지구물리와 물리탐사
Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa
Vol. 15, No. 2, 2012, p. 57~65

속도-응력 변분식을 이용한 3차원 SEM 탄성파 수치 모사에 대한 ADE-PML경계조건의 적용

조창수 · 손민경 *
한국지질자원연구원 지진연구센터

Application of ADE-PML Boundary Condition to SEM using Variational Formulation of Velocity-Stress 3D Wave Equation

Chang Soo Cho and Minkyung Son*
Earthquake Research Center, Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources

요 약: 탄성파 수치 모형 계산에 있어서 다양한 방법들이 개발되어 적용되었다. 최근에는 특히 탄성파 수치 모형 계산에 있어 혁신적인 방법인 SEM (Spectral Element Method)가 개발되어 사용되어 왔다. 이 방법은 지형을 자유롭게 표현하는데 있어 유연한 유한요소법의 장점에 정확성을 높인 방법이다. 일반적으로 Weak Formulation 형태의 파동방정식에 육면체 요소와 Gauss-Lobatto-Legendre 적분법을 적용한 방법이 널리 사용된다. 일반적인 SEM에서는 PML (Perfectly Matched Layer)경계조건을 적용하기 어려워 속도-응력 변분식으로 파동방정식을 변경하였다. CFS-PML (Complex frequency Shifted PML)경계조건을 ADE (Auxiliary Differential Equation)방정식으로 변경하여 속도-응력 파동방정식에 적용함으로써 분리할 필요가 없는 PML을 적용한 SEM 수치 모형 계산 알고리듬을 구현하였다. 1차원 수치모형과 3차원 수치모형 실험을 통하여 SEM에 적용한 비분리 CFS-PML이 유한경계에서 인공적으로 반사되는 반사파를 효과적으로 제거하는 것을 확인하였다.

주요어: ADE-PML, SEM, 탄성파 수치 모사, 흡수경계

Abstract: Various numerical methods in simulation of seismic wave propagation have been developed. Recently an innovative numerical method called as the Spectral Element Method (SEM) has been developed and used in wave propagation in 3-D elastic media. The SEM that easily implements the free surface of topography combines the flexibility of a finite element method with the accuracy of a spectral method. It is generally used a weak formulation of the equation of motion which are solved on a mesh of hexahedral elements based on the Gauss-Lobatto-Legendre integration rule. Variational formulations of velocity-stress motion are newly modified in order to implement ADE-PML (Auxiliary Differential Equation of Perfectly Matched Layer) in wave propagation in 3-D elastic media, because a general weak formulation has a difficulty in adapting CFS (Complex Frequency Shifted) PML (Perfectly Matched Layer). SEM of Velocity-Stress motion having ADE-PML that is very efficient in absorbing waves reflected from finite boundary is verified with simulation of 1-D and 3-D wave propagation.

Keywords: ADE-PML, SEM, elastic wave modeling, absorbing boundary

서 론

탄성파 수치 모형 계산은 지진학과 탄성파 탐사분야에서 복잡한 속도 구조에서 송신원인근에서 P파, S파, 표면파 등의 생성 및 파동 전파 원리 이해, 현장자료 해석과 전파형 역산시에 정모형 계산 도구로 널리 이용되고 있다. 탄성파 수치 모형 계산을 위하여 전통적으로 유한차분법과 유한요소법 등이 사용되었다. 유한차분법은 수치 알고리듬 구현이 쉬운 관계로 인하여 널리 이용되어 왔지만 자유 경계면인 지표면의 지형이 복잡한 곳에서 적용에 한계를 가지는 특징을 가지고 있다. 이를 극복하기 위하여 최근에는 유한체적법 등을 이용한 연구가 진행되고 있다(Appelo and Petersson, 2008; Ely *et al.*, 2008).

유한요소법(Li and Bou Matar, 2010)은 지형에 대한 자유경계면 등과 같은 경계를 쉽게 다룰 수 있는 강력한 방법으로 여겨진다. 그러나 일반적인 유한요소법에서 발생하는 2차 근사의 단점과 질량 행렬이 대각행렬로 나타나지 않아 음함수(implicit) 형태로 표현되어 행렬을 풀어야 하는 문제점이 있다.

유체역학에서 주로 적용되던 SEM (Spectral Element Method)

2012년 3월 16일 접수; 2012년 4월 10일 수정; 2012년 4월 18일 채택
*Corresponding author
E-mail: kersti@kigam.re.kr
Address: 124 Gwanghang-no Yuseong-gu, Daejeon 305-350, Korea

을 탄성파 수치 모형 계산에 적용(Komatitsch and Vilotte, 1998; Komatitsch and Tromp, 1999)하여 좋은 결과가 보고된 이후로 SEM을 이용한 수치 모형 계산에 대한 많은 연구가 진행되었다. SEM의 장점은 GLL (Gauss-Lobatto- Legendre) 적분법을 이용함으로써 고차 근사를 이용하여 정확성을 높일 수 있을 뿐만 아니라 질량 행렬이 대각행렬로 표현되어 양함수(explicit) 형태의 방정식이 구성되어 행렬을 구성할 필요가 없으며 유한요소법처럼 복잡한 지형의 자유 경계면 적용이 쉽다는 것이다.

위와 같은 방법을 이용한 수치 모형 계산에서는 계산시간과 비용을 고려하여 실제 전파가 일어나는 반무한 영역이 제한되어 유한한 영역의 경계를 가지게 된다. 때문에 관심 영역의 유한경계에 도달한 파는 반무한 매질의 전파에서는 존재하지 않는 반사파를 생성한다. 유한경계에서 발생하는 인공반사파를 제거하기 위하여 과거에는 주로 감쇠조건(Cerjan *et al.*, 1985)와 흡수경계조건(Clayton and Enquist, 1977)과 같은 알고리듬이 사용되었다. 인공반사파를 획기적으로 줄일 수 있고 안정적인 경계조건으로 PML (Perfectly Matched Layer)경계조건이 개발(Brenger, 1994)된 이후로 PML 적용에 관한 많은 연구들(조창수와 이희일, 2009; Roden and Gedney, 2000; Komatitsch and Marin, 2007; Martin *et al.*, 2008; Festa and Vilotte, 2005)이 진행되었다.

고전적인 PML은 파동을 축에 대하여 수직으로 입사하는 성분과 수평성분들로 나누어 파동장을 계산하는 방법이었다. Festa와 Vilotte (2005)은 고전적인 PML을 이용한 방법으로 속도-응력 변분식에 SEM에 적용하는 알고리듬을 개발하여 좋은 결과를 보여주었다. 하지만 고전적인 알고리듬은 파동 방정식을 분리하고, 메모리 증가를 가져오는 단점을 가지고 있었다. 또한 장시간 수치 계산에 있어 CFS-PML (Complex Frequency Shifted Perfectly Matched Layer) (Correia and Jin, 2005; Komatitsch and Martin, 2007; Martin *et al.*, 2008; Martin *et al.*, 2010)과 비교하였을 때 안정성이 떨어지는 단점이 있다. 고전적인 PML의 장시간 모사 계산시 안정성 문제를 해결하고 성능이 뛰어난 방법으로 M-PML (Multiaxial PML)이라는 방법을 Meza-Fajardo 등(2008)이 SEM에 개발하여 적용하였다. M-PML은 파동의 전파 방향에 대하여 파동장을 지수적으로 감쇠시킨다는 것이다. Meza-Fajardo 등(2008)의 M-PML도 역시 고전적인 PML과 마찬가지로 분리된 파동방정식에 적용하였다.

파동장을 분리하여야 하는 단점을 피하기 위하여 CPML (Convolutional Perfectly Matched Layer) 경계조건을 Komatitsch와 Marin (2007)과 조창수와 이희일(2009)는 각각 표준 엇갈린 격자법과 회전된 엇갈린 격자법에 적용하여 좋은 결과를 얻었다. 또한 CPML방법을 속도-응력 변분식을 이용한 SEM에 Martin 등(2008)이 2차원 수치모사에 적용하여 좋은 결과를 보여주었다. Correlia와 Jin (2005)은 전자기파 파동방정식에 유한차분법을 구현할 때 고차 PML을 적용하기 위하여 ADE (Auxiliary Differential Equation)방정식으로 PML을 구현하였다.

이 연구에서는 CFS-PML을 ADE로 변경하여 파동장을 분리하지 않고 속도-응력 변분식을 적용한 3차원 SEM을 구현하였고, ADE-PML 경계조건의 성능을 살펴보았다. 또한 구현된 수치 알고리듬을 북한 핵실험 위치 자료에 대한 파동 모사 실험을 통해 복잡한 지형에서의 적용성과 PML의 안정성을 검토하였다.

이 론

SEM을 이용한 파동모형 계산은 일반적인 변분식을 이용하여 계산을 하게 된다. SEM을 이용한 파동 모형 계산에서도 유한경계조건에 의한 인공적인 반사파를 제거하기 위하여 흡수경계조건을 적용하여야 한다. 그러나 일반적인 흡수경계조건만으로는 유한경계에서 반사파를 제거하는 것이 충분하지 못하기 때문에 효과적으로 제거할 수 있는 CFS-PML을 적용하였다. 이러한 CFS-PML을 적용하기 위하여 SEM 변분식은 속도-응력 파동 변분식을 적용하였다.

속도-응력 변분식을 이용한 SEM

속도-응력에 대한 파동 방정식은 다음과 같다(Festa and Vilotte, 2005; Martin *et al.*, 2008).

$$\rho\dot{\mathbf{V}} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f},\ \rho\dot{\mathbf{u}} = \rho\mathrm{V},\quad \partial_t\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V} \tag{1}$$

단, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x},t)$, 내부경계조건이다. 이때, $\mathbf{u}$는 변위 벡터, $\mathbf{V}$는 속도 벡터, $\boldsymbol{\sigma}$는 응력, $\mathbf{f}$는 송신원, ρ밀도, $\mathbf{C}$는 탄성계수를 나타낸다.

식 (1)에 변분법을 적용하였을 때

$$\int\rho\mathbf{w}\cdot\partial_t\mathbf{V}\,dv = \int\mathbf{w}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dv + \int\mathbf{w}\cdot\mathbf{t}\,ds + \int\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}\,dv \tag{2}$$

$$\int\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_t\boldsymbol{\sigma}\,dv = \int\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V}\,dv \tag{3}$$

약형식(weak form)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int\rho\mathbf{w}\cdot\partial_t\mathbf{V}\,dv = -\int\nabla\mathbf{w}\colon\boldsymbol{\sigma}\,dv + \int_{\Gamma^{int}}\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds + \int_{\Gamma^{est}}\mathbf{w}\cdot\mathbf{t}\,ds + \int\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}\,dv \tag{4}$$

이 때 $\mathbf{w}$와, $\boldsymbol{\tau}$는 임의의 시험 벡터(test vector)가 된다.

수치모형의 유한성에 의해 발생한 인공적인 반사파를 제거하기 위하여 흡수경계조건을 적용하면 다음과 같다. $\mathbf{t}$는 흡수경계조건인 응력을 나타낸다.

$$\mathbf{t} = \mathrm{c_p}\rho[\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}]\hat{\mathbf{n}} + \mathrm{c_s}\rho\mathbf{V_T},\ \mathbf{V_T} = \mathbf{V} - [\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}]\hat{\mathbf{n}} \tag{5}$$

변분식을 이용한 SEM을 적용하여 모든 요소에 대한 조립을

하게 되면 전체 행렬에 대한 다음과 같은 행렬 미분 방정식이 이루어지게 된다.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{\Sigma} = \mathbf{F},\ \dot{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{K}\mathbf{V} \tag{6}$$

이산 시간에 대하여 위의 식은 아래 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\mathbf{\Sigma}}^{n+1/2} = \mathbf{K}\mathbf{V}^{n+1/2},\ \mathbf{\Sigma}^{n+1} = \mathbf{\Sigma}^{n} + \mathbf{K}\mathbf{V}^{n+1/2}\Delta t$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}^{n+1} + \mathbf{\Sigma}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} \tag{7}$$

M은 전체 질량 행렬, **K**는 전체 강성행렬을 나타낸다.

이 때 $\mathbf{V}^{n+3/2}$ 속도 값은 아래와 같은 차분에 근사를 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{V}^{n+3/2} = \mathbf{V}^{n+1/2} + \dot{\mathbf{V}}^{n+1}\Delta t \tag{8}$$

위의 식으로부터 $\dot{\mathbf{\Sigma}}^{n+1/2} = \mathbf{K}\mathbf{V}^{n+1/2}$ 에서 $\mathbf{\Sigma}^{n+1}$ 인 응력을 구하고 속도 값을 구하기 위하여 $\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}^{n+1} + \mathbf{\Sigma}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1}$ 에서 $\dot{\mathbf{V}}^{n+1}$ 인 가속도 값을 구한다. 가속도에 대한 적분을 통해서 속도인 $\mathbf{V}^{n+3/2}$ 을 구할 수 있다. 그러므로 두 식의 재귀를 통해서 속도-응력에 대한 변분식 해를 풀 수 있다. 앞의 식에서도 알 수 있지만 프로그램 구현상 일반 변분식을 이용한 방법에서는 속도-변위-가속도 메모리가 필요하지만 속도-응력 변분식을 이용한 방법에서 속도와 응력에 대한 메모리가 필요하다.

SEM에서 CFS-PML 경계조건 적용

고전적인 PML은 감쇠지역에 대한 수직성분과 수평성분으로 분리하는 과정이 필요하지만 CFS-PML을 이용한 ADE-PML은 고전적인 PML처럼 성분 분리를 할 필요가 없이 사용함으로써 기억 용량을 줄일 수 있고 파동방정식 자체를 변형할 필요가 없다는 장점이 있다.

PML은 공간적인 변수에 복소수 영역을 취함으로써 공간과 시간에 따라 파동을 감쇠시키고자 하는 것이다. x 방향에 대한 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{9}$$

이 때 $s_x = k_x + \frac{d_x}{\alpha_x + i\omega}$ 이고, d_x는 damping 축 단면, α_x는 감쇠상수, 그리고 $k_x \geq 1$, ω는 주파수를 나타낸다. $k_x = 1$, $\alpha_x = 0$ 이면 이는 고전적인 PML과 동일하게 된다.

$$\frac{1}{s_x} = \frac{1}{k_x} - \frac{d_x}{k_x^2}\frac{1}{(d_x/k_x + \alpha_x) + i\omega} \tag{10}$$

이를 다시 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{k_x}\frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \tag{11}$$

이 때, ψ_x는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi_x = \frac{d_x}{k_x^2}\frac{1}{(d_x/k_x + \alpha_x) + i\omega}\frac{\partial}{\partial x} \tag{12}$$

위의 식을 다시 전개하여 시간영역으로 변환을 하게 되면 아래와 같다.

$$\left[(d_x/k_x + \alpha_x) + \frac{\partial}{\partial t}\right]\psi_x = \frac{d_x}{k_x^2}\frac{\partial}{\partial x} \tag{13}$$

위의 식을 PML 적용을 위한 부가방정식(ADE; Auxiliary Differential Equation)이라 불린다. 위의 식을 시간에 대한 차분식으로 표현하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\psi_x^{n+1} = b(x)\psi_x^n + a(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1/2} \tag{14}$$

단, $b(x) = \frac{2-(\alpha_x + d_x/k_x)\Delta t}{2+(\alpha_x + d_x/k_x)\Delta t}$, $a(x) = \frac{1}{k_x^2}\frac{2d_x\Delta t}{2+(\alpha_x + d_x/k_x)\Delta t}$, 이다.

한편, 속도-응력에 대한 파동 방정식 변분식에 CFS-PML 연산자를 적용한 변분식은 다음과 같다.

$$\int \rho\mathbf{w}\cdot\partial_t\mathbf{V}\,dv = \int \mathbf{w}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dv - \int \mathbf{w}\cdot\psi(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\,dv + \int \mathbf{w}\cdot\mathbf{t}\,ds + \int \mathbf{w}\cdot\mathbf{f}\,dv \tag{15}$$

$$\int \boldsymbol{\tau}\cdot\partial_t\boldsymbol{\sigma}\,dv = \int \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V}\,dv - \int \boldsymbol{\tau}\cdot\psi(\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V})dv \tag{16}$$

이를 다시 쓰면,

$$\int \rho\mathbf{w}\cdot\partial_t\mathbf{V}\,dv = -\int \nabla\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dv + \int_{\Gamma^{ext}}\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds - \int \mathbf{w}\cdot\psi(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\,dv + \int \mathbf{w}\cdot\mathbf{t}\,ds + \int \mathbf{w}\cdot\mathbf{f}\,dv \tag{17}$$

$$\int \boldsymbol{\tau}\cdot\partial_t\boldsymbol{\sigma}\,dv = \int \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V}\,dv - \int \boldsymbol{\tau}\cdot\psi(\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V})dv \tag{18}$$

위의 변분식에서 시간차분에 대한 CFS-PML에 대한 성분을 표현하면 다음과 같다.

$$\left(\int \boldsymbol{\tau}\cdot\psi(\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V})dv\right)^{n+1} = \left(\int \boldsymbol{\tau}\cdot b(\mathbf{x})\psi(\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V})dv\right)^{n} + \left(\int \boldsymbol{\tau}\cdot a(\mathbf{x})(\mathbf{C}\colon\nabla\mathbf{V})dv\right)^{n+1/2} \tag{19}$$

$$\left(\int \mathbf{w}\cdot\psi(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})dv\right)^{n+1} = \left(\int \mathbf{w}\cdot b(\mathbf{x})\psi(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})dv\right)^{n} + \left(\int \mathbf{w}\cdot \mathrm{a}(\mathbf{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})dv\right)^{n+1/2}$$
$$= \left(\int \mathbf{w}\cdot b(\mathbf{x})\psi(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})dv\right)^{n} - \left(\int \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla(a(\mathbf{x})\mathbf{w})dv\right)^{n+1/2} + \left(\int a(\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{w}\,ds\right)^{n+1} \tag{20}$$

수치 실험 및 결과

속도-응력 SEM알고리듬 검증

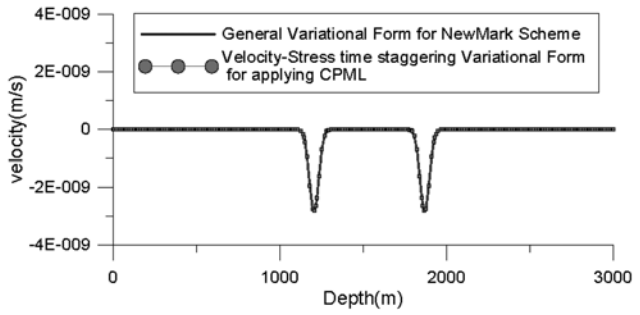

Fig. 1. Comparison of the numerical simulation results using general variational form and velocity-stress variational form at 0.8 sec for 1D acoustic model. Velocity is 3465 m/s.

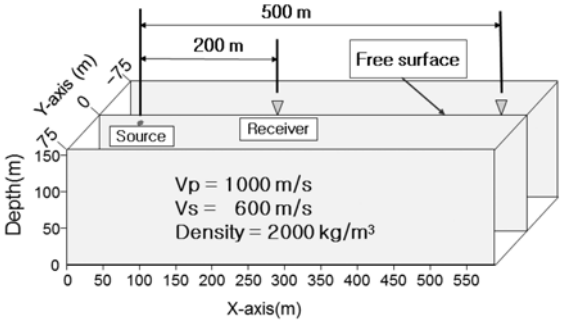

Fig. 2. 3-D homogeneous elastic model with free surface.

SEM에서 일반적인 변분식과 속도-응력 변분식 비교를 위하여 먼저 1차원 음향파 모델에 대하여 비교를 수행하였다. 길이가 3 km이고, 속도가 3465 m/s인 모델에 대하여 가운데 위치에 송신원을 두고서 0.8 sec때의 스냅샷 결과가 Fig. 1에 보이고 있다. 일반적인 변분식을 이용한 결과와 속도-응력 변분식을 이용한 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 그러므로 속도-응력 변분식 알고리즘은 파동방정식에 적용할 수 있음을 알 수 있다.

3차원 속도-응력 변분식을 적용한 SEM의 타당성 검증을 위하여 해석적인 해를 구할 수 있는 Gar6more3D(Diaz *et al.*, 2011) 2.0버전의 준 해석해와 결과를 비교하고자 하였다. 준 해석적인 해와의 비교를 위하여 반무한 매질을 가정하였다. 실험 모형은 Fig. 2와 같이 설정하였다. 반무한 매질의 층은 P파 속도를 1000 m/s, S파 속도는 600 m/s 그리고 밀도는 2000 Kg/m^{3}으로 설정하였다. 그리고 지표면은 자유 경계면을 적용하였다. 수치 실험에서 X-방향으로 128개 요소, Y방향으로 64개 요소, Z방향으로 30개 요소를 설정하였다. 송신원의 주 주파수는 8 Hz이고 송신원의 위치는 X방향으로 60 m, Y방향으로 0 m, 깊이로 5 m에 두었다. 송신원으로 모멘트 텐서의 대각성분을 이용하여 P파 송신원을 모사하였다. 이 때 각 수신기의 위치는 지표면의 송신원에서 200 m, 500 m에 두었다. Fig. 2에 수치 실험을 위한 모형을 보여주고 있다.

여기서 준 해석해는 Diaz 등(2011)이 구현한 Gar6more3D 프로그램이며, Carniard De Hoop 방법으로 구현을 한 것이다. 수치 모형에 지표면이 존재할 경우, 지표면과의 경계면에서 레

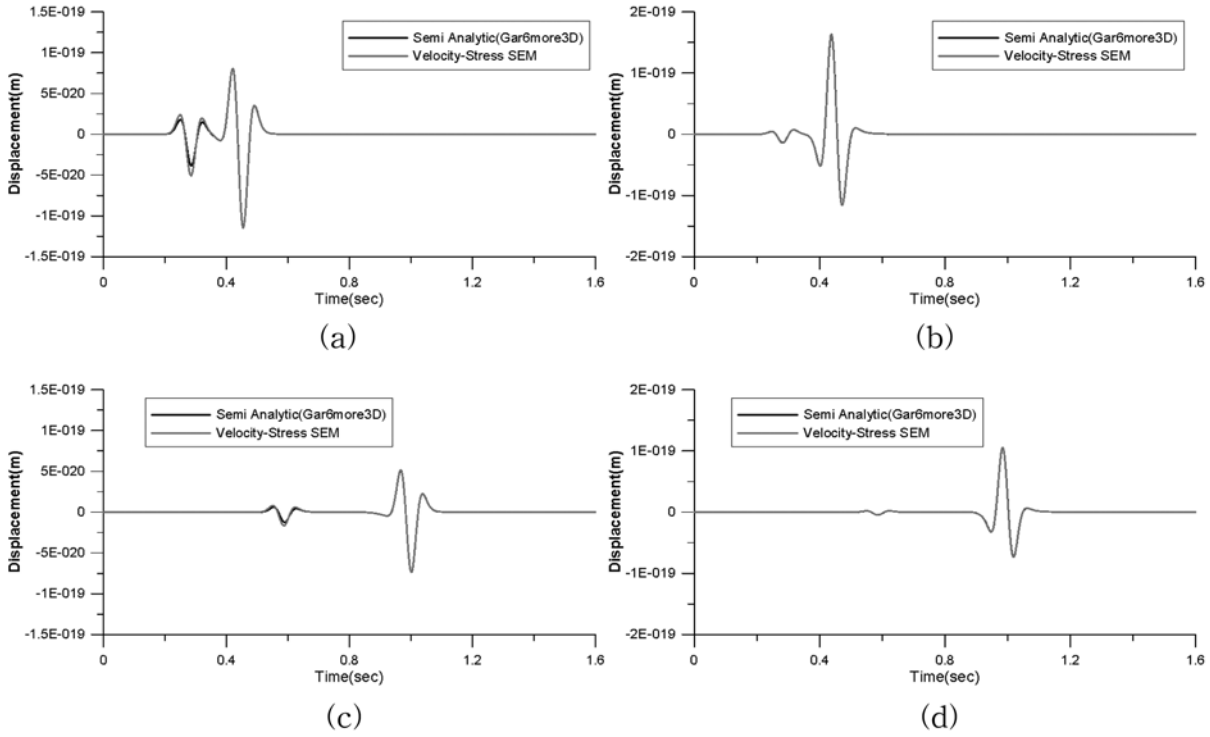

Fig. 3. Comparison of x-horizontal (a, c) and vertical (b, d) components between semianalytic (Gar6more6D) and numerical solutions of elastic waves using velocity-stress SEM with surface boundary at 200 m (a, b) and 500 m (c, d).

일리파가 발생하며 이러한 레일리파의 수치 분산으로 인해 원거리에서 파동의 정확성이 떨어지게 된다(조창수와 이희일, 2009). 일반적으로 공간 2차 차분을 사용하였을 때 지표면에서 파장당 최소 15~30개 정도의 격자를 주어야 좋은 결과를 얻을 수 있다(Levander, 1988; Bohlen and Saenger, 2006; Basabe and Sen, 2007). SEM 모델링에서는 분산효과를 최소한으로 하기 위해서 한파장당 약 15개의 요소점이 되도록 구현하였다. 또한 SEM 수치 계산의 정확성을 위해서 유한경계에서 반사파를 제거하기 위해서 지표면을 제외하고 모든 유한경계에 3개 요소 PML을 적용하였다.

Fig. 3에는 해석해와 속도-응력 변분식 SEM 결과의 수평 x방향 성분과 수직 방향 성분이다. 수평 y 방향 성분은 균일한 매질에 대한 P파 송신원의 특성에 의해 값이 나타나지 않으므로 도시를 생략하였다. Fig. 3에서 수평성분의 P파가 Gar6more3D의 해보다 약간 크게 나오며, 레일리파는 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 이를 통해 속도-응력 변분식을 이용한 SEM 방법으로 정밀한 파동 모사가 가능함을 알 수 있다.

ADE-PML 적용과 안정성

앞의 Fig. 1에서 1차원 음향파 구조에서 속도-응력 변분법에 CFS-PML을 적용한 결과가 Fig. 4에 도시되어 있다. 경계조건의 효율성을 보기위하여 흡수경계조건과 ADE-PML 경계조건을 비교하였다. 2개의 요소에 10개의 요소점을 사용하였다. PML의 변수는 $d_x(0) = -(N_{POWER}+1) \times V_p(\max) \times \log(R_{coef}) /(2 \times L_{PML})$, $\alpha_x = \alpha_{\mathrm{mix}} \times (1 - x/L_{PML})^2)$, $\alpha_{\max} = \pi \times f_m$가 사용되었다. 이때, N_{POWER}는 2, f_m은 송신원의 주 주파수이고, R_{coef} = 0.001 반사계수를 나타낸다. 결과를 살펴보면 CFS-PML을 적용한 ADE-PML 결과가 매우 효율적으로 유한경계 반사파를 줄이는 것을 알 수 있다.

3차원일 때의 속도-응력 변분식 SEM에 ADE-PML을 적용하였을 때의 유한경계에서 발생하는 반사파의 제거 성능을 파악하고자 하였다. 모형의 크기는 시작점 위도 36°, 경도 126°에서 모형의 크기는 x-방향, y-방향으로 1°이고, 깊이는 40 Km를 가정하였다. 속도구조는 균질 매질로 P파 속도는 7200 m/s, S파 속도는 4140 m/s이고 밀도는 2900 Kg/m^{3}을 사용하였다. 지표면은 자유경계면으로 가정하였다. 송신원의 위치는 송신원의 위치는 위도 36.6°, 경도 126.7°, 깊이는 5 km 위치에 두었다. 송신원은 1.0 Hz 주 주파수를 가지는 리커(ricker) 파형을 이용하였고 P파 송신원의 크기는 지진 규모 5.0 정도를 Kanamori(1977)에 의하여 계산한 값을 사용하였다. PML의 변수는 앞서와 동일하며, 사용된 요소는 3개이고, GLL 점들은 7개를 사용하였다. 대체로 GLL 5개를 사용하지만(Komatitsch와 Tromp, 1999), 고차의 근사를 사용할 수 록 CFL조건(Courant-Friedrichs-Lewy condition)이 엄격히 적용되어 장시간 모사 수행 시 발산 확률이 크기 때문에, ADE-PML이 적용된 SEM의 장시간 모사 시의 발산 유무 또한 알아보고자 7개의 GLL을 사용하였다.

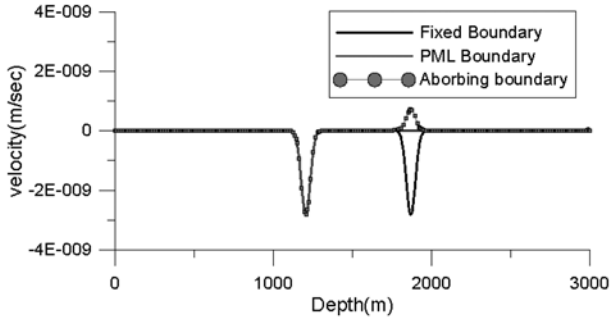

Fig. 4. Comparison of snapshots. from the 1-D acoustic wave propagation. The black solid line is the results with the Dirchlet boundary, and the red dotted line is the result with the absorbing boundary condition, and the blue solid line is the result with the ADE-PML.

ADE-PML의 성능은 모델 내에 남아 있는 에너지 양을 가지고 알아보고자 하였다. 에너지 계산은 아래식과 같다.

$$E = 1/2 \int_\Omega \rho |\mathbf{v}|^2 d\Omega + 1/2 \int_\Omega T_{ij}\varepsilon_{ij} d\Omega$$

이 때, Ω는 도메인 체적, ρ는 밀도, $|\mathbf{v}|$는 속도 벡터 크기, T_{ij}는 응력, ε_{ij}는 변형률을 나타낸다. 에너지는 운동에너지(Kinetic energy)와 위치에너지(Potential energy)의 합으로 나타낸다.

Fig. 5에는 3차원 탄성파 모델에 대하여 속도-응력 변분식에 흡수 경계조건과 ADE-PML 경계조건을 적용하였을 때의 10 sec의 수직성분 스냅샷 결과를 나타낸 것이다. Fig. 6은 지표면에서의 스냅샷이고 Fig. 7은 Fig. 5에 보이는 바와 같이 y축 중앙에서 x축 방향으로 수직으로 자른 단면의 스냅샷이다. 3차원으로 확장하였을 때도 역시 ADE-PML이 흡수경계조건 보다 매우 효율적으로 유한경계의 반사파를 제거할 수 있음을 알 수 있다. 10 sec일 때의 자료를 살펴보면 이는 P파 송신원에서 나온 직접파가 보이고 이후에 내부에 잘 보이지 않는 원형의 파가 보이는데 이것은 레일리파이다. 흡수 경계조건을 사

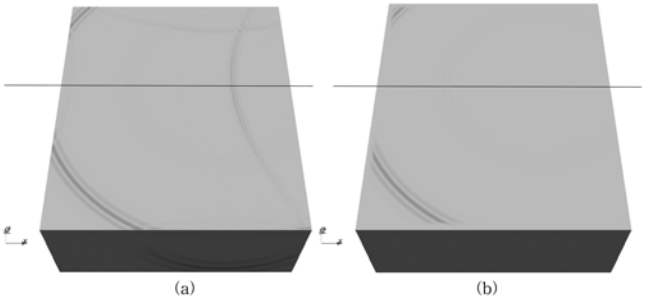

Fig. 5. 3-D snapshots of the vertical component at 10 sec with (a) the absorbing boundary condition and (b) ADE-PML. The model ranges from 36° to 37° in the latitude and from 126° to 127° in the longitude, and the depth of model is 40 km.

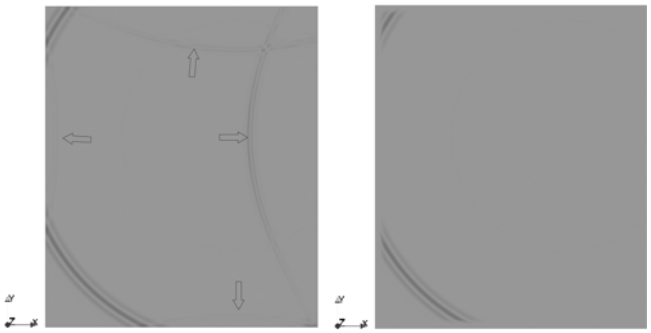

Fig. 6. 2-D snapshots of vertical component of wave propagation simulation using (a) the absorbing boundary condition and (b) ADE-PML at 10 sec at surface. Artificial waves reflected from finite boundary was shown when absorbing boundary condition was applied. The marks of arrow show waves reflected from finite boundary.

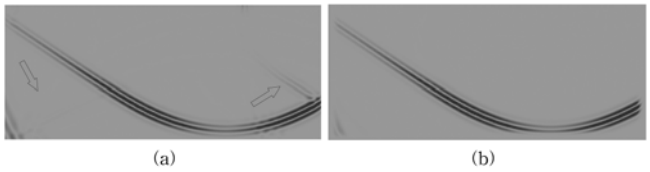

Fig. 7. 2-D snapshots of vertical component of wave propagation simulation using (a) the absorbing boundary condition and (b) ADE-PML at 10 sec sliced along x-axis. Artificial waves reflected from finite boundary was shown when absorbing boundary condition was applied. The marks of arrow show waves reflected from finite boundary.

용하였을 때 유한경계에서 P파가 반사되어 나오는 것을 볼 수 있다. Fig. 7을 보면 크게 보이는 파는 지표면에서 반사된 S파와 P 직접파와 반사된 S파 사이의 선두파를 보여주고 있다. 역시 수직 단면상에서도 ADE-PML이 매우 효율적으로 작동됨을 알 수 있다. ADE-PML이 적용되었을 때 결과는 육안으로는 유한경계에 의한 반사파가 있는지 파악하기 어려울 정도로 정밀한 파동 모사가 가능함을 알 수 있다.

Fig. 8에는 이들 모형에 대해 시간에 따른 에너지를 계산한 결과를 보여주고 있다. 계산된 에너지 결과를 보면 파동이 유한경계에 도착하는 시간 이후에 흡수경계조건과 ADE-PML결과를 살펴보면 ADE-PML의 경우 에너지가 급속도로 줄어드는 것을 알 수 있다. 대부분 에너지가 40 sec일 때 사라지는 것을 알 수 있다. 이에 비하여 흡수 경계조건의 경우 점진적으로 에너지가 감소되는 것을 알 수 있다. 하지만 7개의 고차 GLL을 사용함에 따라 약 16000 단계 스텝에서 ADE-PML의 경우 에너지가 점진적으로 커지는 것을 볼 수 있다. 이는 고차 GLL 점을 사용하여 ADE-PML을 적용한 속도-응력 SEM 방법은 장시간 수치 계산에 있어서 해가 불안정해짐을 나타낸다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 M-PML과 같은 안정적인 방법이 필요하다는 것을 보여준다.

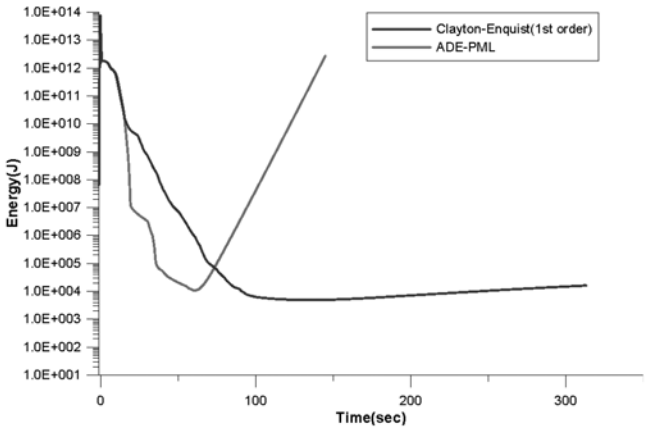

Fig. 8. Energy that is summed with potential and kinetic energy inside a model calculated at each time step. ADE-PML reduced energy very efficiently and was stable at the long time simulation. Simulation with the 1st order absorbing boundary was finished at 80,000 time steps although 7 GLL points were used. Simulation with ADE-PML gradually blew up with linear trend of logarithm of energy after energy was decreased dramatically until about 16000 time steps.

북한 핵실험 위치에서의 ADE-PML을 적용한 SEM 파동 전파 모사

폭발성 지진원 파동 모사에서 지형에 의한 지진동 수치모사를 위하여 2009년에 발생하였던 북한 핵실험을 가정하여 수행하였다. 북한 핵실험의 자료를 살펴보면 P파가 매우 강함을 알 수 있다. 하지만 이후에 상대적으로 S파가 작고 이후에 매우 강한 표면파가 발달하는 것을 알 수 있다. 특히 Lg파가 발달하는 것을 알 수 있다(지헌철 등, 2010). Lg파는 P파 송신원인 경우 등방성 균질모형에서는 발생이 어렵다. P파 송신원에 의하여 Lg파가 발생하는 원인은 지표면의 지형에 의하여 P파가 S로 변환되어 다시 Lg파로 발달하거나 또는 송신원 인근의 수평적인 속도 변화로 인하여 S파가 지질 속도 구조에 의하여 다시 Lg파가 발생하는 것으로 보고되어져 있다(Rodgers *et al.*, 2010). 이 연구에서는 Lg파의 생성 해석에 대한 내용은 주제 범위를 벗어난 논점이므로 ADE-PML을 적용한 속도-응력수치모사를 통해 Lg파의 생성 가능성에 대한 범위로만 제한하고자 한다.

폭발성 지진원에 의하여 Lg파가 발생하는 원리를 살펴보기 위하여 2009년 북한 핵실험을 대상으로 하고, 모멘트 규모는 4.3으로 가정하였다. 지진원 위치는 위도 41.297°, 경도 129.095°로 설정하였다. 모형의 크기는 남북방향으로 41.0°~41.6°, 동서방향으로 128.8°~129.4°로 설정하였다. 동서방향으로 144개, 남북방향으로 144개의 요소를 사용하였다. 수직방향으로 36개의 요소를 사용하였다. 각 요소는 각 방향으로 5개의 노드점을 이용하여 계산하였다. 송신원의 위치는 해발로부터 –500 m로 설정하였다. 지형면은 약 100m간격의 지형자료를 사용하였다. 지형자료로부터 지형면에 약 500 m는 저속도로 가정하였다. Fig. 9(b)에 지형자료, 모델의 크기, 송신원의 위치를 보

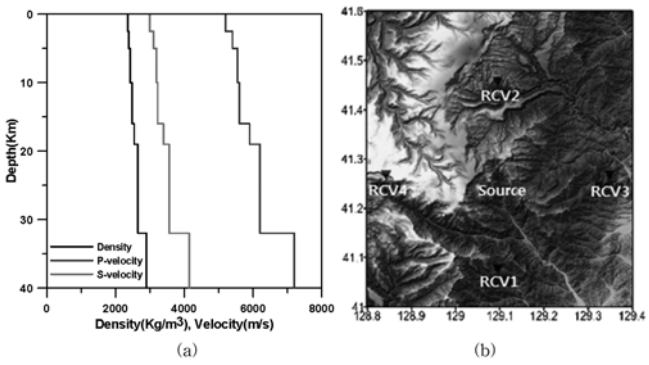

Fig. 9. Velocity structure (a) and locations of nuclear explosion test and receivers on the map of topography (b).

여주고 있다.

현재 한반도에 지각 속도구조에 대한 많은 연구의 결과로 속도가 많이 알려져 있지만 이 연구에서는 Fig. 9(a)와 같은 1차원 한반도 속도 구조를 가정하여 사용하였다. 이를 토대로 S파 속도는 $1/\sqrt{3}$ 배로 그리고 밀도는 맨틀의 밀도와 지각밀도 사이의 값을 추정하여 만들었다. 모사를 위한 격자시간은 0.0006 sec를 사용하였다. 송신원은 약 0.5 sec의 지속시간을 가지는 가우스 함수를 사용하였다.

Fig. 10에는 12.1 sec 때의 수직성분 3차원 스냅 샷을 보여주고 있다. Fig. 11에는 동서방향으로 수직으로 자른 단면의 수직성분을 보여주고 있다. 폭발성 진원과 지표면 경계조건으로 인한 레일리파가 지표면을 따라 잘 발달하는 것을 알 수 있다. 또한 지형을 따라 레일리파가 전파하는 것을 알 수 있다. 지표면에서 P파가 S파로 변환되어 반사되는 것을 알 수 있다. 이러한 S파와 지표면을 따라 발생된 레일리파가 지형을 따라 진행할시 지형의 변화로 인하여 다시 S파로 전파하는 것을 Fig. 11에서 볼 수 있다. P파의 수직성분이 레일리파에 비하여

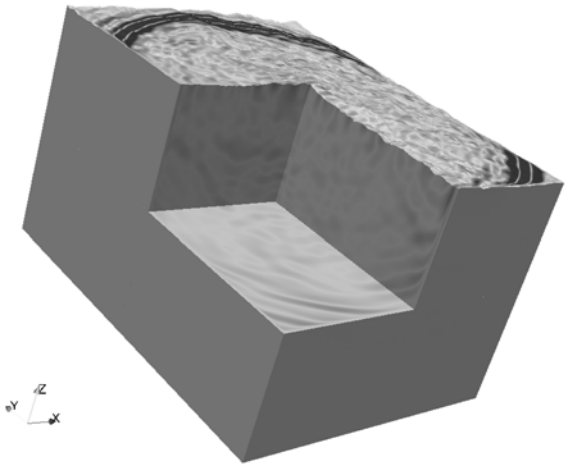

Fig. 10. 3-D snapshots of the vertical volume component at 12.1 sec. Artificial waves generated from finite boundaries were very efficiently eliminated by ADE-PML.

상대적으로 작은 성분을 보여주고 있다. 또한 지형 변화에 의하여 산란된 레일리파의 일부분이 앞 선 레일리파의 뒤를 따라서 전파하는 것을 볼 수 있고, 하부로 S파 형태로 전파하는 것을 알 수 있다. 레일리파의 일부부분이 고지대에서 저지대로 전파할시 일부분이 S파 형태로 지중으로 전파해나가는 것을 알 수 있다. 그리고 지형의 변화로 인하여 P파나 레일리파의 회절현상에 의한 코다형태의 파동이 전파하는 것을 알 수 있다. Fig. 12에는 Fig. 8의 (b) 위치에서의 수직(vertical), 방사(radial), 횡(transverse)성분을 보여주고 있다. P파송신원의 경

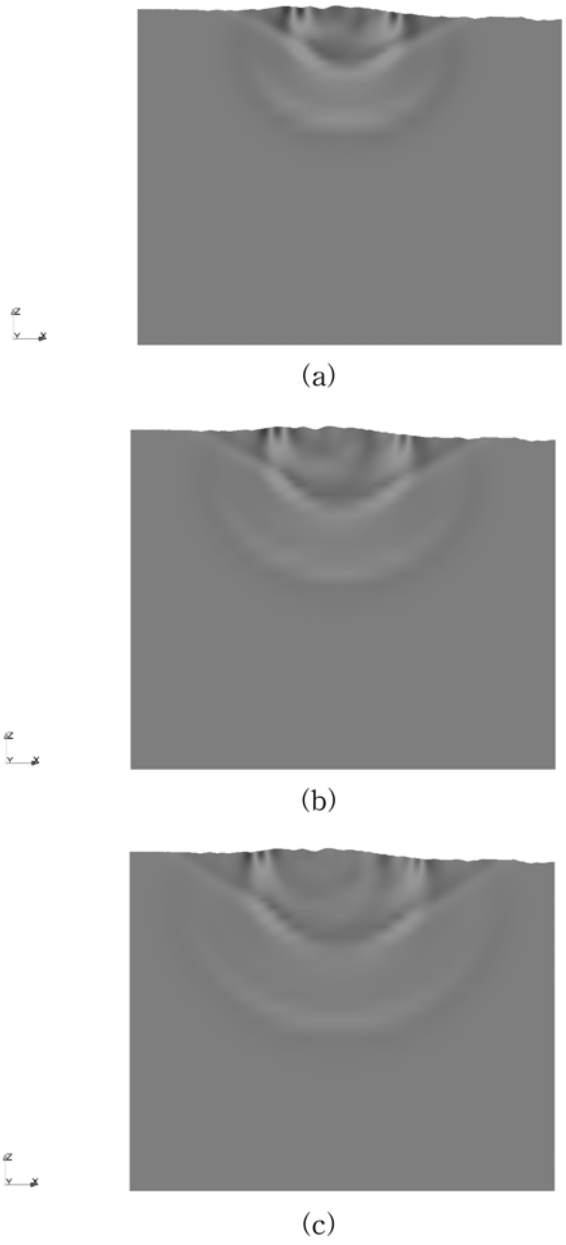

Fig. 11. Snapshots at 3.6 sec (a), 4.2 sec (b), 4.8 sec (c) were sliced along west-east direction through source point. Rayleigh waves were scattered by topography of surface and converted into S-waves.

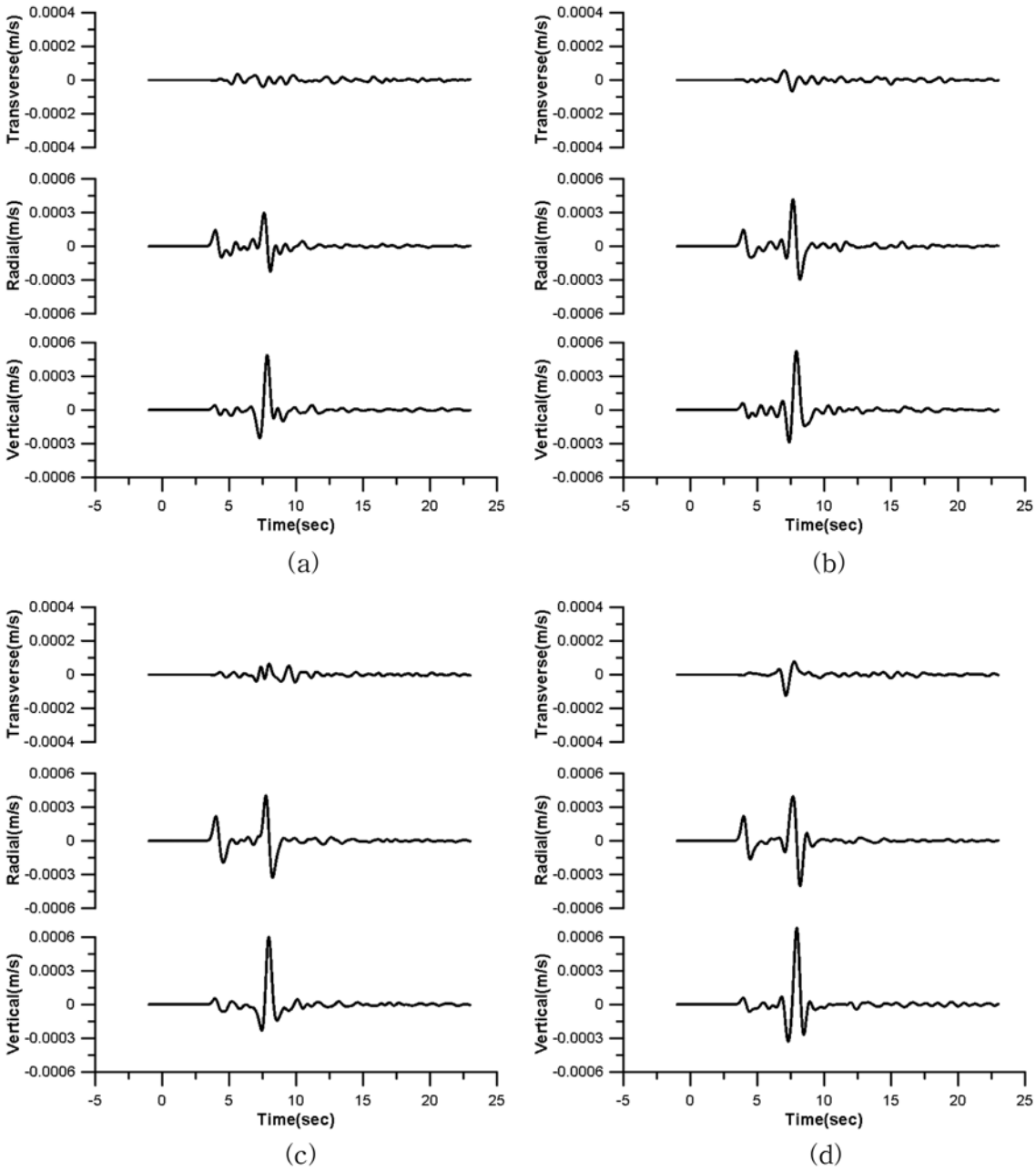

Fig. 12. X, Y, Z components of Synthetic seismograms at stations near source to simulate the wave propagation by nuclear explosion of north korea were transformed into transverse, radial and vertical components. Receivers are located at RCV1 (a), RCV2 (b), RCV3 (c) and RCV4 (d), respectively.

우 횡성분은 0이 되어야 하지만 지형 효과 등에 의하여 횡성분이 커진 것을 알 수 있다. 이와 같이 생성된 S파가 지표면과 지중의 하부 매질에 적절한 경계조건에 의하면 러브파가 발생될 수 있음을 확인할 수 있다.

결 론

탄성파 수치 모사는 지진 발생시 지진파 전달 특성 및 탐사에서의 전파형 역산 등과 같이 많은 분야에 널리 사용되고 있다. 특히 정확한 탄성파 수치 모사가 매우 중요하다고 하겠다. 정확한 수치와 지형모형도 쉽게 구현할 수 있는 SEM에 PML 경계조건을 적용하기 위하여 속도-응력 변분법을 SEM에 구현하였고 비분리 PML 적용을 위하여 ADE-PML을 구현하였다. ADE-PML을 적용한 3차원 속도-응력 SEM 알고리듬을 이용한 탄성파 수치 실험 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 일반 변분식 SEM과 속도-응력 변분식 SEM가 동일한 것을 확인하였고, 자유경계면 조건에서 폭발성 진원에서 속도-응력 변분법으로 구현된 SEM 해와 Gar6more3D에서 구한 해

석해와 거의 일치하였다.

(2) ADE-PML적용된 SEM과 Clayton과 Enquist(1977)의 흡수경계조건을 적용하여 모형에 남아 있는 에너지를 비교하였을 때, ADE-PML이 매우 효율적으로 유한경계에 의한 반사파를 잘 제거하여 정밀한 수치 파동장을 얻을 수 있었다.

(3) ADE-PML이 적용된 속도-응력 SEM을 지형을 고려한 북한 핵실험 위치에서 폭발성 송신원을 이용한 수치실험을 통하여 ADE-PML이 매우 효율적으로 인공반사파를 제거할 수 있음을 확인하였고 지형 효과에 의해 러브파가 발생할 수 있는 성분이 생성됨을 확인할 수 있었다.

향후 구현된 알고리듬은 전파형 역산이나 수치 계산을 통한 지진파 해석에 있어 유용하게 사용될 수 있을 것으로 보인다.

감사의 글

이 연구는 한국지질자원연구원 주요사업인 '한반도 동부지역 잠재적 위험 지진원 평가'과제의 지원으로 수행되었다.

참고문헌

조창수, 이희일, 2009, 회전된 엇갈린 격자를 이용한 탄성파 모델링에의 CPML 경계조건 적용, 지구물리와 물리탐사, **12**, 183-191.

지헌철, 박정호, 김근영, 제일영, 신동훈, 신진수, 조창수, 이희일, 2010, 북한 핵실험 모니터링: 1, 2차 비교, 지구물리와 물리탐사, **13**, 243-248.

Appelo, D., and Petersson, N. A., 2008, A stable finite difference method for the elastic wave equation on complex geometries with free surfaces, *Comm. Comput. Phys.*, **5**, 84-107.

Basabe, J. D. D., and Sen, M. K., 2007, Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elsatic wav equations, *Geophyscis*, **72**, T81-T95.

Brenger, J. P., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys*., **114**, 185-200.

Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., and Reshef, M., 1985, A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **50**, 705-708.

Clayton, R., and Enquist, B., 1977, Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Equations, *BSSA*, **67**, 1529-1540.

Correia, D., and Jin, J.-M., 2005, On the Development of a Higher-Order PML, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **53**, 4157-4163.

Diaz, J., Ezziani, A., and Le Goff, N., 2011, Version 2.0 Gar6more3D, http://web.univ-pau.fr/~jdiaz1/gar63DCecill.html.

Ely, G. P., Day, S. M., and Minster, J.-B., 2008, A support-operator method for visco-elastic wave modeling in 3D heterogeneous media, *GJI*, **172**, 331-344.

Festa, G., and Vilotte, J. P., 2005, The newmark scheme as velocity-stress time-staggering: and efficient PML implementation for spectral element simulations of elastodynamics, *GJI*, **161**, 789-812.

Kanamori, H., 1977, The energy release in great earthquakes, *J. Geoph. Res.*, **82**, 2981-2987.

Komatitsch, D., and Martin, R., 2007, An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation, *Geophysics*, **72**, SM155-SM167.

Komatitsch, D., and Tromp, J., 1999, Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation, *GJI*, **139**, 806-822.

Komatitsch, D., and Vilotte, J.-P., 1998, The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *BSSA*, **88**, 368-392.

Li, Y. F., and Bou Matar, O., 2010, Convolutional pefectly matched layer for elastic second-order wave equation, *J. Acoust. Soc. Am.*, **127**, 1318-1327.

Martin, R., Komatitsch, D., and Gedney, S. D., 2008, A variational formulation of a stabilized unsplit convolutional perfectly matched layer for the isotropic or anisotropic seismic wave equation, *Comput. Model. Eng. Sci.*, **37**, 274-304.

Martin, R., Komatitsch, D., Gedney S. D., and Bruthiaux, E., 2010, A high-order time and space formulation of the unsplit perfectly matched layer for the seismic wave equation using Auxiliary Differential Equations (ADE-PML), *Comp. Model. Eng. Sci.*, **56**, 17-42.

Meza-Fajardo, K.-C., and Papageorgiou, A.-S., 2008, A non-convolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: stability analysis, *BSSA*, **98**, 1811-1836.

Roden, J. A., and Gedney, S. D., 2000, Convolution PML (CPML): An efficcient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media, *Microwave and Optical Technology Letters*, **27**, 334-339.

Rodgers, A. J., and Pettersson, N. A., and Sjogreen, B., 2010, Simulation of topographic effects on seismic waves from shallow explosions near the North Korean nuclear test site with emphasis on shear wave generation, *J. Geoph. Res.*, **115**, B11309, doi:10.1029/2010JB007707.