한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제2호 (2012년 5월), 57–70

Lakatos의 관점을 반영한 수학영재 대상 교수단원 개발연구

—데자르그 정리와 무한원점을 중심으로—

Design of Teaching Unit ⟨Desargue Theorem and Point at Infinity⟩ Based on Lakatos' Perspective

이지현 Ji Hyun Lee

데자르그 정리와 무한원점이라는 사영기하학의 내용에 대하여, 반례의 수학사적 역할에 대한 Lakatos의 관점을 반영한 중등 영재학생용 교수단원을 개발하였다. 본 교수단원에서는 먼저 데자르그 정리의 반례를 인식하고, 이러한 반례를 제거하기 위해 무한원점을 도입하여 정리를 일반화한다. 그리고 다시 변환을 도입하여 반례가 사실 일반적인 경우와 대등한 것임을 재인식하도록 전개하였다. 이 교수단원에서 영재학생들은, 반례로 인하여 데자르그 정리라는 수학적 지식이 어떻게 변화하고 성장할 수 있는가를 경험할 수 있었다.

In this study, a teaching unit ⟨Desargue theorem and point at infinity⟩ for mathematically gifted students is designed, based on Lakatos's perspective. First, students appreciated the exceptions of Desargue theorem and introduced the point at infinity to remove the exceptions. Finally students were guided to realize that the exceptions and the general case of Desargue theorem have equal status. Exploring Desargue theorem with other viewpoints, gifted students experienced the growth of mathematical knowledge due to exceptions of the theorem.

Keywords: 수학사(History of Mathematics), Lakatos, 수학에서의 반례 및 정리의 일반화(Exceptions and Generalization of Mathematics), 교수단원(Teaching Units).

1 서론

대부분의 학생들은 수학을 역사가 없는, 처음부터 완성된 과목으로 생각한다. 따라서 수학사를 통하여, 수천 년 전부터 창조된 수학이 기존의 내용을 확장하면서 내부로부터

MSC: 97D80 ZDM: D83
제출일: 1월 20일 수정일: 4월 10일 게재확정일: 4월 17일

성장하는 모습을 보여주는 것은 학생들의 수학에 대한 인식에 매우 중요하다([2]). 수학사의 교육적 가치는 교사들과 연구자들에게 널리 인정되고 있으며 관심도 높으나, 수학사의 교육적 가치를 수학교실에서 구체적으로 반영하는 방법적 측면에 대한 연구는 아직 부족하다. 특히 수학사를 활용한 대부분의 교수 학습 자료들이 기존의 수학사 내용과 차별성이 적으며, 수학사와 학습 내용과의 개념적 관련성이 분명하지 않다는 문제점이 지적되고 있다([1]). 한편, 교수단원은 어떤 특정한 수학 지식의 교수라는 목표를 성취할 수 있도록 일단의 탐구 과제를 발생적으로 체계화하여 배열한 프로그램을 의미한다([10, 11, 12, 13]). Wittmann[11, 12]은 수학교육학의 가장 중요한 연구 성과는 다름 아닌 신중한 설계 및 경험적 적용을 거친 교수단원이라고 지적한 바 있다. 이 연구는 데자르그 정리와 무한원점이라는 사영기하학의 내용을 주제로 반례의 수학사적 역할에 대한 Lakatos의 관점을 반영한 중등 영재학생들이 수학적 지식의 변화와 성장을 경험할 수 있는 교수단원을 개발하여, 기존의 수학사를 활용한 교수 학습 자료들에 대해 제기된 문제점을 보완한 사례를 제공하는 것을 목적으로 한다.

데자르그(Desargue)정리는 파푸스(Pappus), 파스칼(Pascal), 브리앙숀(Brianchon) 정리 등과 함께 영재교육에서 빈번하게 다뤄지는 고급기하의 주제이다. 데자르그 정리는 두 삼각형의 각 대응하는 꼭지점을 이은 세 직선이 한 점에서 만나면, 두 삼각형의 대응하는 변(혹은 그 연장선)들의 세 교점은 한 직선상에 있다는 정리이다. 그림을 그려보면, 데자르그 정리의 가정을 만족하면서도 두 삼각형의 대응변들이 평행할 수도 있다는 것을 발견할 수 있다. 이렇게 평행한 경우에는 대응하는 변들의 교점이라는 것 자체가 사라지므로, 데자르그 정리의 결론에 예외 혹은 반례로 간주될 수 있는 상황이 발생하게 된다. 이 예외 혹은 반례에 어떻게 대응할 것인가? 여기서 오일러 정리의 원시적 추측이 제기되고 일차적으로 증명되나 그에 대한 무수한 반례들이 등장하면서 원 추측과 증명이 수정과 개선을 거쳐 수학적 지식이 성장하는 역사를, 교실에서 교사와 학생들 간의 박진감 넘치는 토론으로 재구성한 Lakatos[7]를 찾아볼 수 있다.

Lakatos는 예외 혹은 반례에 직면했을 때 취할 수 있는 여러 가지 대응 방법을 논의하였다. 가장 간단한 대응은 반례가 나타났으므로 그 추측을 완전히 포기하는 것이다. 그는 관련된 개념의 정의를 축소하여 괴물에 해당하는 반례를 추방함으로서 정리를 구하는 방법을 괴물배제법이라 명명하였다. 한편, 모든 예외 경우를 조건에 열거함으로서 반례로부터 정리를 구하고자 하는 전략을 예외배제법이라고 하였다. 마지막으로 Lakatos가 위에서 열거한 세 가지 전략과는 달리 반례의 출현을 수학적 지식이 성장하는 진정한 원동력으로 변화시킬 수 있다고 주목한 방식은, 바로 증명 분석을 통하여 반례를 유발시킨 보조정리를 찾아 증명에 합체하여 추측과 증명 모두를 개선하는 보조정리 합체법이었다.

데자르그 정리의 예외에 대해서도 Lakatos의 예외배제법, 정리의 조건에 “단, 두 삼각형의 대응변들은 서로 평행하지 않다.”를 덧붙여 예외를 원천적으로 배제할 수도 있다. 그러나 보조정리합체법과 같이 예외 혹은 반례에 직면했을 때 그것을 포함하여 데자르그 정리를 일반화 혹은 확장할 수 있는 방법은 무엇일까?

많은 사람들에게 사영기하학은 평행선이 만나는 무한원점이라는 한편으로는 신기하면서도 또 한편으로는 불합리해 보이는 가정으로부터 출발하는 기하학이다. 사영기하학에서 무한원점을 수용하게 된 것은, 데자르그 정리에서 관찰하였듯이 유클리드 기하에서 평행으로 인한 예외의 제거와 일반화라는 목적 때문이었다. 시각적인 공간에 속하지 않는 무한원점의 도입은 기하학은 공간 과학이라는 통념을 뒤흔든 계기였다([8]). 무한원점을 도입 혹은 정의하고자 했던 노력은, 수학에서 대상이 무엇인가에 대한 직관적인 해석이 아니라 그 대상에 대해 약정된 관계 혹은 공리가 본질적인 것이라는 형식적 인식의 모태가 되었다.

그러나 무한원점은 그 자체로 모순을 포함하고 있는 개념이다. 무한원점을 무한대에 위치한 평행선의 교점이라 한다면, 평행선의 정의가 서로 만나지 않는 두 직선인 유클리드 기하학과 사영기하학은 양립할 수 없다. 또 역사적으로 무한원점의 도입으로 인하여 사영기하학이 체계적으로 전개되었다는 사실을 기억하는 사람은, 현대 사영기하학 교과서에서 ‘두 평행선이 만나는 무한대에 위치한 점’이라는 무한원점의 정의를 찾아볼 수 없다는 점에 대해서 의문을 품을 수 있다([9]). Sommerville[9]은 사영기하학의 역사적 발달에서 무한원점 개념이 내포한 모순의 원인과 그 해결과정을 설명하였다. 그는 무한원점의 개념적 변화에 주목하여 사영기하학의 역사를, 무한원점의 개념이 없었던 고대 그리스의 계량 기하학(유클리드 원론) 시기, 무한원점의 개념이 대두했던 계량기하학에 사영 및 연속성원리를 적용한 시기, 무한원점과 보통 점 사이의 구별이 사라진 순수 현대 사영기하학의 확립 시기로 구분하였다.

본 논문에서 개발하는 교수단원은, 이상과 같은 수학사적 탐색결과 및 반례의 역할에 대한 Lakatos의 관점을 토대로 하여, 데자르그 정리의 성장과정을 세 가지 단계적인 탐구 장면으로 개발하였다[1]. 이때 수학사적 자료들은, 역사적 사실 자체를 직접적으로 언급하거나 제시하기보다는 Lakatos의 관점을 반영하여 탐구 활동의 선정 및 순서의 조직과 전개에 반영된다. 다음 절에서는 중등영재학생들을 대상으로 적용한 구체적인 교수단원을 소개하고 그 결과를 기술한다.

1) 탐구 장면 1은 2절, 탐구 장면 2는 3절, 탐구 장면 3은 4절에서 다룬다. 각 절에서는 잘 알려진 증명에 대한 구체적인 상술보다는 교수단원 설계의 흐름과 의미 전달에 중점을 두고 서술한다.

2 데자르그 정리의 예외 발견

교수단원 〈데자르그 정리와 무한 원점〉을 구성하는 세 개의 큰 탐구 장면은 〈표 1〉과 같이 Sommerville([9, pp.153])이 제시한 사영기하학의 세 발달단계를 반영하여 선정한 것으로, 각 탐구 장면은 다시 여러 개의 활동을 포함한다.

1. 그리스의 계량기하학(유클리드의 원론): 무한원점의 개념이 없었다. 따라서 유클리드 기하에서 평행선으로 인하여 발생하는 예외 경우를 모두 독립적으로 다루었다.
2. 계량기하학에 사영(projection) 및 연속성 원리(principle of continuity)를 적용한 단계: 평행선으로 인한 예외 경우를 제거하기 위하여 '무한원점'이 도입되었다. 예를 들어 "직선은 (예외 없이) 항상 직선으로 사영된다."라고 하기 위하여, 사영되는 평면에서의 예외직선에 대응되는 것으로 '무한원직선'을 도입하였다.
3. 순수 사영기하학의 확립: 계량기하학의 비계 없이 순수 사영기하학 체계가 완성된 단계이다. 예를 들어 Coxeter[4]는 현대 사영기하학에서의 무한원점을 다음과 같이 설명한다. "이러한 부가적인 무한원점의 지위는 보통 점과 동일하다. 만약 무한원점을 완전한 점으로 수용하지 않는다면, 우리는 진짜 사영기하학을 탐구하는 것이 아니다. 달리 말한다면, 어떤 직선위의 점이 무한원점인가는 임의의 선택의 결과이다([4])."

표 1: 교수단원 〈데자르그 정리와 무한 원점〉의 개요

무한원점 개념	사영기하학 발달단계	탐구 장면	활동
무한원점 개념 부재	고대 그리스 유클리드 기하학	탐구장면 1(2절) 평행선으로 인한 데자르그 정리의 예외 발견	활동 1: 데자르그 정리 증명하기
			활동 2: 평행선으로 인한 반례 관찰하기
			활동 3: 예외배제법으로 데자르그 정리 다시 서술하기
무한원점 도입	초기 사영기하학	탐구장면 2(3절) 무한원점 및 무한원직선을 도입하여, 유클리드 평면을 확장	활동 4: 평행선으로 인한 반례를 제거하기 위해 점과 선 개념 확장하기
			활동 5: 확장된 유클리드 평면에서 반례를 포함하여 데자르그 정리를 일반화하기
무한원점과 보통점의 구별 사라짐	현대 사영기하학	탐구장면 3(4절) 중심사영을 이용한 데자르그 정리의 재증명	활동 6: 중심사영의 기하적 성질 탐구하기
			활동 7: 중심사영을 이용하여 무한원점-보통점 관계 관찰하기
			활동 8: 중심사영의 성질을 이용하여 데자르그 정리의 반례에서 데자르그 정리를 다시 증명하기

이 교수단원은 2010년, 2011년 여름 서울대학교 과학영재센터 수학분과 중학교 3학년의 사사반 학생들을 대상으로 실행하였다[2]. 특히 본 연구에서 기술하는 것은 2011년 사사반 소속 영재중학생 8명(남학생 5명, 여학생 3명)을 대상으로, 2일(각 3시간씩 총 6시간)동안 수업한 내용과 결과이다[3]. 연구자가 직접 수업을 진행하면서 학생들과의 대화, 예상하지 못했던 반응과 새로운 아이디어 등을 기록하고, 수업이 끝난 후에는 학생들이 문제를 해결한 활동지를 수합하여 학생들의 과제해결방법을 분석하였다[4].

먼저 탐구 장면 1은 데자르그 정리와 그 역(그림 1)을 증명하는 〈활동 1〉으로 시작하였다.

〈활동 1〉 [데자르그의 정리] $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$에 대하여, 두 삼각형의 각 꼭지점을 이은 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점 O에서 만난다고 하자. 직선 AB, A_1B_1의 교점을 L, 직선 AC, A_1C_1의 교점을 M, 직선 BC, B_1C_1의 교점을 N이라 하면, 세 점 L, M, N은 한 직선상에 있다.

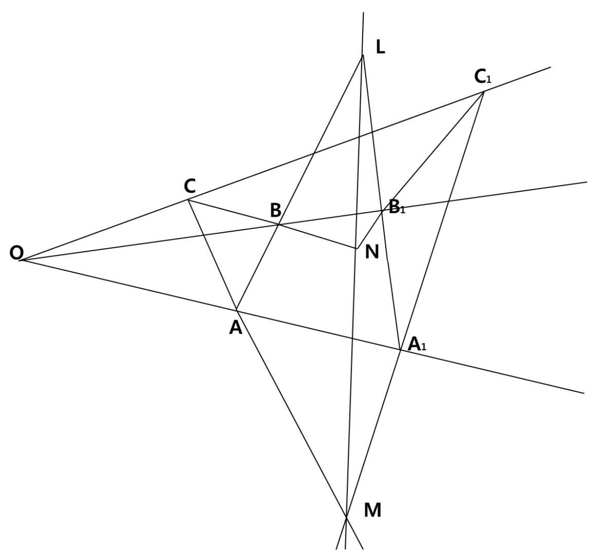


그림 1: 데자르그 정리

8명의 영재 중학생 중 한 명을 제외하고는 이미 데자르그 정리의 내용 및 증명을 알고 있었다. 데자르그 정리의 내용을 처음 들었다고 했던 학생도 10분도 지나지 않아 메넬라우스

2) 서울대학교 과학영재교육원 수학분과에서는 초등학교 6학년 겨울에 15-20명의 학생을 선발하여 기본적으로 2년간 100시간씩의 영재교육을 실시하고 있다. 본 연구에 참여한 학생들은 2년간의 영재교육 후에 다시 선발되어 1년간의 사사교육을 받고 있었던 매우 우수한 학생들이었다.

3) 첫날 3시간 동안에는 탐구과제 1과 2을, 그 다음날의 3시간의 수업시간에 탐구과제 3을 다루었다.

4) 학생들의 활동지에는 〈표 1〉에 제시된 8개의 활동을 문제로 제시되어있다. 구체적인 활동과제의 내용은 2-4절에서 소개한다.

정리를 적용하여 데자르그 정리를 쉽게 증명해내는 모습을 관찰할 수 있었다[5].

⟨활동 2⟩는 Lakatos[7]에서의 반례에 대한 교사와 학생들 간의 대화를 모방한 다음과 같은 상황을 제시하여 데자르그 정리의 예외들에서도 성립하는 기하학적 성질을 추측하고 증명하는 것이었다.

⟨활동 2⟩

선생님이 데자르그 정리를 증명하시자, 학생들이 다음과 같은 반례를 제시하였다. 학생 1은 두 삼각형에서 $BC \parallel B_1C_1$일 때, 교점 N이 존재하지 않는 경우를 데자르그 정리에 대한 [반례 1: 그림 2]로 제시하였다. 그러자 학생 2는 학생1과 마찬가지로 또 다른 [반례 2: 그림3] 를 제시하였다.

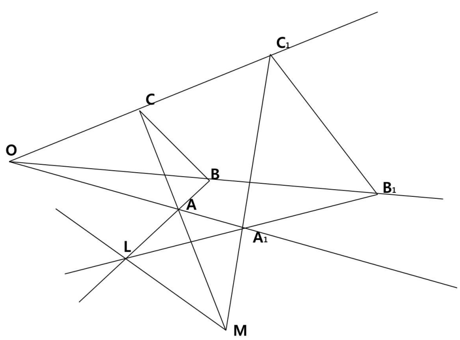


그림2: 반례1

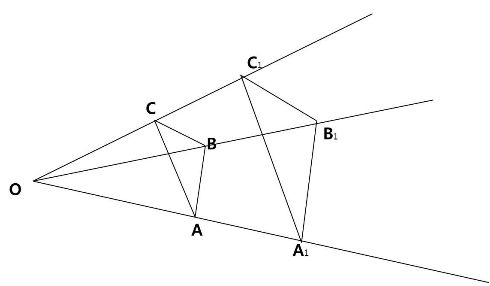


그림3: 반례2

학생 2: 그러면 두 점 N, L이 존재하지 않는 경우도 있겠군요. L이 존재하지 않는다는 것은 $AB \parallel A_1B_1$임을, N이 존재하지 않는다는 것은 $BC \parallel B_1C_1$임을 의미합니다. 그러면 아래와 같은 그림이 되고, 이것을 [반례 2]라고 할 수 있습니다.

학생 1: [반례 1], [반례 2]는 모두 평행선 때문에 일어나는 것입니다. 그러니 우리의 원 정리를 이러한 평행선들이 없는 경우, 즉 'L, M, N이 모두 존재하는 경우' 에만 국한시킨다면, 이러한 반례들을 배제할 수 있습니다.

영재학생들은 쉽게 [반례 1]에서는 결론의 나머지 두 교점 L, M을 이은 직선 LM이 BC(혹은 B_1C_1)에 평행하다는 것, 또 [반례 2]에서는 남은 교점 M도 없다, 즉 $AC \parallel A_1C_1$임을 증명할 수 있었다. ⟨활동 3⟩은 데자르그 정리를 이러한 예외들을 포함하여, 예외배제법의 양식으로 서술하는 것이다.

⟨활동 3⟩

1) 세 교점 L, M, N이 모두 존재하면, 세 교점이 한 직선상에 있다.

5) 메넬라우스 정리를 이용한 데자르그 정리의 구체적인 증명은 Coxter와 Greitzer[3]을 참조할 수 있다.

2) 한 교점(예를 들어 교점 N)이 존재하지 않으면, $LM \parallel BC$(혹은 B_1C_1)[반례 1].

3) 두 교점(예를 들어 교점 N, L)이 존재하지 않으면, 다른 교점 M 도 존재하지 않는다[반례 2].

앞 단계에서 만약 수학적 결론이 상황에 적합하지 않다면, 모델 자체를 수정한다. 즉, 1-5 단계를 되풀이하는 것을 말한다.

3 예외를 제거하기 위한 기하개념의 확장

두 번째 탐구 장면을 시작하면서, 앞에서 살펴본 데자르그 정리의 예외 혹은 반례가 발생하는 원인을 생각해보도록 하였다. 유클리드 기하에서는 두 직선이 평행한 경우가 있으므로 임의의 두 직선이 항상 한 점에서 만난다고 할 수는 없다. 데자르그 정리에서 반례의 원인이 되는 유죄인 가정은 바로 "임의의 두 직선이 한 점에서 만난다."이다. 학생들은 유클리드 기하에서 두 직선의 교점을 논의할 때는 항상 평행한 경우라는 예외를 고려하여야 하며, 평행인 경우는 두 직선이 한 점에서 만나는 경우와 분리하여 다루어야 한다는 점을 인식하였다.

〈활동 4〉는 이러한 모든 예외를 개별적으로 논의하는 대신, 평행으로 인한 "두 직선은 한 점에서 만난다."의 예외를 제거할 수 있도록 기하 개념을 확장해 보자고 제안하고 있다. 예외를 제거하기 위한 개념의 확장이라는 시도를 설명하기 위하여, 방정식 풀이에서도 예외를 제거하기 위해 수를 자연수로부터 마침내 $x^2 = -1$과 같은 방정식까지도 해를 가지도록 복소수까지 단계적으로 확장한다는 것을 상기시켰다. $x^2 = -1$의 해로 허수 i를 도입하여 수 개념을 확장하듯이, 평행으로 인한 예외를 제거할 수 있는 무한원점을 점으로 포함하도록 점과 선의 개념을 확장해보도록 하였다. 허수 i의 도입에서도 허수와 실수 사이의 연산 규칙을 기존 실수의 연산법칙이 그대로 유지되도록 정의했던 것과 같이, 기하학에서도 "임의의 두 점을 지나는 직선은 유일하다."와 "임의의 두 직선은 한 점에서 만난다."를 만족하도록 무한원점(직선)과 보통점(직선) 사이의 관계를 정의해보도록 안내하였다.

〈활동 4〉

① 평행한 기찻길의 두 트랙은 눈앞에서, 그리고 눈 뒤의 점에서 만나는 것처럼 보인다. 이러한 직관으로 각 보통 직선이 두 개의 '무한원점' 을 갖는다고 생각할 수 있다. 각 (보통) 직선이 2개의 무한원점을 가질 수 있는가?

② 평행한 세직선 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$의 '무한원점' 을 생각하여 보자. 세 직선이 만나는 무한 원점이 다를 수 있겠는가?

③ ①에 의하여 임의의 두 무한원점을 지나는 직선은 보통 직선일 수 없다. “임의의 두 점을 지나는 직선은 유일하다.”도 만족해야 하므로, 임의의 두 무한원점을 지나는 직선(이를 무한원직선이라 부르자)을 생각하여야 한다. 이 때, 임의의 두 무한원점을 지나는 무한원직선이 보통점을 지날 수 있는가?

④ 임의의 두 무한원점을 지나는 직선은 모든 무한원점들을 포함하여야 함을 설명하여라.

〈활동 4〉를 해결하면서, 학생들은 확장된 유클리드 평면에는 다음과 같은 결합관계를 만족하는 두 종류의 점(보통점 P_E, 한 직선 l에 평행한 직선의 집합 $[l]$에 대응하는 무한원점 $P_{[l]}$)과 두 종류의 직선(보통직선 l_E, 그리고 모든 무한원점 $P_{[l]}$을 지나는 무한원직선 l_∞)가 있음을 찾아내었다.

(P_E, l_E): 유클리드 평면에서의 보통점과 보통직선의 관계와 같다. $(P_{[1]}, l_\infty)$: 모든 무한원점은 무한원직선 상에 있다. $(P_{[l]}, l_E)$: 보통 직선 l_E 위에는 하나의 무한원점이 있다. (P_E, l_∞): 무한원직선상에는 보통 점이 없다.

〈활동 5〉에서는 데자르그 정리에 등장하는 10개의 점과 직선 중 어떤 점 혹은 직선이 무한원점 혹은 무한원직선이 되더라도 데자르그 정리와 그 역이 그대로 성립함을 관찰하였다. 예를 들어 교점 N이 무한원점인 [반례 1]과 교점 L, N이 무한원점인 반례 2에서도, 두 삼각형의 대응변의 세 교점이 한 직선상에 있다고 할 수 있다. 따라서 확장된 유클리드 평면에서는 평행으로 인한 예외 없이 데자르그 정리를 일반적으로 서술할 수 있음을 확인하였다.

4 중심사영을 이용한 데자르그 정리의 재증명

탐구 장면 3은 주어진 점 O에 대하여, 평면 π의 평면 π' 위로의 중심사영을 정의하는 것으로부터 시작하였다. 두 평면 π, π'와 이 두 평면에 속하지 않는 어떤 점 O가 있다고 하자. π의 임의의 점 X에 대하여, 직선 $\overleftrightarrow{OX}$가 평면 π'와 만나는 점 X'를 X의 중심사영에 의한 상으로 정의한다(그림 4).

특히 평행하지 않은 두 평면사이의 중심사영을 생각하자. 이때 평면 π의 특정 직선 x 위의 점을 제외하고, 모든 π의 점 X에 대하여 중심사영된 상 X'를 정의할 수 있다. 마찬가지로 평면 π, 역시 예외직선 y'가 있는데[6], 직선 y' 위의 점을 제외한 모든 π' 위의 점 Y에 대하여 $X' = Y$를 만족하는 점 $X(X \in \pi)$가 존재한다. 〈활동 6〉에서는 학생들에게 다음과 같은

6) π의 예외직선 x는 O를 지나 π'에 평행한 평면과 π의 교집합이다. 비슷하게 π'의 예외직선 y'는, O를 지나 π에 평행한 평면과 π'의 교집합이다.

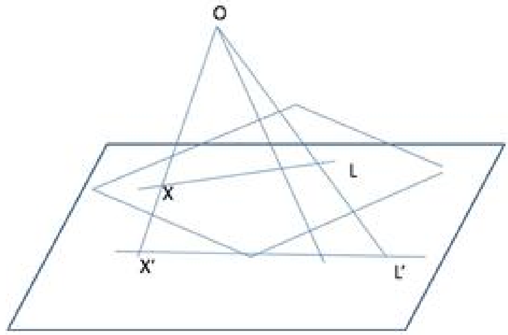


그림 4: 중심사영의 정의

중심사영의 기하학적 성질을 증명해보도록 하였다[7].

〈활동 6〉

성질 1. (예외직선 x 외의) π 의 모든 직선 l 은 중심사영으로 π' 의 직선 l' 으로 옮겨진다.

성질 2. (예외 직선 y' 외의) π' 의 모든 직선 l' 은 π 의 직선 l 의 중심사영에 의한 상이다.

성질 3. 평면 π 위의 두 직선 l_1, l_2 이 예외 직선 x 상의 점 M 에서 만나면, 이때 중심 사영된 상인 π' 위의 직선 l_1', l_2' 은 평행하다.

성질 4. 평면 π 위의 두 직선 m_1, m_2 가 평행하면(단 직선 m_1, m_2 은 x 와는 평행하지 않다)[8], 중심 사영된 상 m_1', m_2' 는 π' 의 예외 직선 y' 위의 점 M' 에서 만난다.

앞서 평면에서 데자르그 정리를 매우 능숙하게 증명했던 영재학생들이 이러한 공간기하의 증명에서는 예상 밖의 고전을 겪는 모습을 관찰할 수 있었다. 특히 성질 4의 경우 8명의 학생 중 완전한 증명에 도달한 학생은 단 한 명뿐이었다.

〈활동 4〉에서 이미 보통 유클리드 평면에 무한원점과 무한원직선을 추가하여 유클리드 평면을 확장한 바 있었다. 그러나 이렇게 도입한 무한원점, 무한원직선을 보통 점이나 보통 직선과 동일한 지위를 가지는 것으로 생각하기는 쉽지 않다. 〈활동 7〉에서는 중심사영의 성질을 이용하여 확장된 유클리드 평면에서 무한원점과 보통점이 대등함을 다음과 같이 살펴보았다.

두 평면 π, π' 을 확장된 유클리드 평면으로 생각하자. 즉 평면 π, π' 의 각 방향에 무한원점을 하나씩 추가하고, 또 이 무한원점들은 무한원직선 상에 있다고 하자. 이때 성질 3을 이용하면 평면 π 의 예외직선에는 π' 의 무한원직선을, 또 성질 4를 이용하면 평면 π 의 무한원직선에는 π' 의 예외직선을 대응시킬 수 있다. 따라서 확장된 유클리드 평면 π, π'

7) 중심사영의 성질에 대한 증명은 Yaglom([14], pp. 21–22)을 참조할 수 있다.
8) 평면 π 위의 두 직선 m_1, m_2 가 예외 직선 x 에 평행하면, 중심 사영된 상 m_1', m_2' 은 평행하다.

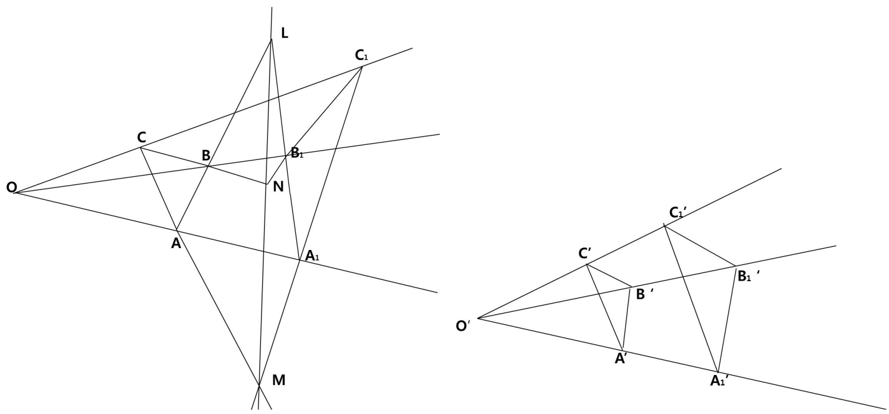


그림 5: 평면π의 그림1과 평면 π'의 그림 2

에서는 두 평면의 점과 직선들이 예외 없이 일대일 대응되며, 한 직선 l상에 점 P가 있기 위한 필요충분조건은 점 P'가 직선 l' 위에 있는 것이다. 여기서 확장된 유클리드 평면 π, π' 사이의 중심 사영은 보통 점을 무한원점으로, 무한원점을 보통 점으로 교환한다. 그러므로 중심 사영으로 π' 위의 보통직선 y'에 있는 점을 조작하여, 평면 π 위의 무한원점을 조작할 수 있다. 이상과 같이 〈활동 7〉은 중심사영의 기하학적 성질을 적용하여 무한원점과 보통 점을 대등하게 보는 현대 사영기하학의 관점을 소개하였다.

〈활동 8〉에서는 중심사영의 성질을 이용하여 데자르그 정리를 다시 증명하는 것이다. 평면 π에 다음과 같은 데자르그 정리의 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$가 있다고 하자. 평면 π에서의 [그림 1]은 적당한 중심사영을 택하면, 평면 π'에서 [그림 2]로 옮겨질 수 있다. 따라서 데자르그 정리를 증명하기 위해서는, 평면 π'의 간단한 경우인 [그림 2]를 증명한 다음 그 결과를 다시 중심사영의 성질을 이용하여 원래 [그림 1]에서 해석하면 충분하다 (그림 5).

여기서 [그림 2]는 다름 아닌 탐구 장면 1에서의 [반례 2]이다. 결국 앞에서 예외로 생각했던 것이 〈활동 8〉에서는 일반적인 경우와 대등한 것으로 기능한다[9]. 그림 6은 데자르그 정리의 역을 변환을 이용하여 증명한 한 학생의 풀이이다[10].

〈활동 8〉의 중심사영이라는 변환을 이용한 데자르그 정리의 증명기법은 그림 7과 같이 도식화할 수 있다.

사영기하학에서의 기하학적 변환의 적용은 기하학에서 변환이 중심적인 위치를 차지하게 된 계기였으며, 이것은 훗날 기하학과 군이론을 연결시킨 Klein의 에르랑겐 프로그램의

9) 즉, [그림 1]과 [그림 2]는 사영적으로 동치(projectively equivalent)이다.

10) 직선 LMN이 π의 예외직선이 되도록 사영하자. 그러면 데자르그 정리의 역은, $A'B' \parallel A_1'B_1'$, $A'C' \parallel A_1'C_1'$, $B'C' \parallel B_1'C_1'$이며 점 O', A', A_1'와 O', B', B_1'가 한 직선상에 있을 때, 점 O', C', C_1'도 한 직선상에 있음을 증명하면 된다.

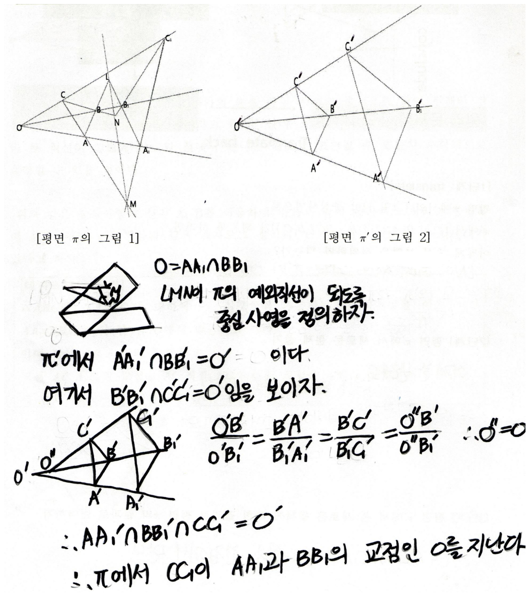


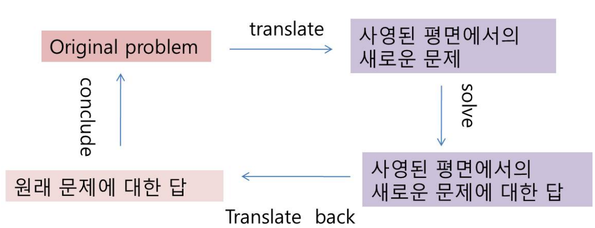
그림 6: 변환을 사용한 데자르그 정리의 역 학생 증명사례 (〈활동 8〉)

시초석이 되었다 ([5, pp. 832]). 학교수학에서 학생들이 기존의 방법으로 풀기 어려운 문제를 다른 방법으로 변환(transform)하여 풀고, 다시 이를 원래의 방법으로 역변환(inverse transform)하는 해결기법을 접하게 되는 분야는 바로 해석기하학이다. 해석기하학에서 왜 기하의 명제를 증명하는데 실수 좌표와 대수를 사용할 수 있는가라는 질문에 대한 답을 이해하기 위해서는 상당한 수학적 훈련을 필요로 하는 반면에, 〈활동 8〉에서의 중심사영을 이용한 데자르그 정리의 증명은 물론 복잡하긴 하나 이러한 변환을 이용한 해결방법의 정당성을 학교수학의 범위 안에서 설명할 수 있다.

5 논의 및 맺는 말

많은 교사들과 연구자들이 수학사의 교육적 이용을 상식으로 받아들인다. 그러나 Fauvel[6]은 수학사를 "어떻게" 이용할 것인가가 명확하지 않아, 수학 학습-지도 분야에서 수학사의

그림 7: 변환을 이용한 문제 해결 기법



이용과 수학사 자체의 지도가 잘 구분되지 못하고 있으며 이 두 개가 종종 혼동되는 경우가 많다고 비판한다. 또 수학사 관련 연구들이 수학사 도입으로 인한 교육적 효과를 구현하는 구체적 방안을 명확하게 제시하지 못하고 있다는 한계를 지적하였다. Avital[2]는 학생들이 수학을 역사가 없는 학문으로 받아들이는 것은 수학교육의 큰 문제점 중 하나이며, 수학사를 활용하여 수학이 기존의 내용으로부터 확장되어가는 학문임을 학생들이 이해하게 할 수 있다고 보았다. 특히 이 논문의 교수단원은 Lakatos의 반례에 대한 관점을 이용하여, 영재학생들이 수학지식의 변화와 성장을 구체적으로 경험하도록 개발된 것이다.

본 교수단원의 흐름은, 정리에 대한 원시적 증명과 반례의 발견(탐구 장면 1) - 반례를 제거하기 위한 개념의 확장 및 그에 따른 정리의 일반화(탐구 장면 2) - 반례에 대한 재인식과 정리에 대한 새로운 증명(탐구 장면 3)으로 요약할 수 있다. 이 교수단원에서 데자르그 정리는 활동 1과 8에서 두 번에 걸쳐 증명된다. 또 반례를 발견하고(활동 2), 이에 대하여 반례를 단순히 배제하는 자연스러운 대응(활동 3) 후에, 반례를 포괄하도록 원 개념을 확장하는 노력(활동 4와 5)을 다룬다. 그리고 최종적으로 반례를 새로운 관점으로 재인식(활동 7)하고 이에 기초하여 정리를 더 일반적 관점에서 다시 증명(활동 8)하였다.

교수단원의 적용 결과, 대부분의 영재학생들에게 데자르그 정리가 이미 알고 있는 친숙한 기하학적 성질임에도 불구하고 예외 혹은 반례가 되는 경우와 그로 인한 확장의 과정을 관찰함으로서 수학이 멈춰버린 지식이 아니라 변화하고 성장하는 것임을 느꼈음을 확인할 수 있었다. 다음은 이 수업에서 새로 알게 된 것 혹은 흥미 있었던 것은 무엇인가라는 설문에 대한 두 영재학생의 답변이다.

> 처음에는 데자르그 정리의 예외를 배우지 않았고, 여러 가지 관점에서 증명해보지도 않았는데 여기서는 데자르그 정리를 여러 관점에서 보았고 예외도 확장시킨 유클리드 평면에서 예외가 아님을 배웠다. 앞으로 수학을 연구하면서 예외가 생기면 새로운 개념을 정의하고 기존의 공리를 확장하는 방법을 통해 예외를 없애야겠다고 느꼈다(학생 1).

> 처음 데자르그 정리라고 쓰인 프린트를 받았을 때는 이미 아는 정리여서 실망했었으나 무한원점의 개념, 무한원직선의 개념을 동원한 것과 무엇보다도 사영기하를 이용하여 문제를 해결한 것이 매우 흥미로왔다.
>
> 학원에서는 각 대응변이 모두 평행하지 않은 경우만을 메넬라우스를 이용하여 증명하였고 이 데자르그 정리를 배우게 된 것도 그저 '메넬라우스 정리의 확장' 이라는 테마를 가진 채 수업을 하여 데자르그 정리에 대한 깊은 탐구는 없었다. 하지만 이번 수업은 데자르그 정리의 증명을 다양한 기하 스킬과 예상치도 못한 "무한"의 개념을 도입하여 훨씬 폭 넓은 수업이었다고 생각한다. 기회가 되면 정수, 대수, 조합, 그리

고 다른 기하에서도 이렇게 다른 원리를 접목시켜 증명해보고 싶다(학생 2).

교수 단원의 실행 결과, 연구에 참여했던 영재학생들은 연구자의 예상이상으로 높은 실력을 갖추고 있었다. 따라서 반례 자체를 제기하고 그에 대한 대응 전략의 모색, 중심사영의 여러 기하학적 성질, 변환을 이용한 문제해결 기법 등을 아예 처음부터 학생들에게 열린 문제로 제시하는 방안도 고려해볼 수 있었다고 생각된다. 본 연구에서 제시한 교수단원은 완성된 것이 아니며, 실행된 결과의 피드백을 통해 더 많은 개선과 수정이 이뤄져야 할 것이다. 앞으로도 수학사의 여러 교육적 가치를 구체적으로 구현할 수 있는 교수단원의 개발 및 적용사례가 지속적으로 보고되기를 희망한다.

참고 문헌

1. 우정호, 민세영, 정연준, 「역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(2): 수학사의 교육적 이용과 수학교사 교육」, 학교수학 5(4) (2003), pp. 555–572.
2. Avital, S., "History of mathematics can help improve instruction and learning, In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Jahansson, V. Katz"(Eds), *Learn from masters*, Washington, D. C: The Mathematical Association of America, 1995.
3. Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry revisited*, New York: Random House, 1967.
4. Coxeter, H. S. M., *Projective Geometry*, New York : Springer, 1987.
5. Dieudonne, J., "The historical development of algebraic geometry", *The American Mathematical Monthly*, 79(8), 1972, pp. 827–866.
6. Fauvel, J., "Using history in mathematics education", *For the learning of mathematics*, 11(2), 1991, pp. 3–6.
7. Lakatos, I. 『수학적 발견의 논리』, 우정호(역), 서울 : 아르케, 1976.
8. Nagel, E.. "The formation of modern conception of formal logic in the development of geometry", *Osiris*, 7 (1939), pp. 142–223.
9. Sommerville, D. M. Y., "Geometry at infinity", *Mathematical Gazzette*, 9(132), 1917, pp. 153–155.
10. Wittmann, E., "Teaching units as the integrating core of mathematics education", *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1984, pp. 25–36.
11. Wittmann, E. C., "Mathematics education as a design science", *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 1995, pp. 355-–374.
12. Wittmann, E. C., "Designing teaching: The pythagorean theorem, In T. J. Cooney", et, al., *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education*, Portsmouth, NH: Heinemann, 1999 pp. 97–165.
13. Wittmann, E., "Developing mathematics education in a systemic process", *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 2001, pp. 1–20.
14. Yaglom, I. M., *Geometric transformations III*, translated from the Russian by A. Shenitzer, New York : Random House, 1973.

이지현 서울 전자고등학교
Seoul Electronics High School
E-mail: leeji_hyun@hanmail.net