

Macro-Element법에 의한 수직배수공법의 FEM해석기법



김 하 영

삼성물산(주) 건설부문
T.A.팀 전문위원
(hy05.kim@samsung.com)

1. 개요

유한요소해석에 있어서 흙과 물의 연성문제를 다루는 방식은 Christian방법(Christian, 1968)과 Sandhu방법(Sandhu and Wilson, 1969)이 널리 알려져 있다. Christian방법은 요소중심에 수두를 대표시키는 방법이며, Sandhu방법은 절점에 수두를 대표시키는 방법이다. 과잉간극수압이 체적변형율의 구속력으로 정의된다는 점에서는 요소중심에 수두를 대표시키는 Christian방법이 자연스럽다. 또한 Christian방법은 수두를 요소중심에 대표시키기 때문에 수두를 절점에 대표시키는 Sandhu방법보다 자유도가 줄어들어 메모리절약과 계산속도가 빨라지는 효과가 있다. 따라서 지반의 유한요소해석 프로그램에서는 Christian방법이 널리 이용되고 있다.

그러나, 지반개량이 이루어진 경우에는 연성문제를 다루기는 더욱 어렵게 된다. 배수공법 타설간격이

1~2m내외의 경우가 대부분이기 때문에 Mesh생성에 문제가 생기고, 수치해석상의 한계에 직면하게 되는 경우가 발생하게 된다. 따라서 수직배수공법을 표현하는 방법으로 수직배수공의 배수효과를 개량구역에 큰 투수계수를 부여하는 Mass Permeability 법(吉国, 1979)이 주로 이용되고 있다. 그러나 Mass Permeability법은 지표면부근에서 과잉간극수압속도가 과대하게 빠르고, 지반심부에서는 느리게 평가되는 경향이 있어 과잉간극수압 소산 과정의 재연에는 한계가 있다.

세끼구치 등(関口 등, 1986)은 이러한 기존의 문제점을 해결할 수 있고, 연직배수공법의 3차원적인 효과를 2차원 평면변형을 조건에서 충실하게 표현할 수 있는 Macro-Element Method를 개발하였다. 히라타 등(平田 등, 2009, 2010)은 Macro-Element Method를 보다 범용성 있게 확장하여, 복잡한 경사 지반, 정삼각형 배치 및 웰 레지스턴스 등을 고려할 수 있게

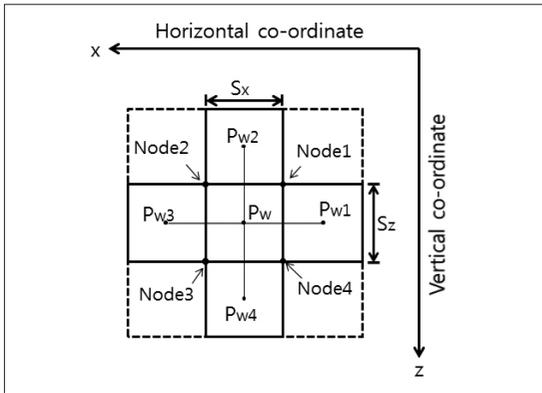


그림 1. 각요소의 간극수압 자유도(関口 등, 1986)

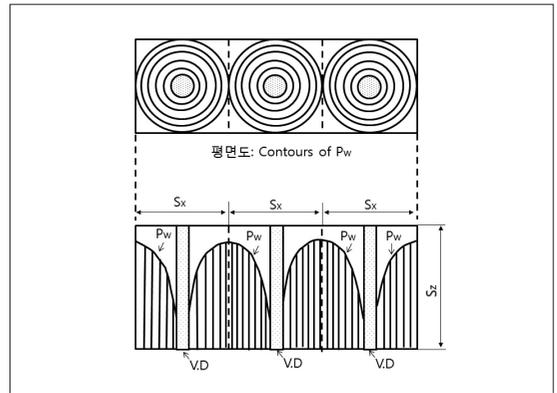


그림 2. 연직배수공의 과잉간극수압분포(関口 등, 1986)

하였다. 향후 수직배수공법의 FEM해석에 Macro-Element방법의 많은 이용이 기대된다.

현재 국내에서는 본 기법이 거의 이용되고 있지 않는 실정이며, Mass Permeability법이 주로 이용되고 있다. 본 기사에서는 세끼구치 등(1986)의 Macro-Element법의 기본적인 정식화 과정을 소개한다.

2. Macro-Element법

평면변형을 압밀해석에서 샌드드레인, 샌드콘팩션 파일, PBD공법 등 수직배수공법의 집배수효과를 충실하게 고려할수 있는 Macro-Element법을 이하에 정리한다. 세끼구치 등(1986)은 Macro-Element의 인접요소가 Macro-Element인 경우를 기본 Macro-Element라 칭하고, 인접요소가 통상의 요소(지반개량이 이루어지지 않은 요소)인 경우를 천이 Macro-Element라 칭하였다. 여기에서는 기본 Macro-Element의 정식화를 설명한 후에 천이 Macro-Element를 설명한다.

2.1 기본 Macro-Element의 정식화 (関口 등, 1986)

세끼구치 등은 離散化 수법으로 요소중심에 수두값

을 대표시키는 아카이, 다무라법(赤井, 田村, 1978)을 이용하였다. 그림 1과 같은 절점 1~4를 갖는 유한요소 에 대하여 간극수의 연속조건식은 다음과 같다.

$$\int \Delta v dx dy dz = Q \Delta t \quad (1)$$

여기에서 Δv : 체적변형률증분, Δt : 시간증분, Q : 4개의 경계면으로부터의 유출 수량이다.

간극수의 유동법칙으로 Darcy법칙($Q = kiA$)을 이용하면, 수량 $Q \Delta t$ 는 절점 1~4을 갖는 중심요소의 대표간극수압 P_w 와 그 주변요소의 대표간극수압 P_{wi} 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q \Delta t = \left[\left(\sum_{i=1}^4 \beta_i \right) \cdot P_w - \sum_{i=1}^4 (\beta_i \cdot P_{wi}) \right] \cdot S_y \quad (2)$$

여기에서 β_i ($i = 1 \sim 4$)는 i 방향의 유출계수, S_y 는 각 요소의 깊이방향 길이이다.

경계선 14(절점 1과 4의 연결선)을 가로지르는 방향의 유출계수 β_1 는 구체적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\beta_1 = \frac{k_h \cdot \Delta t \cdot S_z / \gamma_w}{d_1 + (l_1 - d_1) \cdot (k_h / k_{h1})} \quad (3)$$

여기에서 k_h 와 k_{h1} 는 각각 중심요소와 인접요소1의 수평방향 투수계수, S_z 는 흐름에 수직인 방향의 요소폭, γ_w 는 물의 단위체적중량, d_1 는 중심요소의 도심

으로부터 경계선 $\sqrt{14}$ 까지의 수직거리, l_1 는 중심요소 도심과 인접요소1의 도심과의 거리이다.

직경 2a의 수직배수재가 격자형으로 피치 $S_x = S_y$ 로 타설되었다고 가정하면, 기본 Macro-Element는 그 중심에 1개의 수직배수재 (직경2a, 길이 S_z)를 갖으며, 이는 평면 $S_x \times S_y$, 높이 S_z 의 각주가 된다. 수치적으로는 $S_y = S_x$ 이다.

인접하는 3개의 Macro-Element내의 과잉간극수압 분포를 모식화하면 그림 2와 같다. 각 요소내에서는 수직 배수재를 향하여 방사상의 간극수 흐름이 발생한다.

시간증분 Δt 에 1개의 수직배수재 (직경2a, 길이 S_x , 투수성=무한대)를 통하여 배출되는 수량을 $Q_{VD} \cdot \Delta t$ 로 하면, 드레인 외주 ($r = a$)의 동수구배는 다음과 같다.

$$Q_{VD} \cdot \Delta t = 2\pi a \cdot S_z \cdot k_h \cdot \Delta t \cdot \left. \frac{\partial(P_w/\gamma_w)}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (4)$$

식 (2)로부터 유추하면 1개의 Macro-Element내에 1개의 수직드레인이 존재하는 효과는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Q_{VD} \cdot \Delta t = \beta_{VD} \cdot \bar{P}_w \cdot S_y \quad (5)$$

여기에서, β_{VD} 는 수직배수재에의 유출계수, S_y 는 Macro-Element의 깊이방향 길이, \bar{P}_w 는 평균과잉간극수압으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{P}_w = \frac{2\pi \int_0^b P_w \cdot r \cdot dr}{\pi b^2} \quad (6)$$

여기에서 $b \left(= \frac{S_x}{\sqrt{\pi}} = \frac{S_y}{\sqrt{\pi}} \right)$ 는 유효집수반경이다.

수직배수재 주변의 과잉간극수압 P_w 의 분포특성을 다음과 같이 표현한다.

$$P_w = P_w(r, z, t) = f(r) \cdot g(z, t) \quad (7)$$

식 (7)에서 분포함수 $f(r)$ 에 Barron에 의한 등변형을 샌드드레인 문제의 고유함수를 적용한다.

$$f(r) = \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r^2 - a^2}{2b^2} \quad (8)$$

식 (8)에서 $f(a) = 0$, 즉, 드레인내에서는 수두손실이 없고, 과잉간극수압이 발생하지 않는 것으로 가정하고 있다.

격자배열 ($S_x = S_y$)의 수직배수에 대하여 임의의 1개에의 유출계수를 구체적으로 구하면 다음과 같다.

$$\beta_{VD} = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot k_h \cdot \Delta t}{\gamma_w} \cdot \frac{S_z}{b} \cdot \left[\frac{1 - 1/n^2}{\ln(n) - (1 - 1/n^2)(3 - 1/n^2)/4} \right] \quad (9)$$

여기에서 $n = b/a$ 이다.

정리하면, 체적변화량은 요소경계면으로부터의 간극수의 유출량과 수직배수공에 의한 간극수의 유출량의 합이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int \Delta v dx dy dz = Q \Delta t + Q_{VD} \cdot \Delta t = \left[\beta_{VD} + \sum_{i=1}^4 \beta_i \right] \cdot \bar{P}_w - \sum_{i=1}^4 (\beta_i \bar{P}_{wi}) \cdot S_y \quad (10)$$

기본Macro-Element의 요소경계에서는 식 (8)의 요소내의 과잉간극수압 분포함수가 유효집수반경위치 ($r = b$)에서 $f(b) = 0$ 이다. 이 조건으로부터 “2개의 Macro-Element간을 가로지르는 수평방향의 흐름은 생기지 않는다”고 해석하여, 식 (4)의 요소경계의 유출계수는 다음의 조건을 넣을 수 있다.

$$\beta_1 = \beta_3 = 0 \quad (11)$$

2.2 천이 Macro-Element의 정식화(関口 등, 1986)

수직배수재 타설영역은 일반적으로 유한하기 때문에, 미개량부와와 경계부근의 취급에는 주의가 필요하다. 즉, 개량부와 미개량부의 경계를 횡단하는 간극수 흐름의 기여를 고려할 필요가 있다(그림 3참조). 그림 3중에 절점 1~4을 갖는 천이 Macro-Element에 주목하여 그 대표과잉간극수압 \bar{P}_w 를 같은 요소의 중앙의 높이 ($S_z/2$), 그리고 개량부와 미개량부의 경계선부터 거리 c 만큼 내측에 들어간 점에 할당한다. 여기에서 $c=(b-a)/2$ 이고, a 는 수직배수재의 반경, b 는 수직배수재의 유효집수반경이다.

개량부와 미개량부의 경계선 \bar{z}_3 을 횡단하는 간극수 흐름의 연속조건으로부터, 천이 Macro-Element의 유출계수 β_3 는 다음과 같이 표현된다.

$$\beta_3 = \frac{k_h \cdot \Delta t \cdot S_z / \gamma_w}{c + (l_3 - d_3) \cdot (k_h / k_{h,3})} \quad (12)$$

여기에서, k_h 는 천이 Macro-Element중의 점토질의 투수계수, $k_{h,3}$ 는 인접한 미개량부를 구성하는 점토의 투수계수이다.

즉, 위와 같이 좌측이 미개량부에 접하는 천이 Macro-Element에 있어서는 기본 Macro-Element에서는 0으로한 유출계수 β_3 의 기여를 식 (12)로 대체하면 된다. 또한 우측이 미개량부에 접하는 천이 Macro-Element의 경우는 다음의 유출계수를 고려하면 된다.

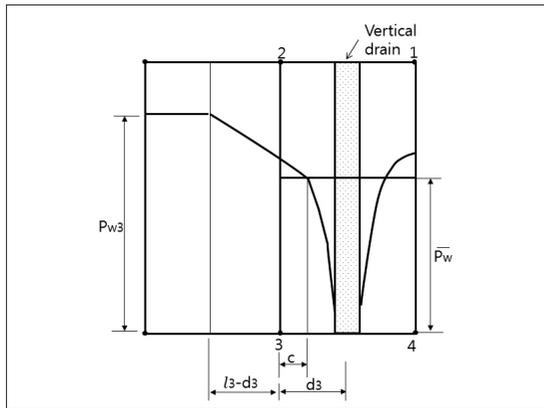


그림 3. 천이 구간의 간극수압 흐름(関口 등, 1986)

$$\beta_1 = \frac{k_h \cdot \Delta t \cdot S_z / \gamma_w}{c + (l_1 - d_1) \cdot (k_h / k_{h,1})} \quad (13)$$

3. 맺은말

세끼구치 등(1986)의 Macro-Element법은 FEM 적용성이 우수하고, 지반개량 지반의 간극수압 소산 과정을 예측하는데 유효한 수법이다. 최근에는 지반의 경사, 배수재의 타설배치, 웰레지스텐스, 진공압밀 등을 고려할 수 있게 보다 범용성 있는 기법으로 확장되었다(平田 등, 2009, 2010). 본 기법이 많은 수치해석 프로그램에 도입되어, 수직배수재 타설지반의 고도의 예측이 가능할 수 있기를 기대한다.

참고 문헌

1. Christian, J. T. : Undrained stress distribution by numerical method, Proc. ASCE, Vol. 96, SM6, pp. 1333-1345, 1968.
2. Sandhu, R. and Wilson, E. L.: Finite element analysis of flow in saturated porous media, Proc. ASCE, Vol. 95, EM3, pp. 641-652, 1969.
3. 赤井浩一、田村武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析、土木学会論文報告集, No. 269, pp.95-104, 1978.
4. 平田昌史、藤山哲生、竹山智英、飯塚敦、太田秀樹：HPMを用いた土/水連成有限要素解析における水頭の空間離散化、土木学会、応用力学論文集, Vol.12, pp.187-194, 2009.
5. 平田昌史、清水英樹、福田淳、山田耕一、川井田実：拡張マクロ・エレメント法を用いたパーチカルドレーン打設地盤のFEM解析、土木学会、応用力学論文集, Vol.13, pp.431-442, 2010.
6. 関口秀雄、柴田徹、藤山朗、山口博久：局部载荷を受けるパーチカル・ドレーン打設地盤の変形解析、第31回土質工学回シンポジウム論文集, pp. 111-116, 1986.
7. 吉国洋：パーチカルドレーン工法の設計と施工管理、技報堂出版, pp. 1-208, 1979.