

내부 및 외부 유체와 연성된 파이프의 진동 해석

Vibration of Pipes Coupled with Internal and External Fluids

유정수

(Jungsoo Ryue)

울산대학교 조선해양공학부

(접수일자: 2011년 6월 22일; 수정일자: 2012년 1월 3일; 채택일자: 2012년 2월 24일)

초 록: 도파관유한요소법 (waveguide finite element method, WFEM)은 단면의 형상이 길이방향으로 일정한 도파관 구조물의 진동을 해석하기 위한 수치해석 기법이다. 도파관유한요소법은 2차원 단면만을 FE 모델링하여 길이방향 파동 전파를 해석하므로 기존의 유한요소법에 비해 해석 모델의 크기가 작고 연산 시간이 짧다는 장점을 가진다. 본 연구에서는 기존의 도파관유한요소법을 확장하여 내부 및 외부에 유체가 채워진 도파관 구조물에 대한 진동 해석을 수행하였다. 이를 위해 내부 유체와 도파관 구조물은 WFE로, 외부 유체는 파수경계요소 (waveguide boundary element, WBE)로 모델링하고 이들을 연성시킨 운동방정식을 제시하였다. 이 방법의 적용 예로써 내부에 물이 채워진 몰수된 파이프의 진동 및 방사 음향 파워를 해석하였다. 내부 및 외부 유체의 유/무에 따른 분산 선도와 가진점 모빌리티 (point mobility)를 구하고 유체 연성의 효과를 살펴보았다.

핵심용어: 도파관유한요소법, 내부 유체, 파이프, 분산 선도, 모빌리티

투고분야: 구조음향 및 진동 분야(11.2)

ABSTRACT: The waveguide finite element (WFE) method is a useful numerical technique to investigate wave propagation along waveguide structures which have uniform cross-sections along the length direction ('x' direction). In the present paper, the vibration and radiated noise of the submerged pipe with fluid is investigated numerically by coupling waveguide finite elements and wavenumber boundary elements. The pipe and internal fluid are modelled with waveguide finite elements and the external fluid with wavenumber boundary elements which are fully coupled. In order to examine this model, the point mobility, dispersion curves and radiated power are calculated and compared for several different coupling conditions between the pipe and internal/external fluids.

Key words: Waveguide finite element method, Internal fluid coupling, Pipe, Dispersion diagram, Point mobility

ASK subject classification: Structural Acoustic and Vibration (11.2)

1. 서 론

원통형 실린더, 파이프 또는 덕트 등을 따라 전파되는 파동에 대한 연구는 이들 구조물의 진동, 소음 해석뿐만 아니라 구조물에 존재하는 결함 등의 국부적 불연속을 효과적으로 찾기 위한 상태 진단 (condition monitoring) 등에 응용될 수 있다. 이러한 연구의 적용 예로는, 선박 내부에 설치된 배관 및 덕트의 진동과 소음, 송유관, 가스관을 비롯해 지하에 매

설된 수도관 등의 결함 탐지 등을 들 수 있다. 특히, 이들 배관 구조물은 내부에 물 또는 기름 등과 같은 유체가 채워지는 경우가 많으므로 구조물과 내부 유체를 함께 해석해야 할 필요가 있다.

Fuller와 Fahy^[1]는 내부에 유체가 채워진 얇은 두께의 원통형 실린더에 대한 이론해를 제시하고 분산 선도 (dispersive curve)를 이용해 원주 방향 모드별로 파동 전파 특성을 해석하였다. 그들은 이 연구를 통해 파동 전파 특성이 원통형 실린더의 두께 그리고 내부 유체와 원통형 실린더 재료의 밀도 비 (ratio of the density)에 의해 크게 변화됨을 파악하였다. De

*Corresponding author: 유정수 (jsryue@ulsan.ac.kr)
680-749 울산광역시 남구 대학로 102 울산대학교
조선해양공학부 311호
(전화: 052-259-2168; 팩스: 052-259-2677)

Jong^[2]은 내부와 외부 모두 유체와 연성된 파이프에 대한 이론해를 구하고 연성된 유체에 의한 분산 선도의 변화를 살펴보았다. 또한 땅 속에 매설된 파이프의 누수(water leakage) 위치를 찾기 위한 목적으로 파이프-내부 유체 연성 진동 해석이 수행된 바 있다^[3,4].

길이가 무한히 긴 원통형 실린더에 대한 파동 해석에 기존의 유한요소법을 이용하는 것은 길이 방향으로 많은 요소가 필요하므로 효율적이지 못하다. 더욱이 내부 유체가 포함된 경우에는 유체 모델링으로 인해 수치 모델의 크기가 더욱 커진다. 이러한 문제점을 해소하기 위해, 내부 유체와 연성된 무한 길이 원통형 실린더를 효과적으로 해석할 수 있는 수치해석기법에 관한 연구가 수행되고 있다.

Maess 등^[5]은 내부 유체와 연성된 파이프를 해석하기 위해 기존의 유한요소법을 이용해 짧은 길이의 유한요소 모델을 만든 후 반복 구조 이론(periodic structure theory)을 이용해 분산 선도를 구하였다. 그러나 이 방법은 모델링에 이용한 유한요소의 길이에 의해 상한 및 하한 주파수가 제한되는 단점을 가진다. Nilsson과 Finnveden^[6]은 도파관 유한요소법(waveguide finite element method, WFEM)을 이용해 내부 유체가 채워진 얇은 원통형 실린더의 분산 선도를 구하였다. WFE 방법은 구조물의 2차원 단면(y, z 평면)만을 유한 요소 모델링하여 파동의 길이 방향(x 방향) 전파를 해석하므로 모델의 크기가 작고 연산 속도가 빠르다는 장점이 있다. 그러나 이들의 연구는 WFE 해석 기법에 관한 내용을 주로 다루고 있어 내부 유체가 채워진 원통형 실린더의 파동 전파 및 진동 특성을 상세히 다루지 않았다. 이상의 수치 해석을 이용한 연구들에서는 분산 선도를 얻기 위한 자유 진동, 즉 고유치 해석(eigenvalue analysis)만을 기술하고 있어 원통형 실린더에 외력이 가해졌을 때 발생하는 구조물의 진동 및 내부 음압 등에 대한 해석이 다루어지지 못하였다.

본 논문에서는 내부와 외부가 유체와 연성된 도파관구조물의 진동 및 소음을 도파관유한요소(WFE) 그리고 파수경계요소(WBE)를 이용해 해석하고자 한다. 외부 유체와 연성된 도파관구조물에 대한 운동방정식은 참고문헌^[7]에서 상세히 소개하였다. 본 연구에서는 도파관구조물의 내부에 존재하는 유체

에 대해 WFE 운동방정식을 제시하고, 참고문헌^[7]에서 유도한 운동방정식과 결합하여 내부와 외부가 모두 유체와 연성된 도파관구조물의 진동 및 소음 해석을 시도하였다. 적용 예로써, 내부에 유체가 채워진 물수된 파이프에 대하여 WFE 해석을 수행하고, 내/외부 유체 연성에 의한 파이프의 진동 특성 변화를 살펴보았다.

II. 수치 모델

단면의 형상이 길이 방향으로 일정하게 유지되는 빔, 파이프, 원통형 실린더, 레일 등과 같은 구조물을 일컬어 도파관(waveguide)이라 하며, 도파관에서의 탄성과 전파 및 진동 해석은 도파관 유한요소법(WFEM)을 이용해 효과적으로 해석할 수 있다. WFE 해석에서는 도파관 단면의 진동 모드가 길이 방향으로 조화 진동하면서 전파한다고 가정하므로, 2차원 단면만을 유한요소 모델링하고 파동의 길이 방향 전파는 복소 지수 함수, e^{-jkx} ,를 이용하여 표현한다. 여기서 x 는 도파관 구조물의 길이 방향 좌표축, k 는 도파관을 따라 전파하는 파동의 x 방향 파수(wavenumber)이다. WFE 방법은 구조물의 2차원 단면만을 유한요소 모델링하여 해석하므로 수치 해석 모델의 크기가 작고 연산 속도가 빠르다는 장점이 있다. 이 수치 해석 기법은 이론 해석이 어려운 임의 형상의 단면을 가진 보, 보강 평판, 타이어, 레일 및 지반 등의 진동 해석 등에 이용되고 있다^[8-10]. WFE 방법은 유한요소법에 기반하지만 길이 방향 파동 전파는 이론해를 사용하므로 'semi-analytical FE (SAFE)' 방법^[11]이라고도 불리며, 주어진 주파수에 대해 파수 영역을 해석하므로 파수 유한 요소법(wavenumber FE method)^[12]이라고도 불린다.

본 장에서는 내부/외부 유체와 연성된 파이프 해석을 위한 도파관 유한요소법 및 파수경계요소법에 대해 기술하고자 한다. 즉, 고체(solid)와 내부 유체(internal fluid)에 대해서는 도파관 유한요소법을, 외부 유체(external fluid)에 대해서는 파수경계요소법을 적용한다. 고체 영역에 대한 도파관 유한요소법과 파수경계요소법에 대한 지배 방정식은 참고문헌^[7]에서 기술하였으므로 본 논문에서는 유체 영역에

대한 도파관유한요소 방정식과 내부유체-고체-외부유체가 연성된 전체 시스템의 운동방정식에 대해 기술하고자 한다.

2.1. 내부 유체 모델링

유체가 비점성 (inviscid)을 가진다고 가정하면, 음압 (pressure) p 와 유체 입자의 속도 (fluid particle velocity) \mathbf{v} 는 속도 포텐셜 (velocity potential) ψ 를 이용해 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{v} = -\nabla\psi, \quad p = \rho_f \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (1)$$

여기서 ρ_f 는 평형 상태에서의 유체 밀도를 나타낸다. 유체의 포텐셜 에너지 변분은

$$\delta U_f(\omega) = \omega^2 \int_V \frac{\rho_f}{c_f^2} \delta\psi^* \psi dV \quad (2)$$

로 표현되며, c_f 는 유체에서의 음파 전파 속도이며, *는 복소 쥬레 (complex conjugate)를 나타낸다. 유체의 운동 에너지 변분은

$$\delta T_f(\omega) = \int_V \rho_f \nabla\delta\psi^H \nabla\psi dV \quad (3)$$

식 (2)와 (3)을 이용해 유체 요소에 대한 Lagrangian, δL_f 는 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta L_f &= \delta T_f(\omega) - \delta U_f(\omega) \\ &= \int_V \left(\rho_f \nabla\delta\psi^H \nabla\psi - \omega^2 \frac{\rho_f}{c_f^2} \delta\psi^* \psi \right) dV \end{aligned} \quad (4)$$

형상 함수를 이용해 $\psi = \mathbf{N}_f^T \hat{\boldsymbol{\psi}}$ 와 $\delta\psi = \mathbf{N}_f^T \delta\hat{\boldsymbol{\psi}}$ 로 근사화하면 유체 요소에 대한 Lagrangian, δL_f 는

$$\begin{aligned} \delta L_f &= \rho_f \int_V \left(\delta\hat{\boldsymbol{\psi}}^H \mathbf{b}_{00} \delta\hat{\boldsymbol{\psi}} + \frac{\partial\delta\hat{\boldsymbol{\psi}}^H}{\partial x} \mathbf{b}_{11} \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\psi}}}{\partial x} - \omega^2 \delta\hat{\boldsymbol{\psi}}^H \mathbf{n}_2 \hat{\boldsymbol{\psi}} \right) dV \end{aligned} \quad (5)$$

로 쓸수있으며, 여기서 $\mathbf{b}_{00} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$, $\mathbf{b}_{11} = \int \mathbf{N}_f \mathbf{N}_f^T dA$,

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}_{11}/c_f^2 \text{이며 } \mathbf{B} = \left[\frac{\partial\mathbf{N}_f}{\partial z} \quad \frac{\partial\mathbf{N}_f}{\partial y} \right] \text{이다.}$$

2.2 고체 모델링

고체 요소에 대한 지배방정식 유도는 참고문헌 [7]에 상세히 소개되어 있으며, 본 절에서는 식의 유도를 생략하고 참고문헌 [7]에서 제시된 고체 요소에 대한 Lagrangian, δL_s 를 식 (6)에 나타내었다.

$$\begin{aligned} \delta L_s(\omega) &= \delta U_s(\omega) - \delta T_s(\omega) \\ &= \int_x \left(\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \frac{\partial^k \delta\hat{\mathbf{u}}^H}{\partial x^k} \mathbf{a}_{kl} \frac{\partial^l \hat{\mathbf{u}}}{\partial x^l} - \omega^2 \delta\hat{\mathbf{u}}^H \mathbf{m}_s \hat{\mathbf{u}} \right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 $\hat{\mathbf{u}}$ 는 유한요소 절점의 변위 벡터, \mathbf{a}_{kl} 와 \mathbf{m}_s 는 각각의 유한 요소에서 얻어지는 행렬이다.

2.3 외부 유체 모델링

도파관 구조물이 외부 유체와 연성되어 있는 경우, 외부 유체를 경계요소 (boundary element)로 모델링하고 이를 앞 절에서 살펴본 파수유한요소와 결합시켜 해석할 수 있다. 파수경계요소에 모델링은 참고문헌 [7]에 기술되어 있으므로 본 절에서는 유도과정을 생략한다. 파수경계요소에 대한 운동방정식은

$$\mathbf{H}\tilde{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{G} \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\psi}}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (7)$$

이며, 여기서 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ 와 $\partial\tilde{\boldsymbol{\psi}}/\partial \mathbf{n}$ 는 경계요소의 노드에서 정의되는 벡터, \mathbf{n} 은 구조물과 접하고 있는 경계요소의 수직벡터 (normal vector), \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 Green 함수 행렬을 나타낸다.

2.4. 전체 연성 모델

고체 요소와 내부 유체가 접하는 경계면에서 작용하는 가상일은 $\delta B_c = \delta W_f + \delta W_s$ 로 정의된다. 여기서, δW_s 는 접하고 있는 유체에 의해 고체 요소에 가해지는 일, δW_f 는 고체에 의해 유체 요소에 가해지는 일로써, 이 두 항은 아래 식으로 표현된다.

$$\delta W_s = \int_s \delta u_n^* p dS, \delta W_f = - \int_s \delta p^* u_n dS \quad (8)$$

여기서 δu_n 은 고체 요소에서 유체가 있는 방향으로 발생하는 수직 방향 가상 변위이며, p 는 접수면에 수직인 유체 압력이다. 압력 p 를 식 (1)의 속도 포텐셜 항으로 치환하면

$$\delta B_c = i\omega \int \rho_f (\delta \psi^* u_n - \delta u_n^* \psi) dS \quad (9)$$

이 되고, 여기에 다시 형상 함수를 이용해 근사화시키면 식 (10)이 된다.

$$\delta B_c = i\omega \int [\delta \hat{\mathbf{u}}^H \delta \hat{\boldsymbol{\psi}}^H] \mathbf{m}_1 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix} dx \quad (10)$$

여기서

$$\mathbf{m}_1 = \rho_f \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{T}^H \mathbf{I}^H \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{I}_1 = a \int_{-1}^1 \mathbf{N}_s \mathbf{N}_f^T d\xi \quad (11)$$

a 는 유체와 접하는 요소의 반 폭 (half width), \mathbf{T} 는 국부 좌표계 (local coordinates)의 변위를 전역 좌표계 (global coordinates)로 바꾸어 주는 변환 행렬이다.

고체 요소와 유체 요소가 연성된 전체 시스템은

$$\int_x \left(\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \frac{\partial^k \hat{\mathbf{U}}^H}{\partial x^k} \mathbf{C}_{kl} \frac{\partial^l \hat{\mathbf{U}}}{\partial x^l} + i\omega \delta \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{M}_1 \hat{\mathbf{U}} - \omega^2 \delta \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{M}_2 \hat{\mathbf{U}} \right) dx = 0 \quad (12)$$

여기서 $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}} \ \hat{\boldsymbol{\psi}}]^T$, \mathbf{M}_1 은 \mathbf{m}_1 으로 구성된 행렬이며, \mathbf{M}_2 와 \mathbf{C}_{ij} 는 식 (13)과 같다.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{kl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{kl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{kl} \end{bmatrix} \quad (13)$$

\mathbf{M}_s 와 \mathbf{M}_f 는 고체 영역과 유체 영역에 대한 질량 행렬, \mathbf{A}_{kl} 는 각 고체 요소들의 \mathbf{a}_{kl} 가 모아진 행렬이며, \mathbf{B}_{00} 와 \mathbf{B}_{11} 은 각각 유체 요소의 \mathbf{b}_{00} 와 \mathbf{b}_{11} 으로 구성된 행렬이다. 유체의 프와송비 (Poisson's ratio)와 전단

계수 (shear modulus)를 모두 0으로 가정할 경우, \mathbf{B}_{10} 와 \mathbf{B}_{01} 은 영 행렬 (zero matrix)이 된다. 식 (12)로부터 구한 운동 방정식은

$$\left[\mathbf{K}_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{K}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{K}_0 + i\omega \mathbf{M}_1 - \omega^2 \mathbf{M}_2 \right] \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (14)$$

로 표현된다. 여기서 \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_1 그리고 \mathbf{K}_0 는 구조물의 강성과 관련된 행렬로써,

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{C}_{00}, \mathbf{K}_1 = \mathbf{C}_{01} - \mathbf{C}_{10}, \mathbf{K}_2 = -\mathbf{C}_{11} \quad (15)$$

이다^[12]. 식 (21)에서 변위 벡터를 $\hat{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}} e^{-j\kappa x}$ 로 표현하면

$$\left[\mathbf{K}_2 (-j\kappa)^2 + \mathbf{K}_1 (-j\kappa) + \mathbf{K}_0 + i\omega \mathbf{M}_1 - \omega^2 \mathbf{M}_2 \right] \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (16)$$

이 된다.

도파관유한요소와 파수경계요소가 서로 접하는 노드에서는 유체 입자와 고체요소의 수직방향 속도가 같아야 하므로

$$\tilde{v}_{ni} = i\omega \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{n} \quad (17)$$

이 된다. 여기서 \tilde{v}_{ni} 는 경계면에 수직인 \mathbf{n} 방향 유체 입자 속도, $\tilde{\mathbf{u}}_i$ 는 노드 i 에서의 도파관유한요소 변위, ‘ \cdot ’은 벡터의 내적 (inner product)이다. 식 (17)의 조건을 이용해 경계면에서 접하는 모든 노드에 대한 연성조건을 구하면 식 (18)과 같다.

$$i\omega \mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{I}_2 \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (18)$$

여기서 \mathbf{I}_2 는 단위행렬, \mathbf{C}_2 는 고체요소와 외부 유체 요소 간 변위의 연성행렬을 나타낸다. 최종적으로, 도파관 구조물이 내부 유체 및 외부 유체가 연성되는 경우, 전체 시스템 운동방정식은 식 (7), 식 (18) 그리고 식 (19)로 표현된다.

$$\{K(\kappa) + i\omega M_1 - \omega^2 M_2\} \tilde{U} = \tilde{F} + i\omega p C_1 \tilde{\psi} \quad (19)$$

여기서 $K(\kappa) = K_2(-j\kappa)^2 + K_1(-j\kappa) + K_0$, \tilde{F} 는 고체 요소에 작용하는 외력 벡터, C_1 은 고체요소와 외부 유체 간 힘의 연성을 나타내는 행렬이다. 만약 외부 유체가 공기라면, 외부 유체에 의한 연성효과를 무시할 수 있으므로 식 (18)의 연성항 ($i\omega p C_1 \tilde{\psi}$)과 식 (18) 없이 해를 구할 수 있다.

III. 내부에 유체가 채워진 몰수된 파이프의 진동 해석

본 장에서는 WFE 방법을 이용해 내부에 유체가 채워진 몰수된 파이프의 진동을 해석하였다. 본 해석에 이용된 파이프 및 내/외부 유체의 물성치는 표 1에 나타내었다.

그림 1에는 내부와 외부가 유체와 연성된 파이프의 단면 모델을 나타내었다. 파이프는 32개의 고체

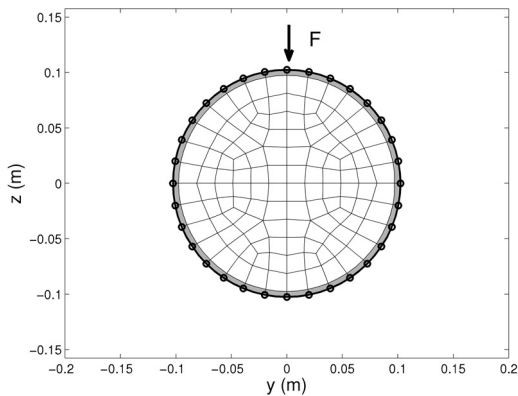


그림 1. 내부 및 외부 유체와 연성된 파이프의 단면 모델
Fig. 1. Cross-sectional WFE and BE model of submerged water-filled pipe.

표 1. 파이프의 제원 및 내부/외부 유체 물성치

| 파이프 | | 내부/외부 유체 | |
|-----------------|------------------------|----------|------------------------|
| 외부 반경 | 0.1025 m | 밀도 | 1000 kg/m ³ |
| 내부 반경 | 0.0975 m | 음파 전파 속도 | 1500 m/s |
| 두께 | 5 mm | | |
| Young's modulus | 210 GPa | | |
| 밀도 | 7800 kg/m ³ | | |
| 프와송 비 | 0.3 | | |

요소로, 내부 유체는 120개의 유체 요소로 이루어져 있으며, 각 요소는 8개의 노드로 구성하였다. 그림 1에 제시한 파이프에 대해 내부 유체가 없을 때의 진동 해석 결과는 참고문헌 [7]에서 제시되어 있으므로 본 해석 결과와 비교한다면 파이프의 진동에 미치는 내부 유체에 의한 영향을 확인할 수 있을 것이다.

본 해석에서 이용한 파이프의 단면은 y 축과 z 축에 대해 대칭인 이중 대칭 단면 (double symmetric section)이다. 따라서 동일한 파수에서 서로 수직한 직교 모드 (orthogonal mode)를 가지는 두 개의 파동이 존재한다. 예를 들어 $n = 1$ 의 굽힘 모드를 가지는 파동의 경우, 동일한 파수에서 y 축 방향 굽힘 모드를 가지는 파동과 z 축 방향 굽힘 모드를 가지는 파동이 존재한다. 동일한 파수에 두 개의 서로 다른 모드 형태가 존재하므로 κ_m 에 대응하는 α_m 을 구분해 낼 수 없다는 문제가 발생한다 [12]. 이러한 문제점을 제거하기 위해 다항 고유치 해석에서는 파이프의 단면이 이중 대칭이 되지 않도록 단면을 유한요소 모델링하였다.

3.1 가진점 모빌리티 (Point mobility)

외부 유체가 없는 경우, 파이프에 단위 점하중 (unit point force)이 작용할 때 발생하는 모빌리티 (mobility)는 식 (19)를 다항 고유치 해석하여 구할 수 있다. 즉, 파수 (κ_m)와 고유 벡터 (\tilde{U}_m)를 이용해 식 (20)과 같이 표현할 수 있다 [13,14].

$$\hat{V}(x, \omega) = i\omega \sum_{m=1}^N \alpha_m \tilde{U}_{mR} e^{-j\kappa_m x} \quad \text{for } x \geq 0 \quad (20)$$

여기서 α_m 은 m 번째 파동의 크기 (amplitude)를 나

타내며 N 은 양의 x 방향으로 진행되는 파동의 개수로서, 단면의 WFE 모델이 가지는 전체 자유도 (degree of freedom)이다. 파동 κ_m 의 크기 α_m 은

$$\alpha_m = \frac{i\tilde{U}_{mL}\tilde{F}(\kappa_m)}{\tilde{U}_{mL}\mathbf{K}'(\kappa_m)\tilde{U}_{mR}} \quad (21)$$

로 표현된다^[14], 식 (20)과 식 (21)에서 \tilde{U}_{mL} 과 \tilde{U}_{mR} 은 각각 왼쪽 고유 벡터 (left eigenvector)와 오른쪽 고유 벡터 (right eigenvector)를 나타내며, $\mathbf{K}'(\kappa_m) = d\mathbf{K}(\kappa_m)/d\kappa = -2\kappa_m\mathbf{K}_{s2} - j\mathbf{K}_{s1}$, 그리고 \tilde{F} 는 파수 영역에서 표현한 단위 가진력이다. 가진점 x_0 의 모빌리티는 식 (20)에 $x = x_0$ 와 $\tilde{U}_{mR}(x_0)$ 을 대입하여 얻을 수 있다.

그림 2에는 내부 및 외부가 물과 연성된 파이프의 가진점 모빌리티를 나타내었다. 그림 2에서 모빌리티가 높게 나타나는 주파수는 파이프 단면의 고차 변형 모드가 발생하는 ‘cut-on’ 주파수에 해당하며 이는 3.2절에서 제시될 분산선도를 통해서 확인할 수 있다. 내부와 외부 유체의 연성에 따른 파이프의 모빌리티 변화를 살펴보기 위해 참고문헌^[7]에 제시된 내부 또는 외부 유체가 없는 경우의 모빌리티도 그

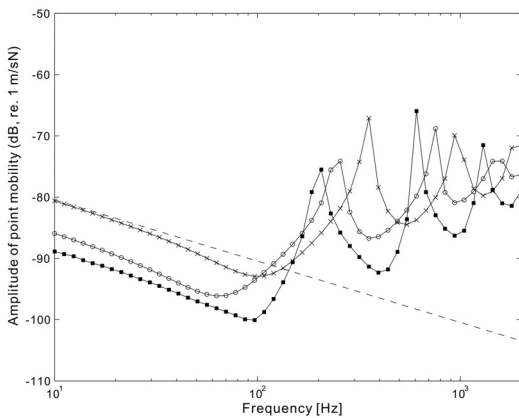


그림 2. 내부 및 외부 유체와 연성된 파이프의 가진점 모빌리티. -x-, 유체와 연성되지 않은 파이프; -o-, 내부 유체가 채워진 파이프; -■-, 내부 유체가 채워진 물속된 파이프; --, 유체와 연성되지 않은 파이프의 등가 Euler 보

Fig. 2. Point mobilities of the pipe with and without fluid couplings. -x-, empty pipe in air; -o-, water-filled pipe in air; -■-, submerged water-filled pipe; --, Euler beam equivalent to the empty pipe in air.

림 2에 함께 도시하였다. 그림 2를 통해 파이프가 유체와 연성됨에 따라 유체의 부가질량 효과로 인해 ‘cut-on’ 주파수가 낮아지는 것을 볼 수 있다. 또는 유체 연성으로 인해 저주파수 대역에서는 모빌리티의 수준이 낮아지는 것을 알 수 있으며, 내/외부 유체가 모두 있는 경우에 내/외부 유체가 없는 경우보다 약 9 dB 정도 모빌리티가 감소하였다.

단면의 변형이 발생하지 않는 저주파수 대역에서는 파이프를 등가의 Euler 보로 간주할 수 있으므로 WFE 방법의 신뢰성을 검증하기 위해 등가의 Euler 보에 대한 가진점 모빌리티를 구하고 WFE 해석 결과와 비교하였다. 그림 2에 나타난 것과 같이, 약 수십 Hz 이하의 저주파수 영역에서는 파이프와 등가 Euler 보의 가진점 모빌리티가 유사한 값을 가지지만 주파수가 증가할수록 두 값의 차이가 커지고 있다. 이는 주파수가 증가하면서 파이프 단면의 변형이 발생하므로, 수십 Hz 이상의 주파수 영역에서는 더 이상 Euler 보의 가정이 유효하지 않기 때문이다.

식 (20)의 모빌리티를 x 에 대해 Fourier 변환하면 파수 영역에서의 모빌리티를 얻을 수 있다. 파수 영역에서 구한 모빌리티는

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\kappa, \omega) &= i\omega \sum_{m=1}^N \alpha_m \tilde{U}_{mR} \\ &= \left(\frac{-1}{Im(\kappa_m) - i(\kappa + Re(\kappa_m))} + \frac{-1}{Im(\kappa_m) + i(\kappa - Re(\kappa_m))} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

이며, 여기서 $Im(\kappa_m)$ 와 $Re(\kappa_m)$ 은 각각 κ_m 의 허수부 및 실수부를 나타낸다. 그림 3에는 두 개의 주파수, 395 Hz와 1446 Hz에 대해 가진점 모빌리티를 파수 영역에서 나타내었다. 395 Hz의 모빌리티에는 두 개의 파동이 주요하게 기여하고 있으며, 1446 Hz에는 네 개의 파동이 크게 기여함을 알 수 있다. 이들 파동의 변형 모드는 다음 절의 분산 선도와 함께 기술하고자 한다.

3.2 분산 관계 (Dispersion relations)

외부 유체와 연성된 파이프의 분산 선도를 구하는 방법에 대한 설명은 참고문헌^[7]에 기술되어 있으며, 표 1에 보인 파이프에 외부 유체가 있을 때와 없을 때

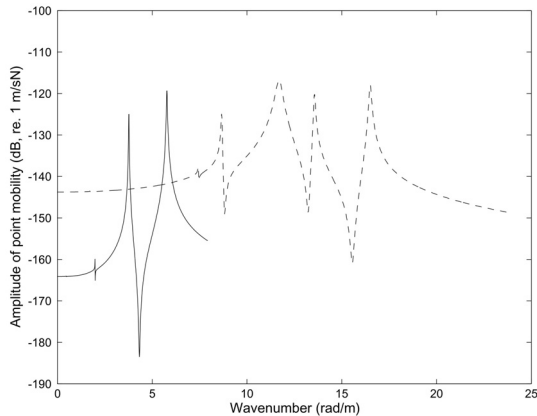


그림 3. 내부 유체가 채워진 물속된 파이프의 파수 영역 가진점 모빌리티. —, 395 Hz; --, 1446 Hz
 Fig. 3. Point mobilities of the submerged water-filled pipe in wavenumber domain at two different frequencies. —, 395 Hz; --, 1446 Hz.

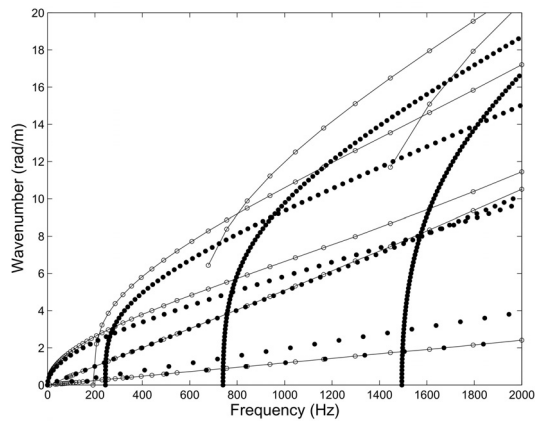


그림 4. 외부 유체 유무에 따른 내부 유체가 채워진 파이프의 분산 선도 비교 ●, 외부 유체 없이 내부 유체만 채워진 파이프; -○-, 내부 및 외부 유체와 연성된 파이프
 Fig. 4. Dispersion relations of the water-filled pipe with and without external fluid coupling. ●, water-filled shell in vacuo; -○-, submerged water-filled pipe.

의 분산선도를 비교하여 참고문헌 [7] 그림 5에 제시한 바 있다. 본 절에서는 내부에 유체가 채워진 원통형 실린더에 대해 외부 유체 유무에 따른 분산선도를 구하여 그림 4에 나타내었다. 그림 4와 참고문헌 [7]의 그림 5를 비교해 보면 두 개의 비분산파(non-dispersive waves) - 확장파(extensional wave)와 비틀림파(torsional wave) - 는 내부 및 외부 유체와 연성되더라도 전파 특성이 거의 변하지 않는 것을 알 수

있다. 이는 이 두 파동이 면내파(in-plane wave)이기 때문이다. 또한 그림 4를 통해, 내부에 유체가 채워진 파이프에서는 2kHz에서 약 10rad/m의 파수를 가지는, 전파 속도 약 1260 m/s의 비분산파가 존재함을 알 수 있다. 이 파동은 내부 유체를 따라 전파되는 압력파로서 파이프의 반경 방향 축대칭 팽창/수축 변형인 숨쉬기 모드(breathing mode)를 동반하므로 벌지파(bulge wave)^[15]라고도 불린다. 그림 4의 분산 선도로부터 이 파동은 외부 유체에 의한 영향이 거의 없음을 알 수 있으며 이러한 결과는 참고문헌 [2]에 기술된 것과 일치한다. 그림 4의 나머지 파동들은 분산파로서 파이프의 굽힘파(flexural waves)이며, 이들 굽힘파는 외부 유체에 의해 ‘cut-on’ 주파수가 낮아짐을 확인할 수 있다.

그림 4의 분산 선도와 그림 3의 파수 영역 가진점 모빌리티를 비교해 보면, 모빌리티에 크게 기여하는 파동의 형태를 알 수 있다. 즉, 395 Hz의 경우, 파수가 낮은 두 개의 면내파(확장파와 비틀림파)는 모빌리티에 거의 영향을 주지 않으며, 파수가 2부근의 파동은 벌지파, 그 위 두 파동은 파이프 단면의 2차와 1차 굽힘파이다. 1446 Hz의 경우에는 파수가 증가함에 따라 파이프 단면의 1차, 4차, 2차 그리고 3차 굽힘파 순으로 나타난다.

3.3 음향 방사 파워 (radiated power)

경계요소를 이용해 구한 외부 유체의 압력과 속도로부터 파이프에서 외부로 방사되는 음향 파워를 계산할 수 있다. 내부에 유체가 없는 파이프에 대해 음향방사 파워를 해석한 예는 참고문헌 [7]에 소개한 바 있다. 파이프와 접하고 있는 외부 유체입자의 수직 방향 속도 \tilde{v} 와 음압 \tilde{p} 로부터 방사 음향 파워 P 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$P = \frac{1}{2} Re \left(\int_{-k}^k \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(\kappa) \tilde{v}(\kappa) d\Gamma d\kappa \right) \quad (23)$$

구조물의 파수 κ 가 외부 유체의 음파 파수 k 보다 큰 경우에는 음향방사가 생기지 않으므로 식 (23)에서 κ 의 적분구간이 $-k \leq \kappa \leq k$ 로 제한되어 있다.

파이프와 연성된 외부 유체가 공기 또는 물인 두

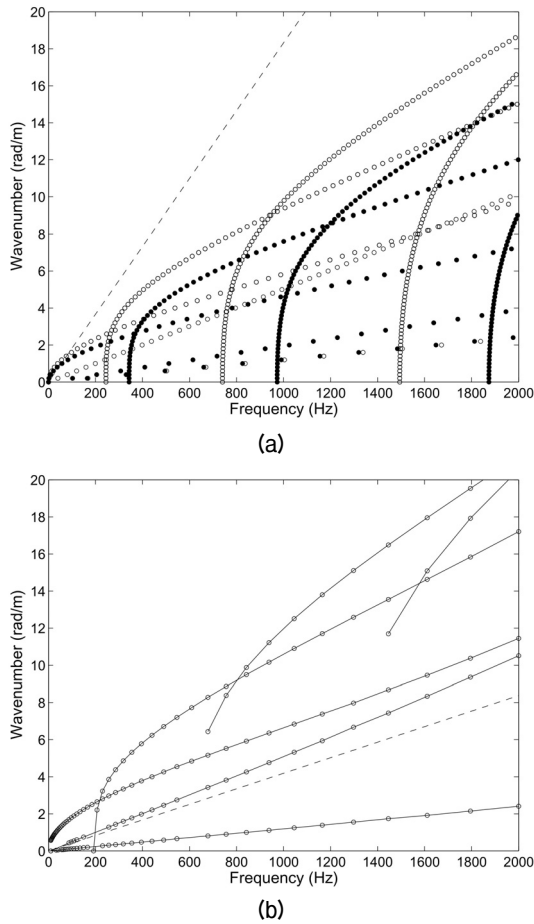


그림 5. 외부 유체의 음향파와 파이프의 분산 곡선 비교. (a) ●, 공기 중에 놓인, 내부 유체와 연성되지 않은 파이프; ○, 공기 중에 놓인, 내부 유체가 채워진 파이프. (b) -○-, 내부 유체가 채워진 몰수된 파이프. 점선으로 표시된 파동은 외부 유체의 음향파임. Fig. 5. Dispersion curves together with acoustic waves (a) ●, Empty pipe in air; ○, water-filled pipe in air, (b) -○-, submerged water-filled pipe. Dashed lines represent acoustic plane waves in the surrounding fluid.

가지 경우에 대하여 구한 분산선도를 그림 5에 나타내었다. 음향 방사가 일어나기 위해서는 파이프에 존재하는 파동의 파수(κ)가 외부 음파의 파수(k)보다 낮아야 한다. 그림 5(a)를 보면, 외부 유체가 공기인 경우에는 50 Hz 이상의 모든 주파수 대역에서 κ 가 음파의 파수보다 낮음을 알 수 있다. 반면 외부 유체가 물인 그림 5(b)의 경우에는 면내파인 확장파와 비틀림파를 제외한 대부분의 파동이 $\kappa > k$ 인 아음속(subsonic) 영역에 속한다.

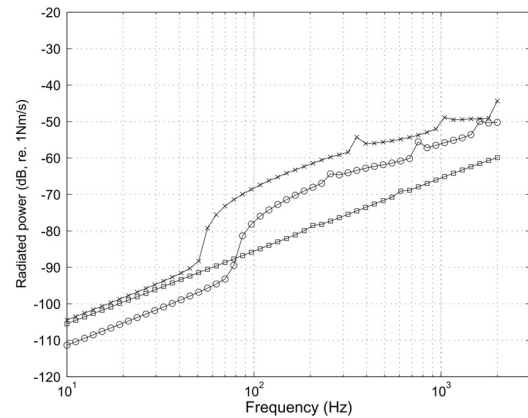


그림 6. 내부 및 외부 유체와 연성된 파이프의 방사 음향 파워 비교. -x-, 공기 중에 놓인, 내부 유체와 연성되지 않은 파이프; -o-, 공기 중에 놓인, 내부 유체가 채워진 파이프; -□-, 내부 유체가 채워진 몰수된 파이프. Fig. 6. Radiated powers of the pipe for various fluid coupling conditions. -x-, empty pipe in air; -o-, water-filled pipe in air; -□-, submerged water-filled pipe.

식 (23)을 이용해 구한 파이프의 방사파워는 그림 6에 나타내었다. 내부 유체가 없고 외부 유체가 공기인 경우, 50 Hz 부근에서 방사 음향 파워가 급격히 증가하는 것을 볼 수 있는데, 이것은 그림 5에 나타난 것과 같이 50 Hz 이상에서 $\kappa < k$ 조건이 만족되기 때문이다. 내부에 유체가 채워진 경우에는 내부 유체가 없는 경우에 비해 ‘cut-on’ 주파수가 낮아지므로 내부에 유체가 없는 경우에 비해 κ 와 k 가 같아지는 임계주파수(critical frequency)가 높아진 것을 그림 6에서 확인할 수 있다. 반면 외부 유체가 물인 경우에는 파이프에 존재하는 파동이 대부분 $\kappa > k$ 이므로 방사 음향 파워가 몇 개의 ‘cut-on’ 주파수를 제외하고는 선형적으로 천천히 증가하고 있다. 그림 6의 결과는, 내부 유체가 채워진 몰수된 파이프의 방사 음향 파워가 내부 유체가 없는 파이프의 공기 중 방사 음향 파워 보다 모든 주파수 대역에서 낮은 것으로 나타났다. 그러나, 그림 2에서 위 두 경우의 가진점의 모빌리티가 저주파수 대역에서 약 9 dB 정도 차이남을 상기한다면, 방사 효율 측면에서는 내부 유체가 채워진 몰수된 파이프가 저주파수 대역에서 방사 효율이 더 높을 것이다.

IV. 결 론

본 논문에서는 도파관 유한요소 (WFE)과 파수경계요소 (WBE)를 이용해 내부 및 외부 유체와 연성된 파이프의 진동 및 방사 소음을 해석하였다. 파이프와 내부 유체는 모두 도파관 유한요소로 모델링하였으며 외부 유체는 파수경계요소로 모델링하였다. 본 해석을 위해 내부 유체 모델링을 위한 도파관 유한요소 방정식을 유도하고 고체 요소와 연성된 운동 방정식을 제시하였다. 파이프 진동에 미치는 내부 및 외부 유체의 영향을 살펴보기 위해 파이프의 분산선도, 가진점 모빌리티 및 방사 음향 파워를 해석하였다. 이를 통해, 파이프 내부에 유체가 채워진 경우 부가질량 효과로 인해 ‘cut-on’ 주파수가 낮아지며 가진점 모빌리티의 크기가 전반적으로 감소함을 파악하였다. 본 연구 및 적용 예를 통해 내부 및 외부 유체와 연성된 도파관 구조물의 진동 및 파동 전파 해석에 WFE/WBE 방법이 유용함을 확인하였다. 추후에는 단면의 형상이 복잡하여 이론해석이 어려운 도파관 구조물의 진동, 소음 해석에 본 수치해석 기법을 적용하고자 한다.

감사의 글

이 논문은 2010년 울산대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

1. Fuller, C. R. and Fahy, F. J., 1982, “Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 81, pp. 501-518.
2. De Jong, C. A. F., 1998, Analysis of Pulsations and Vibrations in Fluid-filled Pipe Systems, PhD Thesis, TNO Institute of Applied Physics, Delft, Eindhoven.
3. Muggleton, J. M. and Brennan, M. J., 2002, “Wave-number prediction of waves in buried pipes for water leak detection,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, pp. 939-954.
4. Lee, Y.-S. and Yoon, D.-J., 2004, “Pinpointing of leakage location using pipi-fluid coupled vibration,” *Transactions of the Korean Society for Noise and*

Vibration Engineering, vol. 14, pp. 95-104.

5. Maess, M., Wagner, N. and Gaul, L., 2006, “Dispersion curves of fluid filled elastic pipes by standard FE models and eigenpath analysis,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 296, pp. 264-276.
6. Nilsson, C.-M., Finnveden, S., 2008, “Waves in thin-walled fluid-filled ducts with arbitrary cross-sections,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, pp. 58-76.
7. 유정수, “외부 유체와 연성된 도파관의 진동 및 소음 해석 기법,” *한국음향학회지*, 29권, 7호, 448-457쪽, 2010.
8. Nilsson, C.-M., 2004, “Waveguide Finite Element Applied on a Car Tyre”, PhD Thesis, MWL, KTH, Stockholm.
9. Ryue, J., Thompson, D. J., White, P. R. and Thompson, D. R., 2008, “Investigation of propagating wave types in railway tracks at high frequencies,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, pp. 157-175.
10. Sheng, X., Jones, C.J.C. and Thompson, D. J., 2005, “Modelling ground vibration from railways using wave-number finite- and boundary- element methods,” *Proceedings of Royal Society A*, vol. 461, pp. 2043-2070.
11. Bartoli, I., Marzani, A., Lanza de Scalea, F. and Viola, E., 2006, “Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, pp. 685-707.
12. Nilsson, C.-M. and Jones, C. J. C., 2007, Manual for WANDS 2.1, Wavenumber Domain Software for Solid and Fluids, Technical Memorandum, No. 976, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton.
13. Birgersson, F., Finnveden, S. and Nilsson, C.-M., 2005, “A spectral super element for modelling of plate vibration. Part 1: general theory,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 287, no. 1-2, pp. 297-314.
14. Nilsson, C.-M., Jones, C.J.C., Thompson, D.J., Ryue, J., 2009, “A waveguide finite element and boundary element approach to calculating the sound radiated by railway and tram rails,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, pp. 813-836.
15. Kwon, O.-C. and Joh, C.-Y., 2000, “Experimental identification of the longitudinal wave propagation speed in fluid-filled elastic hose,” *Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference*, pp. 804-810.

저자 약력

▶ 유 정 수 (Jungsoo Ryue)

1995년: 부산대학교 기계설계공학과 (학사)
 1997년: 한국과학기술원 기계공학과 (석사)
 2005년: ISVR at University of Southampton (석사)
 2008년: ISVR at University of Southampton (박사)
 2009년~현재: 울산대학교 조선해양공학부 조교수
 <관심분야> Waveguide에서의 파동 전파, 구조음향, 신호처리