

# 축방향으로 이송되는 유체유동 단순지지 파이프의 안정성 해석

## Stability Analysis of Axially Moving Simply Supported Pipe Conveying Fluid

손 인 수† · 허 관 도\* · 이 상 필\* · 조 정 래\*\*

In-Soo Son, Kwan-Do Hur, Sang-Pill Lee and Jeong-Rae Cho

(2011년 8월 24일 접수 ; 2012년 4월 25일 심사완료)

**Key Words** : Stability Analysis(안정성 해석), Axially Moving Pipe(축방향 이송 파이프), Pipe Conveying Fluid(유체유동 파이프)

### ABSTRACT

The dynamic instability and natural frequency of an axially moving pipe conveying fluid are investigated. Thus, the effects of fluid velocity and moving speed on the stability of the system are studied. The governing equation of motion of the moving pipe conveying fluid is derived from the extended Hamilton's principle. The eigenvalues are investigated for the pipe system via the Galerkin method under the simple support boundary. Numerical examples show the effects of the fluid velocity and moving speed on the stability of system. Moreover, the lowest critical moving speeds for the simply supported ends have been presented.

### 1. 서 론

내부에 유체를 가지는 파이프 구조물은 배관계 및 일반적인 기계장치에서 흔히 볼 수 있다. 파이프 내부에 흐르는 유체는 파이프 시스템의 동적특성 및 안정성에 큰 영향을 미치기 때문에 유체의 질량비와 유속에 의한 시스템의 안정성 해석에 관한 연구는 오랜 기간 많은 연구자들에 의하여 연구되어져 오고 있다<sup>(1~3)</sup>. 또한, 축방향으로 움직이는 구조물은 기계 구동 벨트, 자기 테이프, 종이 등 여러 공학적, 산업적 분야에서 쉽게 접할 수 있다. 특히, 이송되는 보 구조물의 형태는 평판 톱의 블레이드나 벨브 액추에이터 등에서 그 예를 찾아 볼 수 있다. 이처럼 시스템의 불안정을 유발하는 주요 파라

미터인 이송속도와 유속이 연성되어 전체 시스템의 안정성에 미치는 영향을 해석하는 것은 공학적으로 매우 중요한 문제라 할 수 있다.

Wickert와 Mote<sup>(4)</sup>는 축방향으로 이송되는 구조물의 안정성에 대하여 연구하였으며, Ulsoy와 Mote<sup>(5)</sup>는 평판 톱의 진동 및 안정성에 대한 연구결과를 이론 및 실험을 통하여 발표하였다. Lee 등<sup>(6,7)</sup>은 이송되는 보의 진동특성 및 안정성을 SEM(spectral element method)으로 수행하여 많은 연구결과를 발표하였다. 축방향으로 이송되는 자기 테이프 및 종이와 같은 박막의 진동해석에 대한 연구도 진행되어지고 있다<sup>(8)</sup>. 최근 Galerkin 방법을 이용하여 고속으로 움직이는 보의 고유진동수 해석 및 주변에 유체로 둘러싸인 축방향으로 이송되는 보의 안정성 해석에 대한 연구결과도 발표되어지고 있다<sup>(9,10)</sup>. 유체유동에 의한 파이프의 동적 불안정 문제에 관한 연구는 부가질량, 크랙 및 끝단질량과 유속의 연성 관계에 의하여 전체 시스템의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구결과들이 발표되어지고 있다<sup>(11,12)</sup>.

† 교신저자; 정회원, 동의대학교 기계공학과  
E-mail : isson92@deu.ac.kr  
Tel : (051)890-2239, Fax : (051)890-2232  
\* 동의대학교 기계공학과  
\*\* 한국폴리텍 VI대학 달성캠퍼스 자동차과

하지만 이들 선행 연구에서는 내부에 유체가 흐르고 축방향으로 이송하는 파이프 구조물에 대한 동적특성 및 안정성 해석에 대한 연구결과는 찾아보기 힘들다. 이 연구에서는 유체유동을 가지고 축방향으로 이송되는 파이프의 운동방정식을 확장된 해밀턴 원리를 이용하여 구하였으며, 운동방정식을 이용하여 파이프 내부에 흐르는 유체의 속도와 파이프의 이송속도가 파이프 시스템의 안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

## 2. 이론

Fig. 1은 유체유동을 가지고 축방향으로 이송되는 파이프의 개략도를 나타낸 것으로서  $L$ 은 보의 전체 길이를 나타낸다.  $V$ 과  $U$ 은 각각 이송되는 보의 이송속도와 파이프 내부의 유체 속도를 의미하며 이들 속도들은 서로 독립적이라 가정하였다.

### 2.1 운동방정식

Fig. 1에 보인 시스템을 구성하는 파이프와 유체의 운동에너지를 구하면 각각 다음과 같다<sup>(7,11)</sup>.

$$T_b = \frac{1}{2} m \int_0^L [V^2 + (\dot{y} + V\dot{y}')^2] dx \quad (1)$$

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^L (U^2 + 2U\dot{y}' + \dot{y}'^2) dx \quad (2)$$

여기서  $m$ 과  $m_f$ 는 각각 보의 단위길이당 질량과 유체의 단위길이당 질량을 나타내며  $y$ 는 횡방향 변위이다. 파이프의 포텐셜에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI(y''^2) dx \quad (3)$$

여기서  $EI$ 는 굽힘강성이다.

이송되는 파이프 및 유체의 분사력의 보존력 및 비보존력 성분에 의한 가상일은 다음과 같다<sup>(6)</sup>.

$$\begin{aligned} \delta W_b = & \int_0^L f(x,t)\delta y dx + M_1\delta\theta(0,t) + M_2\delta\theta(L,t) \\ & + Q_1\delta y(0,t) + Q_2\delta y(L,t) - mV(\dot{y} + V\dot{y}')\delta y \Big|_0^L \end{aligned} \quad (4)$$

$$\delta W_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^L U^2 \dot{y}'^2 dx - m_f U(\dot{y} + U\dot{y}')\delta y \Big|_0^L \quad (5)$$

여기서  $\theta(x,t) = y'(x,t)$  이고,  $M_1(t)$ 와  $Q_1(t)$ 는  $x=0$ 에서의 굽힘 모멘트와 전단력을 각각 의미한다. 또  $M_2(t)$ 와  $Q_2(t)$ 는  $x=L$ 에서의 굽힘 모멘트와 전단력을 나타낸다.

식 (1)~(5)를 다음의 확장된 해밀턴 원리

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_b + \delta T_f - \delta V_b + \delta W_b + \delta W_f) dt = 0 \quad (6)$$

에 대입하면 다음과 같이 유체유동을 가지고 축방향으로 이송되는 파이프의 운동방정식과 단순지지 파이프의 경계조건<sup>(7)</sup>을 각각 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} EIy'''' + (mV^2 + m_f U^2)y'' \\ + 2(mV + m_f U)\dot{y}' + (m + m_f)\ddot{y} = f(x,t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q(0,t) = -Q_1(t) \quad \text{or} \quad y(0,t) = y_1(t), \\ M(0,t) = -M_1(t) \quad \text{or} \quad y'(0,t) = \theta_1(t), \\ Q(L,t) = Q_2(t) \quad \text{or} \quad y(L,t) = y_2(t), \\ M(L,t) = M_2(t) \quad \text{or} \quad y'(L,t) = \theta_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (7)에서 만약 유속과 파이프의 이송속도가 동일한 경우( $U=V$ ) 상대속도는 0이지만, 유체질량 및 이송속도에 의하여 파이프의 안정성에 영향을 미친다. 식 (8)에서  $Q(x,t)$ 와  $M(x,t)$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$Q(x,t) = -EIy''', \quad M(x,t) = EIy'' \quad (9)$$

계산상의 편의 및 일반화된 결론을 얻기 위하여 이 연구에서는 다음과 같은 무차원 파라미터 및 좌표를 정의한다.

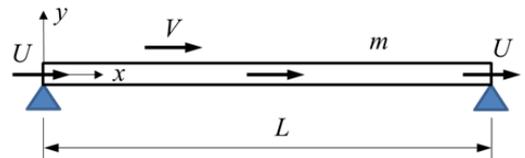


Fig. 1 Axially moving pipe conveying fluid

$$v = \sqrt{\frac{m}{EI}} LV, \quad u = \sqrt{\frac{m_f}{EI}} LU, \quad \eta = \frac{y}{L},$$

$$\beta = \frac{m_f}{m_f + m}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{m_f + m}} \frac{t}{L^2}$$
(10)

식(7)에 식(10)을 대입하면 다음과 같은 자유진동에 대한 무차원 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta'''' + (v^2 + u^2)\eta'' + 2(v\sqrt{\gamma} + u\sqrt{\beta})\dot{\eta}' + \ddot{\eta} = 0$$
(11)

여기서  $\gamma = m/(m_f + m)$ 이며, 식(11)의 운동방정식을 살펴보면 두 번째 항에서 이송속도와 유속은 같은 형태를 가지므로 하나의 무차원 속도로 치환하여 계산할 수 있는 것처럼 보인다. 하지만, 3번째 항에서 각각의 속도는 질량비와 관계를 하고 있고 이들 질량비들은  $\beta = 1 - \gamma$ 의 관계를 가지기 때문에 각각의 속도 영향에 의한 시스템의 안정성을 살펴야 할 것으로 판단된다.

식(11)의 운동방정식의 해는 내부 유동유체가 없는 경우의 단순지지 파이프의 고유함수  $\phi(\xi)$ 를 이용하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) q_j(\tau)$$
(12)

따라서 유체를 제거한 근사모드를 사용하였기 때문에 안정성에 대한 해석 결과는 근사 결과라 할 수 있다. 식(12)를 식(11)에 대입하고 Galerkin 적분을 행하면 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 \phi_j'''' \phi d\xi q_j(\tau) + (u^2 + v^2) \int_0^1 \phi_j'' \phi d\xi q_j(\tau) + 2(v\sqrt{\gamma} + u\sqrt{\beta}) \int_0^1 \phi_j' \phi d\xi \dot{q}_j(\tau) + \int_0^1 \phi_j \phi d\xi \ddot{q}_j(\tau) \right] = 0$$
(13)

식(13)의 변위  $q_j(\tau) = X_j e^{\lambda \tau}$ 로 가정하여 고유치 문제를 풀 수 있으며 해의 수렴을 위하여  $n = 10$ 차까지 반복하였다.

## 2.2 안정성 해석

식(13)을 이용하여 고유치 해석을 수행하면 고유

치  $\lambda$ 는 다음과 같이 복소수 값을 갖는다.

$$\lambda \equiv \text{Re}(\lambda) + i\text{Im}(\lambda), \quad i = \sqrt{-1}$$
(14)

식(14)의 허수부  $\text{Im}(\lambda)$ 로부터 고유진동수를 얻을 수 있으며, 실수부  $\text{Re}(\lambda)$ 는 계의 안정성 판단의 기준이 된다.  $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ 인 경우 시스템은 안정하며, 그렇지 않은 경우 시스템은 불안정 상태에 놓인다. 시스템이 불안정한 경우 즉,  $\text{Re}(\lambda) > 0$ 일 때  $\text{Im}(\lambda)$ 의 부호에 따라 다음의 두 가지 불안정 형태로 구분된다. 먼저  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ 일 때는 플러터(flutter) 불안정이 되고,  $\text{Im}(\lambda) = 0$ 인 경우에는 발산(divergence) 불안정이 된다<sup>(7,12)</sup>. 또  $\text{Re}(\lambda) = 0$ 일 때는 안정과 불안정의 경계가 되는 임계값이 되며, 이 때의 속도를 임계속도라고 정의한다.

## 3. 수치해석 결과

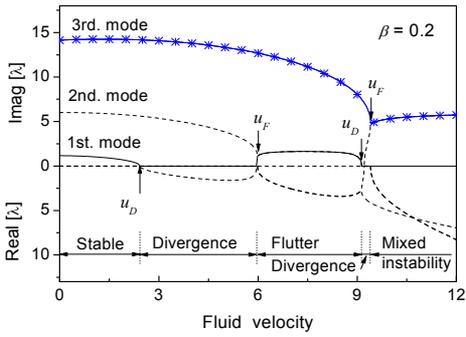
이론을 통하여 유도한 시스템의 운동방정식을 이용하여 유체유동을 가지고 축방향으로 이송하는 파이프의 안정성을 해석하였다. 이 연구에서 파이프의 경계조건은 식(8)의 단순지지 경계조건을 적용하였다. 먼저, 개략적인 수치해석의 신뢰성을 확보하기 위하여 참고문헌(7)에서 유한요소 해석 방법(50 elements)으로 구한 유체가 없는 경우에 이송되는 보의 고유진동수와 이 연구의 수치해석 결과를 비교하여 Table 1에 나타내었다. 수치해석 결과의 비교를 위하여 사용한 파라미터는 다음과 같다.

$$L = 2 \text{ m}, \quad EI = 10 \text{ kN/m}^2, \quad m = 10 \text{ kg/m}$$

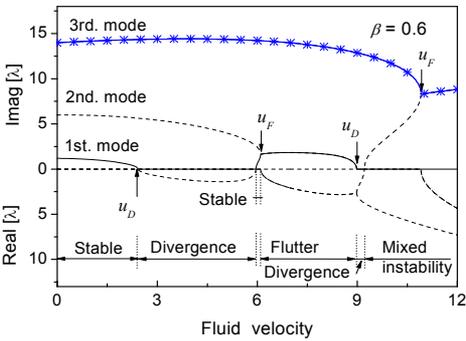
Table 1에서  $n$ 은 수렴을 위하여 반복한 모드의 수를 의미한다. 이 결과는 본 수치해석의 타당성으로

**Table 1** Natural frequency of axially moving beam

Moving speed(m/s)	Method	Natural frequency(Hz)		
		1st.	2nd.	3rd.
0	Ref. (7)	16.710	54.474	116.69
	present result	16.710	54.474	116.69
	$n = 3$ $n = 10$	16.710 16.710	54.474 54.474	116.69 116.69
33.419	Ref. (7)	13.913	52.217	114.70
	present result	13.919	52.272	117.53
	$n = 3$ $n = 10$	13.913 13.913	52.217 52.217	114.70 114.70



(a)  $\beta = 0.2$



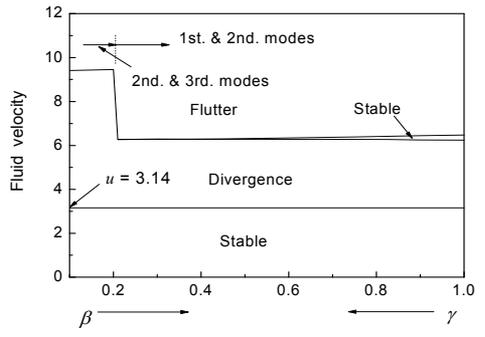
(b)  $\beta = 0.6$

**Fig. 2** Lowest three eigenvalues versus fluid velocity ( $v = 2$ )

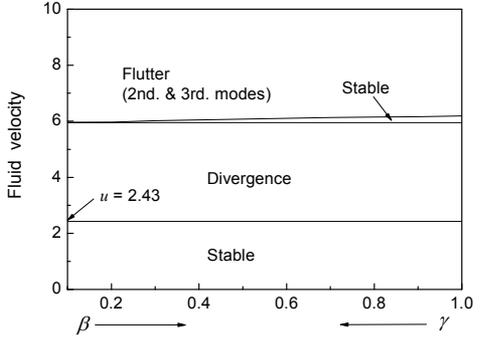
제시하기에는 부족하지만 파이프의 이송 속도가 존재하는 경우 수렴 값을 찾는 것은 중요하다는 것을 알려준다. 참고문헌 (7)의 결과와 비교하여 수렴성을 검토한( $n=10$ ) 이 연구의 결과 값은 매우 정확하다는 것을 확인 할 수 있다.

Fig. 2는 파이프의 이송속도가 2로 일정한 경우 유속에 따른 파이프의 허수부 및 실수부 고유치 변화를 나타낸 것이다. Fig. 2(a)는 유체의 질량비  $\beta$ 가 0.2, 그리고 Fig. 2(b)는 질량비가 0.6인 경우의 결과이다. 이들 질량비들은 일반적으로 유체유동을 가진 파이프의 경우 플러터 및 좌굴 불안정을 일으키는 임계유속 변화의 차이를 가장 잘 나타낸다.

Fig. 2에서  $u_D, u_F$ 는 각각 좌굴 및 플러터 임계유속을 의미한다. Fig. 2(a)에서 유속이 증가하여 2.43이 되면 먼저 1차 모드에서 좌굴 불안정이 발생하며, 유속이 약 6이 되면 파이프는 플러터 불안정 형태로 된다. 그리고, 유속이 9.1 부근에서는 다시 좌굴 불안정 형태가 되며, 이후 유속이 증가하면 시스템은 좌굴 및 플러터 불안정의 복합적인 불안정

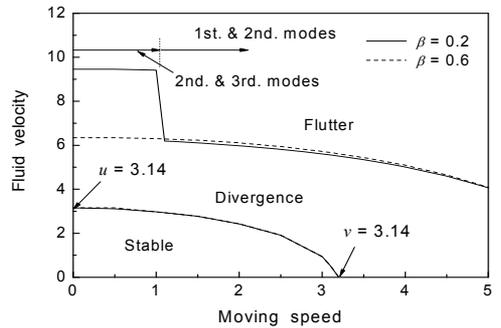


(a) Moving speed  $v = 0$



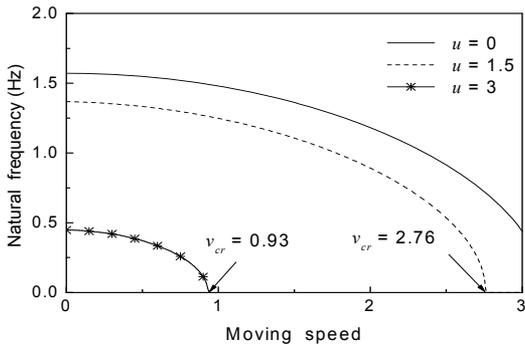
(b) Moving speed  $v = 2$

**Fig. 3** Map of different kinds of instabilities for moving pipe conveying fluid

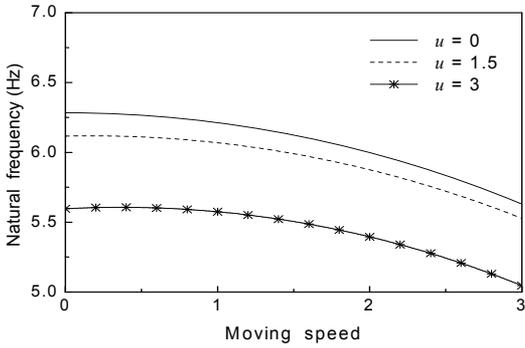


**Fig. 4** Different kinds of instabilities as fluid velocity and moving speed

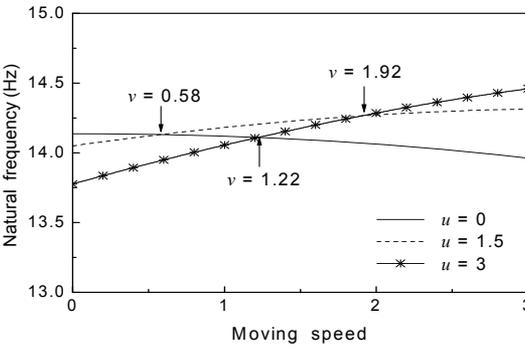
형태가 됨을 알 수 있다. Fig. 2(b)의 질량비  $\beta$ 가 0.6인 경우를 살펴보면, 유속이 2.43에서 1차 모드에 의해 좌굴 불안정이 일어나며, 유속이  $5.93 < u < 6.13$ 의 범위에서 시스템은 다시 안정화가 된다. 유속의 범위가  $6.13 < u < 8.97$ 에서는 플러터 불안정, 그리고  $8.97 < u < 9.19$ 에서는 좌굴 불안정이 되며, 그 이후의 유속에서 시스템은 좌굴, 플러터의



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig. 5 Natural frequency of axially moving pipe conveying fluid

복합적인 불안정 형태가 된다.

Fig. 3은 질량비 변화에 따른 좌굴 및 플러터 불안정 영역을 나타낸 것이다. 두 질량비의 관계는 앞에서 언급한 것처럼  $\beta = 1 - \gamma$  이기 때문에 가로축에서 오른쪽으로 커지는 것은  $\beta$ , 그리고 우측에서 좌측으로 커지는 것은  $\gamma$ 가 된다. Fig. 3(a)는 이송속도가 0, 그리고 Fig. 3(b)는  $v = 2$ 인 경우의 결과이다. 시스템의 좌굴 임계유속은 질량비와 무관한 운동방

정식 (13)의 1, 2번째 항인 강성항에 의하여 결정되기 때문에<sup>(3)</sup> 질량비와 관계없이 좌굴 임계유속은 각각 3.14, 2.43으로 항상 일정하다. 유체 질량비  $\beta$ 가 증가할수록 시스템이 재안정화 되는 유속의 범위가 넓어지며, 이송속도가 0.2인 경우에 이송속도가 없는 경우에 비하여 재안정화 영역은 더 넓어진다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 유속과 이송속도의 연성관계에 의한 시스템의 불안정 형태를 도시한 것이다. 여기서 가로축은 파이프의 이송속도, 그리고 세로축은 유속을 나타낸다. 시스템의 안정영역은 질량비에 관계없이 원점을 중심으로 반지름 3.14의 1/4 원형을 형성하고 있음을 알 수 있다. 이것은 운동방정식 (13)에서 유속이 0, 혹은 이송속도가 0인 경우 Fig. 3에서 설명한 바와 같이 항상 일정한 좌굴 임계유속(3.14)을 가지기 때문에 두 유속의 합이 3.14인 경우 항상 좌굴 임계유속을 가지는 것으로 생각할 수 있다. 플러터 불안정의 경우 질량비가 0.2인 경우는 이송속도가 1.1까지는 2, 3차 모드 합성에 의하여 플러터 불안정이 발생하며, 그 이후의 이송속도에서는 1, 2차 모드에 의해 플러터 불안정이 발생한다. 질량비가 0.6일 때는 플러터 불안정은 모두 1, 2차 모드에 의하여 발생한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 이송속도와 유속의 영향에 의한 시스템의 고유진동수를 3차 모드까지 도시한 것이다. 1, 2차 모드에서는 이송속도가 빨라질수록 시스템의 고유진동수는 점점 작아지는 경향을 보이며, 유속과 고유진동수는 서로 반비례적이다. 3차 모드에서는 유속이 0인 경우는 이송속도와 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보이지만, 유속이 각각 1.5, 3일 때는 서로 비례적인 경향을 보인다. 또 3차 모드에서는 고유진동수와 유속의 관계는 통일되지 않고 특정 이송속도의 구간에서는 서로 다른 경향을 보인다. 즉, 이송속도가 0.58보다 작을 때는 유속과 고유진동수는 서로 반비례적이며, 이송속도가 1.92보다 큰 경우는 유속과 고유진동수는 서로 비례적인 경향을 보인다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 유동유체를 가지고 축방향으로 이동되는 단순지지 파이프의 안정성을 평가하고 그

결과를 고찰하였다. 즉, 파이프의 이송속도와 유속, 그리고 각 질량비가 파이프 시스템의 안정 혹은 불안정에 미치는 영향에 대하여 수치해석 하였다. 이 연구의 수치해석 예제에 대하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 파이프의 이송속도가 일정한 경우에 유체 및 파이프의 질량비의 변화에 관계없이 파이프 시스템의 좌굴 임계유속은 항상 일정하다.

(2) 가로축, 세로축을 각각 유속과 파이프의 이송속도라고 두면 시스템의 안정영역은 항상 원점을 기준으로 반지름 3.14의 영역 안에 위치한다.

(3) 유체 질량비  $\beta$ 가 증가할수록, 파이프의 질량비  $\gamma$ 가 줄어들수록 파이프 시스템이 다시 안정화되는 유속의 범위가 넓어진다. 또, 파이프가 이송되는 경우, 이송되지 않을 때에 비하여 파이프 시스템의 재 안정화 영역은 더 넓어진다.

### 참 고 문 헌

(1) Benjamin, T. B., 1961, Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory), Proceedings of the Royal Society(London), Series A, Vol. 261, pp. 457~486.

(2) Sugiyama, Y., Tanaka, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, Effect of a Spring Support on the Stability of Pipes Conveying Fluid, Journal of Sound and Vibration, Vol. 100, pp. 257~270.

(3) Païdoussis, M. P., 1998, Fluid-structure Interactions(Vol. 1), Academic Press.

(4) Wickert, J. A. and Mote, Jr, C. D., 1988, Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials, Shock and Vibration

Digest, Vol. 20, pp. 3~13.

(5) Ulsoy, A. G. and Mote, Jr, C. D., 1982, Vibration of Wide Band Saw Blades, Journal of Engineering for Industry, Vol. 104, pp. 71~78.

(6) Lee, U. and Oh, H., 2005, Dynamics of an Axially Moving Viscoelastic Beam Subject to Axial Tension, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, pp. 2381~2398.

(7) Lee, U., 2009, Spectral Element Method in Structural Dynamics, John Wiley & Sons(Asia), pp. 172~181.

(8) Shin, C. and Chung, J., 2006, Out-of-plane Vibration for an Axially Moving Membrane, Transactions of Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 2, pp. 198~206.

(9) Ding, H. and Chen, L. Q., 2010, Galerkin Methods for Natural Frequencies of High-speed Axially Moving Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, pp. 3484~3494.

(10) Wang, L. and Ni, Q., 2008, Vibration and Stability of an Axially Moving Beam Immersed in Fluid, International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, pp. 1445~1457.

(11) Ryu, S. U., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid, Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1231~1241.

(12) Son, I. S., Cho, J. R. and Yoon, H. I., 2007, Effects of Attached Mass on Stability of Pipe Conveying Fluid with Crack, Transactions of Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 10, pp. 1002~1009.