에서의 최적화를 수행한다. 공액경사도법을 이용한 단일루프 단일벡터 방법은 문제 특성에 크게 영향을 받지 않으며 수렴성을 크게 향상시킬 수 있다. 또한 신뢰성 기반 최적설계 시 민감도 계산 횟수를 크게 줄여 설계비용을 감소시키며 매우 정확한 최적해를 도출한다. 제안한 방법의 효용성 알아보고자 다양한 수학예제를 통하여 이미 개발된 방법론들과 비교하였다.

2. 단일루프 단일벡터 방법

효과적인 신뢰성 기반 최적설계를 위해 제안된 단일루프 단일벡터 방법은 최대가능손상점을 구하는 반복과정을 제거하고 설계변수가 최적화됨과 동시에 최대가능손상점도 근사적으로 수렴하도록 한 방법이다. 식 (1)과 같이 설계변수의 평균 $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}$ 에서의 MPP $\mathbf{b}^*$ 을 구하기 위해 이전 반복과정의 MPP 에서의 민감도 방향 $\boldsymbol{\alpha}$ 을 이용하는 개선된 방법을 사용한다. 식 (1)은 수렴 조건이 만족할 때까지 반복된다.[11]

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} && \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} \\
&\text{to minimize} && f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)}) \\
&\text{subject to} && g_i(\mathbf{b}_i^{*(k)}) \le 0 \quad (i = 1,\ldots,m) \\
&\text{where} && \mathbf{b}_i^{*(k)} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} + \beta_i^t \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \boldsymbol{\alpha}_i^{(k-1)} \\
& && \boldsymbol{\alpha}_i^{(k-1)} = \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i}{\left\| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i \right\|} \right]_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^{*(k-1)}}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

여기서, f 는 목적함수, g_i 는 i 번째 구속조건이며 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}$ 는 확률변수의 표준편차이다. β^t 는 설계자에 의해 정의되는 목표 신뢰도 지수를 나타낸다.

이와 같이, 단일루프 단일벡터 방법은 이중루프 구조에서 최대가능손상점을 구하는 내부 최적화 과정을 제거하여 수치해석 비용을 크게 감소시킨다. 하지만 외부 최적화 과정에서 설계변수의 변화량이 클 경우 현재 설계점에서 찾은 최대가능손상점이 큰 오차를 가질 수 있다. 또한 성능함수의 형태에 따라 설계변수가 진동하거나 발산하여 수렴하지 못하는 특성을 가지고 있다.

3. 공액경사도법을 이용한 단일루프 단일벡터 방법

3.1 공액경사도법

단일루프 단일벡터 방법은 이전 반복과정의 최대가능손상점에서 구한 성능함수의 민감도 방향을 사용한다. 바로 이 점이 기존의 단일루프 단일벡터 방법의 수렴성 저하를 유발한다. Yang[6] 등은 이를 지적하고 이전 두 반복과정의 최대가능손상점에서 계산한 방향벡터의 단순합을 이용하여 이를 극복하고자 하였다.

본 연구에서는 Fletcher 와 Reeves[9,10]가 제안한 공액경사도법을 단일루프 단일벡터 방법에 적용한다. 본래의 공액경사도법은 비제약 최적설계 문제에서 목적함수의 수렴성을 향상시키기 위해 최속강하법을 수정한 기법이다. 본 연구에서는 이 방법을 최대가능손상점 갱신 알고리즘에 적용한다. Yang[6]의 방법과 달리 이전 공액경사도의 영향을 고려하여 효율적인 수렴성 향상을 도모하고자 한다. 새로운 탐색 방향은 다음 식에 의해 산출된다. 식 (1)로부터 k 번째 반복과정에서의 최대가능손상점 $\mathbf{b}^{*(k)}$ 은 식 (2)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{b}^{*(k)} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} + \beta^t \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \boldsymbol{\alpha}^{(k-1)} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} + \beta^t \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)}}{\left\| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)} \right\|} \quad (2)$$

$$\nabla g^{(k-1)} = \nabla g \big|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^{*,(k-1)}}$$

$-\nabla g^{(k)}$ 를 강하방향(Descent Direction)으로 간주하고, Fletcher 와 Reeves 가 정의한 공액경사도법을 구속조건식에 관하여 표현하면 공액경사도 $\mathbf{d}^{(k)}$ 는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{d}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k)} + \gamma^{(k-1)} \mathbf{d}^{(k-1)}$$
$$\gamma^{(k-1)} = \frac{\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k)}\right)^T \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k)}\right)}{\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)}\right)^T \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)}\right)} \quad (3)$$

식 (3)의 공액경사도 $\mathbf{d}^{(k)}$ 를 최대가능손상점 갱신을 위해 식 (2)에 적용하면 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{*(k)} &= \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} + \beta^t \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \frac{\mathbf{d}^{(k-1)}}{\left\| \mathbf{d}^{(k-1)} \right\|} \\ &= \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} + \beta^t \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)} + \gamma^{(k-2)} \mathbf{d}^{(k-2)}}{\left\| \mathbf{d}^{(k-1)} \right\|} \\ \gamma^{(k-2)} &= \frac{\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)}\right)^T \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-1)}\right)}{\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-2)}\right)^T \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g^{(k-2)}\right)} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)의 최대가능손상점 갱신 알고리즘을 단일루프 단일벡터 방법에 적용하여 수렴 강건성을 높이고자 한다.

3.2 공액경사도를 이용한 단일루프 단일벡터 방법

일반적인 확률론적 최적해는 확정론적 최적해에 근접해 있는 경우가 대부분이다. 그렇기 때문에 확률론적 최적화를 수행할 때, 확정론적 최적해를 초기 설계점으로 사용하면 빠르게 확률론적 최적해를 구할 수 있다. 이는 기존 연구들에서 많이 사용되어 왔으며 본 연구에서도 같은 방법을 적용한다.

본 연구에서는 3.1 절에서 제안한 MPP 갱신 알고리즘을 이용한 단일루프 단일벡터 방법을 다음과 같이 제안한다.

단계 1: 초기 설계점을 설정한다. 확률변수의 표준편차 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}$ 와 목표 신뢰도 지수 β^t 를 정의한다. (반복횟수 $k=0$)

단계 2: 설계변수는 설계점의 평균값 $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}$ 로 정의한다. 주어진 목적함수 $f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}})$ 를 최소화하며 구속조건 $g_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}})$ 을 만족하는 확정론적 최적화를 수행하여 최적해 $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{\text{deter opt}}$ 를 구한다.

단계 3: 단계 2 의 확정론적 최적해에서 m 개의 구속조건 중 활성화 구속조건이라 판단되는 m′개의 구속조건들을 선정하고 m′개의 각 구속조건의 민감도 ∇g_i 를 구한다. 이 값을 이용하여 최대가능손상점을

구하기 위한 방향벡터 $\boldsymbol{\alpha}_i^{(0)}$ 를 계산한다.

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{(0)} = \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i}{\left\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i\right\|}\right]_{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{\text{deter opt}}} \quad (i=1,...,m') \qquad (5)$$

단계 4: ($k = k+1$) 이전 반복과정에서 얻어진 방향벡터를 이용하여 k 번째 최대가능손상점을 개선하고 이를 이용한 최적화를 수행한다. 목적함수 값은 확률변수의 평균점에서 계산하고 확률구속조건 값은 각 구속조건의 최대가능손상점에서 구한다.

$$\begin{aligned}
&\text{Find} && \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} \\
&\text{to minimize} && f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)}) \\
&\text{subject to} && g_i(\mathbf{b}_i^{*(k)}) \le 0 \quad (i=1,...,m') \\
&\text{where} && \mathbf{b}_i^{*(k)} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}^{(k)} + \beta_i^t \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \boldsymbol{\alpha}_i^{(k-1)} \\
& && \boldsymbol{\alpha}_i^{(k-1)} = \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i}{\left\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i\right\|}\right]_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^{*,(k-1)}}
\end{aligned} \qquad (6)$$

단계 5: 수렴조건을 만족하면 반복과정을 멈춘다. 그렇지 않으면, 단계 6 으로 이동한다.

단계 6: 반복과정 횟수에 따라 방향벡터 계산방법을 결정한다. $k < 2$ 이면, 방향벡터는 단계 5 에서 구한 k 번째 최대가능손상점에서의 민감도 방향으로 결정한다. 그렇지 않으면 이전 반복과정에서 구해진 방향벡터들을 가지고 공액경사도 $\mathbf{d}^{(k)}$ 을 이용하여 방향벡터를 계산한다.

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{(k)} = \left\{\begin{array}{ll} \left[\dfrac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i}{\left\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i\right\|}\right]_{\mathbf{b}_i^{*(k)}} & (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i = \mathbf{d}_i^{(k)}) \ \text{ if } k<2 \\ \dfrac{\mathbf{d}_i^{(k)}}{\left\|\mathbf{d}_i^{(k)}\right\|} & \text{otherwise} \end{array}\right\} \ (i=1,\ldots,m')$$

$$\mathbf{d}_i^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i^{(k)} + \frac{\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i^{(k)}\right)^T \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i^{(k)}\right)}{\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i^{(k-1)}\right)^T \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}^T \nabla g_i^{(k-1)}\right)} \mathbf{d}_i^{(k-1)} \qquad (7)$$

$$\nabla g_i^{(k)} = \nabla g_i\big|_{\mathbf{b}_i^{*(k)}}$$

단계 7: 설계결과를 갱신하고 단계 4 로 간다.

위 일련의 과정을 순서도로 나타내면 Fig. 1 과 같다.

4. 수학예제

제안한 알고리즘의 유용성을 검증하기 위하여 수학 예제를 이용한 각 방법론의 비교를 수행하였다. 적용한 방법론으로는 이중루프 방법인 신뢰도 지수법(RIA)과 목표성능치법(PMA)을 이용한 신뢰성 기반 최적설계 기법, 신뢰도 평가 순차 기법(SORA), 단일루프 단일벡터 방법(SLSV)을 수행하였다. 이 결과를 공액경사도법을 이용한 단일루프

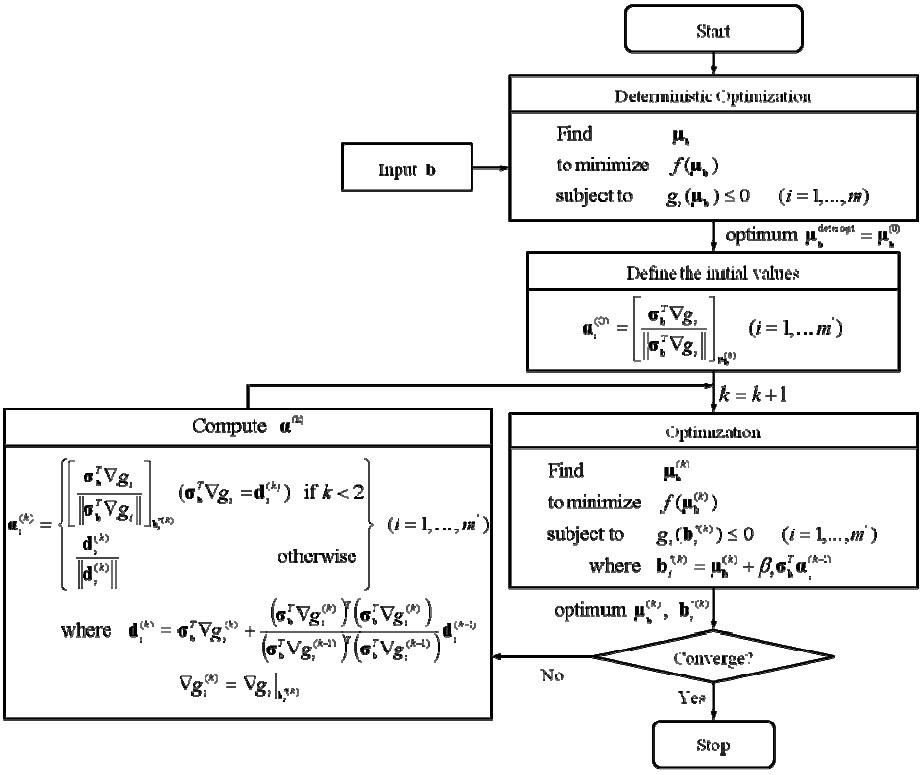

Fig. 1 Flowchart for SLSV using conjugate gradient

단일벡터 방법의 결과와 비교하였다. 각 기법들은 함수 호출 횟수와 민감도 계산 횟수를 이용하여 비교하였고 민감도 계산은 유한차분법(Finite Difference Method)을 사용하였다.

4.1 볼록한 형태를 갖는 성능함수 (예제 1)

이 예제는 대부분의 방법론에서 수렴 가능한 볼록 함수 형태의 구속조건을 갖는 문제이다. 확률변수는 2 개이며 정규분포를 따른다고 가정하였다. 초기 설계점은 (9.0, 9.0)이고 확률변수의 표준편차는 (0.6, 0.6)로 정의하였다. 목표 신뢰도 지수를 변화시켜 경향을 파악하였다. 최적설계를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mu_{b_1},\ \mu_{b_2} \\ &\text{to minimize} && f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = \mu_{b_1}^2 + (\mu_{b_2}-2)^2 \\ &\text{subject to} && \Pr\left[g(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) \le 0\right] \ge \Phi(\beta^t) \\ & && 0 \le \mu_{b_i} \le 10 \quad (i=1,2) \\ &\text{where} && g(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = \mu_{b_1} + \mu_{b_2} - 2\mu_{b_1}\mu_{b_2} + 10 \end{aligned} \tag{8}$$

Table 1 Results of example 1 (β^t =1.0)

Methods	f^*	$\mu_{\mathbf{b}_1}$	$\mu_{\mathbf{b}_2}$	No. of cycles	Func. Call	Grad. Call	Remarks
RIA	10.90	2.80	3.75		210	70	converged
PMA	10.89	2.81	3.74		156	52	converged
SORA	10.90	2.82	3.72	4	112	21	converged
SLSV	10.90	2.81	3.74	3	62	10	converged
Proposed SLSV	10.90	2.81	3.73	2	52	10	converged

Table 2 Results of example 1 (β^t =3.0)

Methods	f^*	$\mu_{\mathbf{b}_1}$	$\mu_{\mathbf{b}_2}$	No. of cycles	Func. Call	Grad. Call	Remarks
RIA	20.23	3.85	4.33		309	103	converged
PMA	20.25	3.83	4.36		432	114	converged
SORA	20.26	3.84	4.35	6	191	43	converged
SLSV	20.26	3.82	4.37	4	75	13	converged
Proposed SLSV	20.26	3.83	4.37	2	58	11	converged

Table 1 과 2 는 각 방법론들의 최적화 결과를 나타낸다. 볼록한 형태의 성능함수에서는 대부분의 기법들이 안정적인 수렴 경향을 나타낸다. SLSV 기반의 기법들이 이중루프 구조의 기법들에 비해 해석 횟수와 민감도 계산 횟수의 향상 정도가 두드러진다. 제안한 방법은 다른 기법들에 비해 적은 함수 계산 및 민감도 계산을 나타낸다.

4.2 오목한 형태를 갖는 성능함수 (예제 2)

본 예제는 성능함수가 오목한 형태를 갖는 문제로 확률변수는 2 개이며 정규분포를 따른다. 구속조건은 오목한 정도가 매우 심하여 최적해를 구하는데 많은 어려움을 갖는 문제이다. 초기 설계점은 (9.0, 9.0)으로 설정하였고 확률변수의 표준편차는 (0.6, 0.6)로 정의하였다. 목표 신뢰도 지수에 따른 수렴성을 파악하였다. 최적화를 위한 설계정식화는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mu_{b_1},\ \mu_{b_2} \\ &\text{to minimize} && f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = (\mu_{b_1}+2)^2 + (\mu_{b_2}+2)^2 - 2\mu_{b_1}\mu_{b_2} \\ &\text{subject to} && \Pr\left[g(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) \le 0\right] \ge \Phi(\beta^t) \\ & && 0 \le \mu_{b_i} \le 10 \quad (i=1,2) \\ &\text{where} && g(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = -9.042 + 11.082\mu_{b_1} + 6.906\mu_{b_2} \\ & && \quad -1.874\mu_{b_1}^2 - 1.212\mu_{b_2}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

예제 2 에서 목표 신뢰도 지수가 1.0, 2.0 일 경우, 모든 방법들이 거의 비슷한 최적해로 수렴하였다. Table 3 과 4 는 목표 신뢰도 지수가 3.0, 4.0 일 때 각 방법론의 결과를 나타낸다. SORA 와 SLSV 는 정의한 목표 신뢰도 지수에서 수렴하지 못하고 발산한다. 반면 RIA 와 PMA 를 이용한 최적화 방법은 안정적인 수렴 형태를 보인다. 하지만 제안한 방법에 비해 많은 함수 계산과 민감도 계산횟수를 필요로 한다. 공액경사도법을 이용한 단일루프 단

Table 3 Results of example 2 (β^t =3.0)

Methods	f^*	$\mu_{\mathbf{b}_1}$	$\mu_{\mathbf{b}_2}$	No. of cycles	Func. Call	Grad. Call	Remarks
RIA	60.40	6.71	6.36		135	45	converged
PMA	60.40	6.71	6.36		180	60	converged
SORA	-	-	-	-	-	-	fail
SLSV	-	-	-	-	-	-	fail
Proposed SLSV	60.40	6.71	6.36	4	64	15	converged

Table 4 Results of example 2 (β^t =4.0)

Methods	f^*	$\mu_{\mathbf{b}_1}$	$\mu_{\mathbf{b}_2}$	No. of cycles	Func. Call	Grad. Call	Remarks
RIA	63.85	7.12	6.82		117	39	converged
PMA	63.84	7.12	6.82		309	103	converged
SORA	-	-	-	-	-	-	fail
SLSV	-	-	-	-	-	-	fail
Proposed SLSV	63.84	7.12	6.82	5	70	14	converged

Table 5 Results of example 3 (β^t =3.0)

Methods	f^*	$\mu_{\mathbf{b}_1}$	$\mu_{\mathbf{b}_2}$	No. of cycles	Func. Call	Grad. Call	Remarks
RIA	-	-	-	-	-	-	fail
PMA	7.67	4.68	2.99		3330	1110	converged
SORA	-	-	-	-	-	-	fail
SLSV	-	-	-	-	-	-	fail
Proposed SLSV	7.67	4.66	3.01	3	160	16	converged

일벡터 방법이 효율성과 수렴성 측면에서 다른 방법들에 비해 개선된 결과를 보여준다.

4.3 볼록 및 오목한 형태를 갖는 성능함수 (예제 3)

이 예제는 성능함수가 볼록한 형태와 오목한 형태를 동시에 갖는 문제이다. 확률변수는 2 개이며 정규분포를 따른다고 가정하였다. 초기 설계점은 (9.0, 9.0)이고 확률변수의 표준편차는 (0.6, 0.6)로 정의하였다. 식 (10)의 설계정식화에서 성능함수 g_1 은 볼록함수이고 g_2 는 오목함수이다. 성능함수 g_2 의 오목한 정도가 매우 심하여 수렴에 어려움을 갖는 문제이다. 최적설계를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} && \mu_{b_1},\ \mu_{b_2} \\
&\text{to minimize} && f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = \mu_{b_1} + \mu_{b_2} \\
&\text{subject to} && \Pr\left[g_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) \le 0\right] \ge \Phi(\beta_i^t) \quad (i = 1,2) \\
& && 0 \le \mu_{b_j} \le 10 \quad (j = 1,2) \\
&\text{where} && g_1(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = -(\mu_{b_1}^2 \mu_{b_2} / 20 - 1) \\
& && g_2(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}}) = -((\mu_{b_1} + \mu_{b_2} - 8)^2 / 10 \\
& && \qquad + (\mu_{b_1} - \mu_{b_2} - 15)^2 / 120 - 1.5)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Table 5 는 예제 3 의 결과를 나타낸다. RIA 를 이용한 최적화 방법, 신뢰도 평가 순차 기법(SORA), 단일루프 단일벡터 방법(SLSV)은 수렴에 실패하였다. PMA 를 이용한 방법과 제안한 방법만이 최적해로 수렴하였다. 수렴한 두 방법을 비교하면, 제안한 방법이 매우 적은 함수 및 민감도 계산을 필요로 한다. 공액경사도법을 이용한 단일루프 단일벡터 방법이 효율성과 수렴성 측면에서 다른 방법들에 비해 우수한 결과를 보인다.

5. 결 론

이중루프 구조를 갖는 RBDO 기법의 단점을 극복하기 위해 제안된 SLSV 방법은 수치적 비용을 해결하는 듯 보였으나 함수 형태에 따른 수렴성 저하로 실제 구조문제에 적용하는데 큰 문제점으로 지적되어 왔다. 특히 오목한 형태의 성능함수에서 수렴 강건성은 현저히 떨어진다. 본 논문에서는 이를 해결하고자 공액경사도를 이용한 SLSV 방법을 제안하였다. 제안한 방법을 통해 기존의 SLSV 방법이 오목한 성능함수에서 보이는 수렴 불안정성을 극복하였고 안정적인 해를 얻을 수 있도록 하였다.

제안한 방법은 기존의 단일루프 단일벡터 방법과 달리 문제 특성에 영향을 크게 받지 않고 수렴성을 개선할 수 있음을 보였다. 반면 제안한 방법은 볼록한 형태의 성능함수에서는 기존의 SLSV 기법에 비해 성능이 떨어질 가능성을 내포하고 있다. 만약 함수 형태를 유추하여 공액경사도법 사용 유무를 판단하고 반복과정을 진행한다면 수치적 계산 비용을 절감할 수 있으리라 판단된다.

후 기

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행되었습니다. (No. R32-2009-000-10022-0) 또한 2011 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었습니다. (No. 2011-0016364)

참고문헌

(1) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1974, “Exact and

Invariant Second Moment Code Format," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 100, No. 1, pp. 111~121.

(2) Lee, T. W. and Kwak, B. M., 1987, "A Reliability-Based Optimal Design Using Advanced First Order Second Moment Method," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15, No. 4, pp. 523~542.

(3) Tu, J. and Choi, K. K., 1999, "A New Study on Reliability-Based Design Optimization," *Journal of Mechanical Design*, ASME, Vol. 121, No. 4, pp. 557~564.

(4) Chen, X., Hasselman, T. K. and Neill, D. J., 1997, "Reliability-Based Structural Design Optimization for Practical Applications," AIAA-97-1403.

(5) Choi, B. L., 2004, "Development of Reliability-Based Design Optimization Algorithm Using Enhanced Initial Design and Two-Point Approximation Technique," Hanyang University, Ph. D. Thesis.

(6) Yang, Y. S., Kim, B. J. and Lee, J. O., 2005, "Modified Single Loop Single Vector Method for Stability and Efficiency Improvement in Reliability-Based Design Optimization," *Journal of Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 18, No. 1, pp. 51~59.

(7) Youn, B. D., Choi, K. K. and Park, Y. H., 2003, "Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization," *Journal of Mechanical Design*, ASME, Vol. 125, pp. 221~232.

(8) Du, X. and Chen, W., 2002, "Sequential Optimization and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design," DETC2002/ DAC34127.

(9) Fletcher, R. and Reeves, C. M., 1964, "Function minimization by Conjugate Gradients," *The Computer Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 149-154.

(10) Hager, W. W. and Zhang, H., 2005, "A Survey of Nonlinear Conjugate Gradient Methods," *Computer and Information Science*, Vol. 2, pp. 35~58.

(11) Bang, S. H. and Min, S. J., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization Using Single-Loop Single Vector Approach," *Journal Transactions of the KSME, A,* Vol. 30, No. 8, pp. 889~896.