

Compact Finite Volume Method를 이용한 수심적분형 흐름 및 이송-확산 모형 개발

Development of 2D Depth-Integrated Hydrodynamic and Transport Model Using a Compact Finite Volume Method

김 대 흥*

Kim, Dae-Hong

Abstract

A two-dimensional depth-integrated hydrodynamic and a depth-averaged passive scalar transport models were developed by using a Compact Finite Volume Method (CFVM) which can assure a higher order accuracy. A typical wave current interaction experimental data set was compared with the computed results by the proposed CFVM model, and reasonable agreements were observed from the comparisons. One and two dimensional scalar advection tests were conducted, and very close agreements were observed with very little numerical diffusion. Finally, a turbulent mixing simulation was done in an open channel flow, and a reasonable similarity with LES data was observed.

Keywords : Compact Finite Volume Method, higher order accuracy, boussinesq equation, advection diffusion equation

요 지

고정확도를 보장할 수 있는 Compact Finite Volume Method를 이용하여 수심적분형 흐름 모형과 수심평균된 이송확산 방정식을 해석하는 수치모형 개발과정을 기술하였다. 이차원의 흐름과 파랑의 상호작용에 대한 실험결과와 제시된 수치모형을 이용한 계산결과는 양호하게 일치하였다. 일차원과 이차원공간에서의 흐름에 의한 스칼라의 이송에 관한 수치모의에서도 수치확산이 거의 발견되지 않았고, 매우 정확히 일치하였다. 개수로에서의 난류혼합에 관한 수치모의 결과에서도 합리적인 스칼라의 혼합양상이 관찰되었다.

핵심용어 : Compact Finite Volume Method, 고차정확도, Boussinesq 방정식, 이송확산방정식

1. 서 론

편미분방정식을 수치적으로 해석함에 있어 정확도를 높이는 노력은 오래전부터 지속되어왔다. 고정확도(higher order accuracy)의 수치기법일수록 일반적으로 보다 많은 계산격자가 필요하다. 예를 들어, Fig. 1에 나온 i 지점

에서의 1차 도함수를 구하는 경우, Eq. (1)과 같이 2차정확도의 수치기법은 일반적으로 Fig. 1(a)와 같이 3개(f_j 의 계수를 0이라 할 경우)의 격자를 이용한다. Eq. (2)와 같은 4차정확도의 수치기법을 이용하고자 한다면 일반적으로 Fig. 1(b)와 같이 5개(f_j 의 계수를 0이라 할 경우)의 격자를 필요로 한다.

* 서울시립대학교 토목공학과 조교수 (e-mail: dhkimhyd@uos.ac.kr)
Assistant Professor, University of Seoul, Department of Civil Engineering, Seoul 130-743, Korea

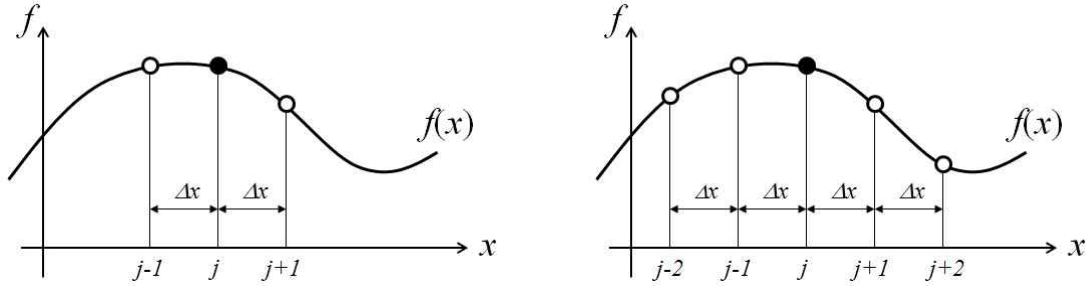


Fig. 1. Eqs. (1) and (2)를 계산하기 위한 격자체계

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (1)$$

$$f'_j = \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (2)$$

Lele (1992)에 의해 'compact scheme'이라 통칭되는 수치해석기법이 소개된 이후, 적은 수의 격자를 이용하면서 동시에 고정확도의 확보가 가능한 수치모형의 개발이 가능해졌다. 예를 들어, 4차정확도의 1차 도함수는 Eq. (3)과 같이 3개의 격자망을 이용하여 구할 수 있다(Lele, 1992).

$$\frac{1}{4}f'_{j-1} + f'_j + \frac{1}{4}f'_{j+1} = \frac{3}{4\Delta x}(f_{j+1} - f_{j-1}) + O(\Delta x^4) \quad (3)$$

이와 같이 적은 수의 격자를 이용하면서도 고정확도의 계산이 가능하므로 compact scheme은 기존의 수치해석 기법에 비하여, 난류 또는 단파와 같은 짧은 스케일의 현상을 보다 정확하게 표현하는데 유리하다(Lacor et al., 2004). 이와 같은 특성으로 인하여 compact scheme은 난류흐름을 해석하기 위한 DNS (Direct Numerical Simulation) 및 LES (Large Eddy Simulation)와 관련된 많은 연구에 사용되었다(Garnet et al., 1999; Boersma and Lele 1999; Meinke et al., 2001). Lacor et al. (2004)은 기존의 finite difference method (FDM)와 달리 Taylor series를 적분하여 이용하는 Compact Finite Volume Method (CFVM)을 제시하였고, compact FDM과 마찬가지로 적은 수의 계산요소가 필요하면서도 동시에 고정확도의 계산이 가능하였다.

Boussinesq 방정식 모형은 비교적 넓은 영역을 대상으로 하는 흐름을 해석하는 경우 많은 장점을 지니고 있어 다양한 흐름의 해석에 적용이 가능하다(Chen et al., 1999; Chen et al., 2003). 그러나 Boussinesq 방정식 모형은 많은 수의 고차항을 가지고 있음과 동시에 4차정확도 이상의

수치해석 기법이 필요하다(Wei and Kirby, 1995). 따라서 Eq. (2)와 같은 일반적인 FDM을 이용한 경우 최소 7개의 격자가 필요하다. Cienfuegos et al. (2006)은 Lacor et al. (2003)이 제시한 4차정확도의 CFVM을 이용하여 일차원 공간의 평평한 바닥위에서 적용이 가능한 Boussinesq 방정식 해석 모형을 제시하였고, 고립파의 진행 문제에 적용한 결과 매우 정확한 해를 구할 수 있었다.

본 연구에서는 이차원 공간에서 임의의 지형에 적용이 가능한 완전비선형 Boussinesq 방정식과 수심평균된 이송확산방정식을 해석하기 위한 CFVM 모형을 개발하는 과정과 검증 결과를 제시하였다.

2. 지배방정식

2.1 완전비선형 Boussinesq 방정식

연직방향의 와도(vorticity)를 포함하는 완전비선형 Boussinesq 방정식은 다음과 같이 주어진다(Chen, 2006).

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} + C_c = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + M_x = \nabla \cdot (\nu_i^h \nabla \mathbf{u}) - \nu_i^v \nabla S - \frac{\tau_x^b}{\rho H} \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + M_y = \nabla \cdot (\nu_i^h \nabla \mathbf{u}) - \nu_i^v \nabla S - \frac{\tau_y^b}{\rho H} \quad (6)$$

여기서,

$$C_c = -\nabla \cdot \left[H \left\{ \left(\frac{1}{6}(\zeta^2 - \zeta h + h^2) - \frac{1}{2}z_\alpha^2 \right) \nabla S \right\} + \left(\frac{1}{2}(\zeta - h) - z_\alpha \right) \nabla T \right] \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
(M_x, M_y) &= \frac{1}{2} \nabla (z_\alpha^2 - \mathbf{u} \cdot \nabla S) + \nabla (z_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla T) + (T \nabla T) \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla \left(\zeta^2 \frac{\partial S}{\partial t} \right) - \nabla \left(\zeta \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{2} z_\alpha^2 \frac{\partial \nabla T}{\partial t} + z_\alpha \frac{\partial \nabla T}{\partial t} \right) \quad (8) \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla (\zeta^2 \mathbf{u} \cdot \nabla S) - \nabla (\zeta \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \nabla \left(\frac{1}{2} \zeta^2 S^2 \right) + \nabla (\zeta T S) \\
&\quad + (\omega_x, \omega_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_x &= -v \left\{ \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} \left(z_\alpha \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} \left(z_\alpha \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right\} \\
&\quad - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left[\left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (\zeta^2 - \zeta h + h^2) \right\} \frac{\partial S}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ z_\alpha - \frac{1}{2} (\zeta - h) \right\} \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_y &= u \left\{ \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} \left(z_\alpha \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} \left(z_\alpha \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right\} \\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left[\left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (\zeta^2 - \zeta h + h^2) \right\} \frac{\partial S}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ z_\alpha - \frac{1}{2} (\zeta - h) \right\} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (10)
\end{aligned}$$

여기서, t 는 시간, x 와 y 는 공간을 나타낸다. $H = \zeta + h$ 는 총수심(total water depth)이며, ζ 는 수위, h 는 수심이다. $\mathbf{u} = (u, v)$ 는 연직좌표 $z = z_\alpha$ 에서 각각 x 와 y 방향의 유속을 나타낸다. z_α 는 임의의 수심으로 본 논문에서는 $z_\alpha = -0.531h$ 를 이용하였다. $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 이고, $S = (\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$ 및 $T = (\partial hu/\partial x + \partial hv/\partial y)$ 로 정의되며, g 는 중력가속도이다.

2.2 수심평균된 이송확산방정식

3차원의 이송확산방정식을 수심방향으로 평균하면, Eq. (11)과 같은 수심평균된 이송확산방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial Hc}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}u c}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{H}v c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(HD_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HD_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (11)$$

여기서, c 는 스칼라의 농도이고, (\tilde{u}, \tilde{v}) 는 수심평균된 x 와 y 방향의 유속을 나타낸다. (D_x, D_y) 는 각각 x 와 y 방향의 확산계수이다.

3. 수치해석 기법

3.1 Time integration

본 논문에서는 Wei and Kirby (1995)가 제시한 바와 같이,

시간항의 해석을 위하여 삼차정확도의 Adams-Bashforth predictor 기법과 사차정확도의 Adams-Moulton corrector 기법을 이용하였다. Predictor 기법은 다음과 같다.

$$\zeta^{N+1*} = \zeta^N + \frac{\Delta t}{12} (23E^N - 16E^{N-1} + 5E^{N-2}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
P^{N+1*} &= P^N + \frac{\Delta t}{12} (23F^N - 16F^{N-1} + 5F^{N-2}) \\
&\quad + 2F_1^N - 3F_1^{N-1} + F_1^{N-2} \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{N+1*} &= Q^N + \frac{\Delta t}{12} (23G^N - 16G^{N-1} + 5G^{N-2}) \\
&\quad + 2G_1^N - 3G_1^{N-1} + G_1^{N-2} \quad (14)
\end{aligned}$$

$$Hc^{N+1*} = Hc^N + \frac{\Delta t}{12} (23T^N - 16T^{N-1} + 5T^{N-2}) \quad (15)$$

Corrector 기법은 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta^{N+1} = \zeta^N + \frac{\Delta t}{24} (9E^{N+1*} + 19E^N - 5E^{N-1} + E^{N-2}) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
P^{N+1} &= P^N + \frac{\Delta t}{24} (9F^{N+1*} + 19F^N - 5F^{N-1} + F^{N-2}) \\
&\quad + F_1^{N+1} - F_1^N \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{N+1} &= Q^N + \frac{\Delta t}{24} (9G^{N+1*} + 19G^N - 5G^{N-1} + G^{N-2}) \\
&\quad + G_1^{N+1} - G_1^N \quad (18)
\end{aligned}$$

$$Hc^{N+1} = Hc^N + \frac{\Delta t}{24} (9T^{N+1*} + 19T^N - 5T^{N-1} + T^{N-2}) \quad (19)$$

여기서, N 은 계산 시간의 단계를 나타낸다. P, Q, E, F, G, F_1, F_2 및 T 는 각각 Eqs. (20)~(26)과 같이 주어진다.

$$P = u + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \zeta^2) u_{xx} + (z_\alpha - \zeta) (hu)_{xx} - \zeta_x \zeta u_x - \zeta_x (hu)_x \quad (20)$$

$$Q = v + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \zeta^2) v_{yy} + (z_\alpha - \zeta) (hv)_{yy} - \zeta_x \zeta v_y - \zeta_x (hv)_y \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \left[\frac{1}{6} (\zeta^2 - \zeta h + h^2) - \frac{1}{2} z_\alpha \right] S_x + \left[\frac{1}{2} (\zeta - h) - z_\alpha \right] T_x \right\}_x \\
&\quad + \left\{ \left[\frac{1}{6} (\zeta^2 - \zeta h + h^2) - \frac{1}{2} z_\alpha \right] S_y + \left[\frac{1}{2} (\zeta - h) - z_\alpha \right] T_y \right\}_y \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F, G) &= \frac{1}{2} \nabla (\zeta^2 \mathbf{u} \cdot \nabla S) + \nabla (\zeta \mathbf{u} \cdot \nabla T) - \frac{1}{2} \nabla (\zeta^2 S^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla (z_\alpha^2 \mathbf{u} \cdot \nabla S) - \nabla (z_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla T) - T \nabla T - \nabla (\zeta T S) \quad (23) \\
&\quad + \nabla \cdot (\nu_t^h \nabla \mathbf{u}) - \nu_t^h \nabla S - \frac{\tau_{x,y}^b}{\rho}
\end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{1}{2}(\zeta^2 - z_\alpha^2)v_{xy} - (z_\alpha - \zeta)(hv)_{xy} + \zeta_x(\zeta v_y + (hv)_y) \quad (24)$$

$$G_1 = \frac{1}{2}(\zeta^2 - z_\alpha^2)u_{xy} - (z_\alpha - \zeta)(hu)_{xy} + \zeta_y(\zeta u_x + (hu)_x) \quad (25)$$

$$T = -\frac{\partial H\tilde{c}u}{\partial x} - \frac{\partial H\tilde{c}v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x H \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y H \frac{\partial c}{\partial y}\right) \quad (26)$$

Predictor-corrector 기법은 Eq. (27)의 조건을 만족시킬 때까지 반복적으로 계산을 수행하며, 본 논문에서는 $\Delta\phi = 10^{-4}$ 을 기준으로 하였다.

$$\Delta\phi = \frac{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1*}|}{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{n+1}|} \quad (27)$$

3.2 Compact Finite Volume Method

CFVM은 적은 수의 계산요소를 필요로 하면서도 고정확도를 확보할 수 있다. 따라서 Boussinesq 방정식과 같이 고차미분항이 매우 많은 방정식을 풀기 위한 모형의 개발에 매우 용이하다.

임의의 변수 ϕ 의 단위체적에 대한 평균치를 $\bar{\phi}$ 로 표기하면, 계산요소 i 에서의 평균치 $\bar{\phi}$ 와 계산요소간의 인접면 $i \pm 1/2$ 에서의 ϕ 의 관계는 Eq. (28)과 같이 주어진다. (Lacor et al., 2004)

$$\frac{1}{4}\phi_{i-1/2} + \phi_{i+1/2} + \frac{1}{4}\phi_{i+3/2} = \frac{3}{4}(\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}) + O(\Delta x^4) \quad (28)$$

또한 계산요소 인접면에서 변수의 일계미분 ϕ_x 와 ϕ 의 관계는 Eq. (29)와 같이 주어진다(Lele, 1992).

$$\frac{1}{4}(\phi_x)_{i-1/2} + (\phi_x)_{i+1/2} + \frac{1}{4}(\phi_x)_{i+3/2} = \frac{3}{4\Delta x}(\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}) + O(\Delta x^4) \quad (29)$$

이와 같이 주어진 Eqs. (28) and (29)를 이용하여, Eqs. (20)~(26)을 공간적으로 이산화 한다.

4. 수치모의 결과 및 검증

4.1 타원형 천퇴 지형을 통과하는 파랑 해석

본 절에서는 Berkhoff et al. (1982)이 수행한 실험결과를 본 연구에서 개발된 CFVM 모형을 이용하여 수치적으로 재현하였다. Fig. 2는 수로의 평면도로 지형과 계측 위치를 나타내고 있다. 수로의 경사부분은 아래 Eqs. (30)~(32)와 같이 표현이 가능하다.

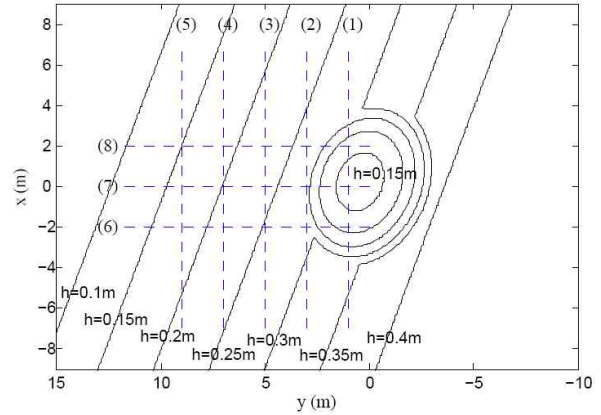


Fig. 2. Berkhoff (1982)의 실험 수로 평면도 (점선: 계측 위치, 실선: 지형 등고선)

$$x' = (x - x_o)\cos 20^\circ + (y - y_o)\sin 20^\circ \quad (30)$$

$$y' = (y - y_o)\cos 20^\circ + (x - x_o)\sin 20^\circ \quad (31)$$

$$h = \begin{cases} 0.45 - 0.02(5.84 - y') & \text{for } y' < 5.84 \\ 0.45 & \text{for } y' \geq 5.84 \end{cases} \quad (32)$$

여기서, x_o 와 y_o 는 타원형 shoal의 중앙부분이며, $(x'/4)^2 + (y'/3)^2 < 1$ 의 범위내의 타원형 shoal의 지형은 Eq. (33)과 같이 정의된다.

$$h_{shoal} = h + 0.3 - 0.5 \left\{ 1 - \left(\frac{x'}{5} \right)^2 - \left(\frac{y'}{3.75} \right)^2 \right\}^{0.5} \quad (33)$$

우측경계에서 주기 $T = 1.0$ s, 파고 $H_o = 0.0464$ m의 파랑을 발생시켰으며, 수치계산을 위해 $\Delta t = 0.01$ s, 격자간격 $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m를 이용하였고, 마찰 및 와점성항을 계산에 포함시키지 않았다.

Fig. 3은 Berkhoff et al. (1982)의 실험결과와 CFVM을 이용한 계산결과를 Fig. 2에 표시되어 있는 (1)~(8)의 직선 위치에서 비교한 것으로 실험을 통한 계측치와 수치모형을 이용한 계산치가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.2 일차원 및 이차원공간에서의 이송-확산 모의

본 절에서는 CFVM을 이용하여 개발한 이송확산 예측 모형의 정확도를 검토하였다. 첫 번째로 일차원공간에서 exponential 함수형태의 스칼라가 이송되는 과정을 모의하였다. 초기조건은 다음과 같이 주어진다.

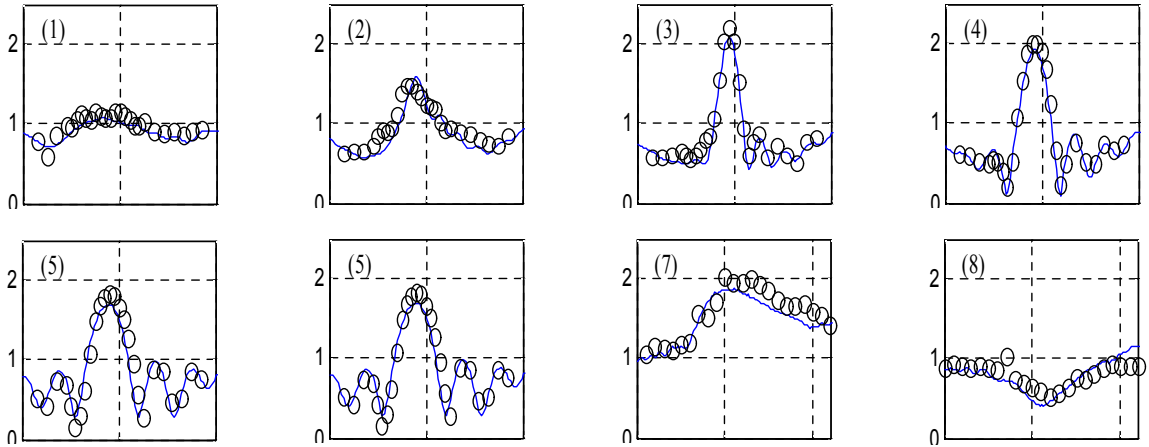


Fig. 3. Berkhoff의 실험 결과와 CFVM 모형 수치모의 결과 비교 (실선: 수치해, O: 실험치)

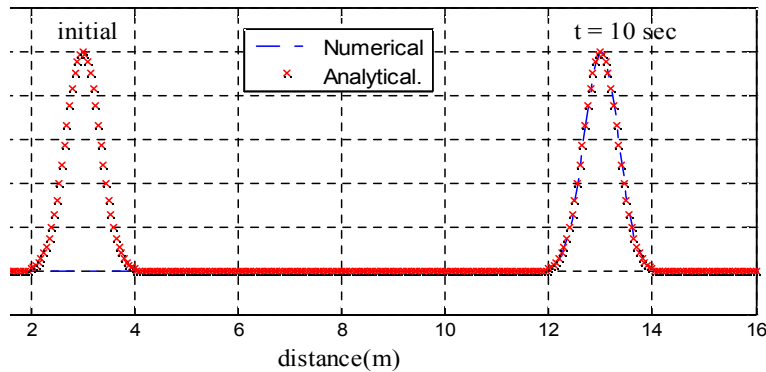


Fig. 4. CFVM 이송 모형 모의 결과와 해석해의 비교 결과

$$c(x,0) = \begin{cases} \exp(-4.5(x-3)^2), & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (34)$$

유속은 1 m/s로 가정하였고, 수치계산을 위해 $\Delta x = 0.05$ m, $\Delta t = 0.05$ s를 이용하였으며 수치확산(numerical diffusion) 여부를 확인하기 위해 확산항은 수치모의에 포함하지 않았다. Fig. 4는 CFVM을 이용한 계산 결과와 정확해를 비교한 것으로, CFVM이 정확해와 매우 정확하게 일치하고 있음을 보여주고 있다.

다음으로 이차원공간에서 태풍과 같은 형태로 물이 흐르는 경우, 스칼라의 이송에 대한 수치모의를 수행하였다. 문제의 초기조건은 Tamamidis and Assanis (1993)이 제시한 Eqs. (35)~(39)를 이용하여 구하였다.

$$c(x,y,t) = -\tanh(0.5(y\cos(wt) - x\sin(wt))) \quad (35)$$

$$w(x,y) = p/(d\max(p)) \quad (36)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (37)$$

$$p = \text{sech}^2(r)\tanh(r) \quad (38)$$

$$\tilde{u}(x,y) = -wy, \quad \tilde{v}(x,y) = wx \quad (39)$$

여기서, $\max(p) = 0.385$ 이고, 8×8 m²의 정사각형 공간을 200×200 개의 계산요소로 나누었다. Fig. 5는 $t = 1$ s, $t = 3$ s 및 $t = 8$ s에서의 계산결과와 해석해의 비교결과를 나타내고 있다. 그림의 좌측부분은 농도의 분포이고, 우측부분은 중앙을 지나는 단면에서의 계산결과와 해석해를 비교한 것이다. Fig. 5에 나타나 있듯이, 소용돌이와 같은 흐름장에서 스칼라의 이송이 물리적으로 타당하게 모의되고 있음을 농도분포도를 통해 확인할 수 있다. 또한 계산결과와 해석해는 Tamamidis and Assanis (1993)가 제시한 이차정확도의 수치기법을 이용한 결과 보다 잘 일치하고 있다. 특히 공간적으로 변화가 매우 큰 계산 영역의 중앙 부분에서도 정확도가 매우 우수하게 나타났고, 수치확산은 거의 발견되지 않았다.

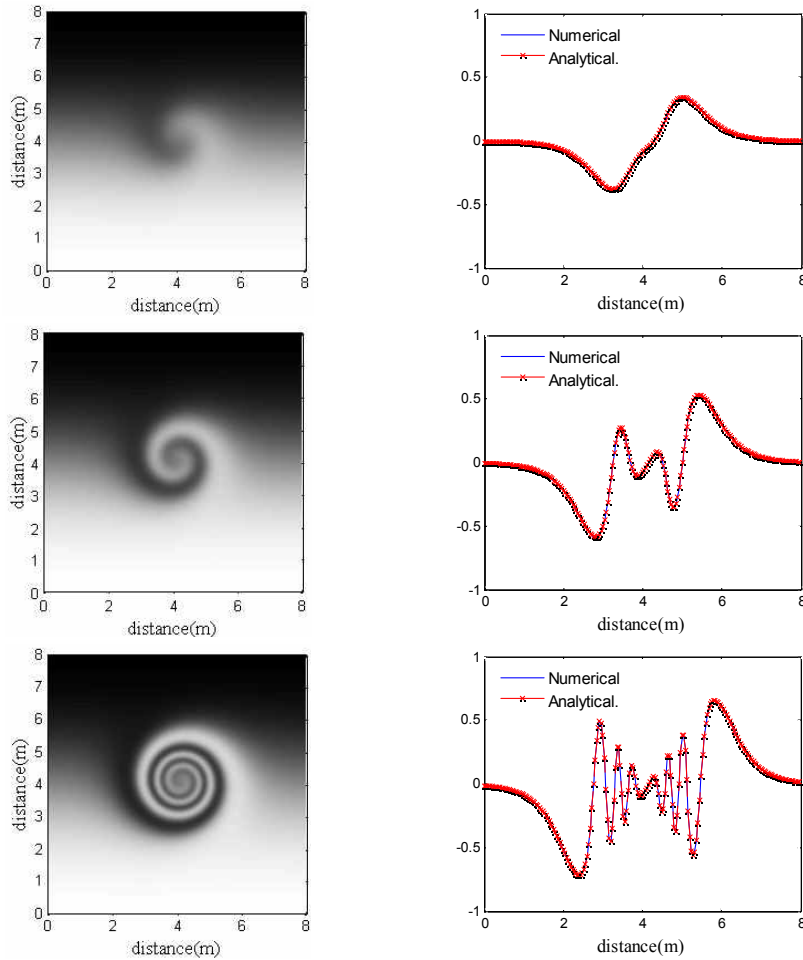


Fig. 5. 소용돌이 흐름에서의 농도 분포 비교결과

4.3 개수로에서의 난류 혼합 모의

본 절에서는 Babarutsi and Chu (1988)가 수행한 개수로에서의 흐름 실험을 대상으로 난류혼합에 대한 수치모의를 수행하였다. 난류에 의해 혼합되는 양상을 모의하기 위하여 흐름모의에 바닥마찰과 와점성을 고려하였다. 바닥마찰은 다음과 같은 Eq. (40)을 이용하여 산정하였다.

$$\tau^b = C_f \rho \tilde{u} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (40)$$

여기서 ρ 는 물의 밀도이고, C_f 는 마찰계수로 $C_f = gn^2/H^{1/3}$ 의 관계를 이용하여 구하며, n 은 Manning 계수이다. 수평방향의 subgrid scale dissipation은 다음과 같이 Smagorinsky model을 이용하였다(Smagorinsky, 1963).

$$\nu_t^i = C_s^2 \Delta x \Delta y \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (41)$$

여기서, Smagorinsky 상수 $C_s = 0.2$ 가 사용되었고, Δx 와 Δy 는 격자의 크기이다. 연직방향 와확산계수(eddy viscosity)는 다음과 같이 주어진다.

$$\nu_t^v = C_h H u_\tau \quad (42)$$

여기서, C_h 는 Elder (1959)가 제안한 $C_h = \kappa/6$ 가 사용되었다. κ 는 von Karman 상수로써, 0.4가 사용되었고, $u_\tau = (\tau_b/\rho)^{0.5}$ 는 마찰속도(friction velocity)이다.

Fig. 6은 대상 수로의 개요를 나타낸 평면도이다. 수로의 폭은 0.61 m이고 수심은 $h = 0.0296$ m이다. Fig. 6과 같이, 유입부는 두 구역으로 분리되어 한쪽에서는 유속은 0.111 m/s, 다른 쪽에서는 유속 0.264 m/s의 흐름이 유입되고 있다. 하류단에서는 transmissive boundary condition (Toro, 1999)을 이용하였다. 계산격자의 크기는 $\Delta x = \Delta y = h/5$ 를 이용하였다. 스칼라의 확산을 모의하기 위해 $D_x = D_y = \nu_t^i/\sigma_t$ 의 관계를 이용하였고, σ_t 는 turbulent Schmidt number로써, 본 논문에서는 수로에 주입되는 스칼라를

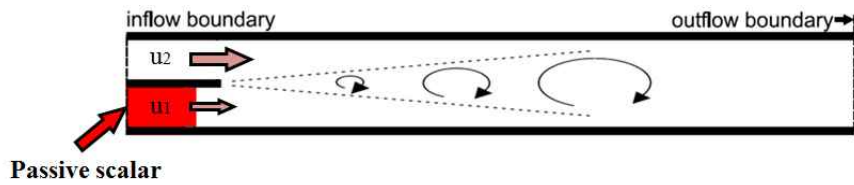


Fig. 6. 난류혼합 모의를 위한 수로 개념도

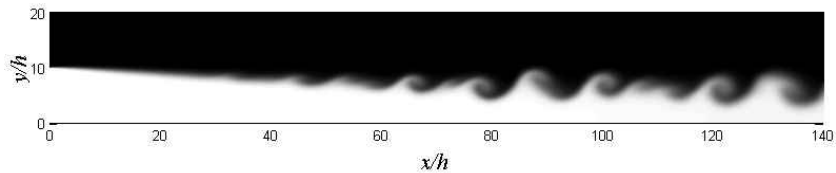


Fig. 7. CFVM을 이용한 순간적인 스칼라 농도 분포

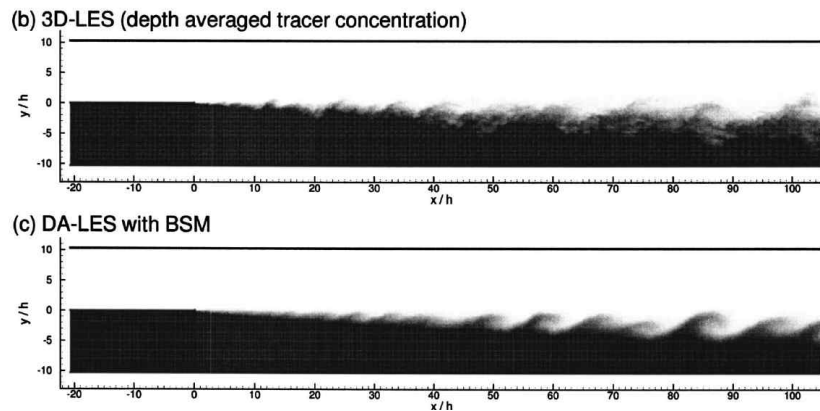


Fig. 8. LES를 이용한 순간적인 스칼라 농도 분포 (by Hinterberger et al., 2006)

완전한 passive 스칼라로 가정하여 $\sigma_t = 1.0$ 을 이용하였다. Fig. 7은 어느 순간의 스칼라 농도 계산결과를 도시한 것으로 Fig. 8에 도시되어 있는 Hinterberger et al. (2007)이 제시한 LES 결과와 유사한 양상을 보여주고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 적은 수의 격자를 이용하여 고정확도의 계산이 가능한 CFVM을 이용하여, 이차원공간에서 임의의 지형위에 적용이 가능한 완전비선형 Boussinesq 방정식과 수심평균된 이송확산방정식을 해석하기 위한 수치모형을 제시하였다.

CFVM에 의한 수치모의 결과를 실험결과 및 해석해와 비교한 결과 본 논문에서 제시된 이차원의 CFVM은 임의의 지형을 전파하는 흐름과 파랑을 적절히 모의할 수 있었다. 즉 이차원 공간의 Boussinesq 방정식 해석에 적용이 가능하였다. 스칼라의 수송과정을 모의한 결과 주어진

문제에 대하여 수치확산이 거의 없이 정확한 해를 구할 수 있었다. 즉 CFVM을 이용하는 경우 수치확산이 수치모의 결과에 미치는 영향이 매우 작을 것으로 기대할 수가 있을 것이다. 마지막으로 개수로 흐름과 흐름에 의한 스칼라의 혼합 양상 또한 매우 적절한 결과를 나타내어 CFVM이 난류 혼합을 적절히 모의할 수 있는 것으로 판단된다.

그러나 본 논문에서 제시한 내용은 CFVM의 도입에 대한 수치해석 위주의 기초적이고 제한적인 내용으로, 보다 복잡하고 일반적인 지형과 흐름 및 이송확산에 대한 적용성에 대한 검토가 향후 필요할 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 서울시립대학교 교내학술연구비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- Berkhoff, N., Booy, A.C., and Radder, A.C. (1982). "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves." *Coastal Engineering*, Vol. 6, No. 3, pp. 255-79.
- Babarutsi, S., and Chu, V.H. (1998). "Modeling Transverse Mixing Layer in Shallow Open-Channel Flows." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 7, pp. 718-727.
- Boersma, B.J., and Lele, S.K. (1999). "Large eddy simulation of a mach 0.9 turbulent jet." *AIAA paper*, pp. 99-1874.
- Chen, Q. (2006). "Fully nonlinear Boussinesq-type equations for waves and currents over porous beds." *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 132, No. 2, pp. 220-230.
- Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., and Haller, C.M. (1999). "Boussinesq modeling of a rip current system." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 104, No. 9, pp. 20617-20637.
- Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Shi, F., and Thornton, E.B. (2003). "Boussinesq modeling of longshore currents." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 108, No. C11, pp. 3362-3380.
- Cienfuegos, R., Barthelémy, E., and Bonneton, P. (2006). "A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I: Model development and analysis." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 51, No. 11, pp. 1217-1253.
- Elder, J.W. (1959). "The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 5, No. 4, pp. 544-560.
- Gamet, L., Ducros, F., Nicoud, F., and Poinso, T. (1999). "Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 29, No. 2, pp. 159-191.
- Hinterberger, C., Frohlich, J., and Rodi, W. (2007). "Three-dimensional and depth-averaged large-eddy simulations of some shallow water flows." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 133, No. 8, pp. 857-872.
- Lacor, C.A., Smirnov, S.A., and Baelmans, M. (2004). "A finite volume formulation of compact central schemes on arbitrary structured grids." *Journal of Computational Physics*, Vol. 198, No. 2, pp. 535-566.
- Lele, S.K. (1992). "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution." *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, No. 1, pp. 16-42.
- Meinke, M., Schröder, W., Krause, E., and Rister, T. (2001). "A comparison of second- and sixth-order methods for large-eddy simulation." *Computer and Fluids*, Vol. 31, No. 4-7, pp. 695-718.
- Smagorinsky, J. (1963). "General circulation experiments with primitive equations, I. the basic experiment." *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164.
- Tamamidis, P., and Assanis, D.N. (1993). "Evaluation of various high-order-accuracy schemes with and without flux limiters." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, No. 10, pp. 931-948.
- Toro, E.F. (1999). "Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics." Springer-Verlag.
- Wei, G., and Kirby, J.T. (1995). "Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations." *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 5, pp. 251-261.

논문번호: 11-132	접수: 2011.12.16
수정일자: 2012.02.06/02.29	심사완료: 2012.02.29