대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.14, No.1 135-150. Mar. 2012

초등수학 교과서의 분수 곱셈 알고리즘 구성 활동 분석: 모델과 알고리즘의 연결성을 중심으로

임 재 훈*

이 논문에서는 먼저 2007 개정 교육과정에 따른 초등수학 교과서의 분수 곱셈 알고리즘 도입 활동을 7차 교과서와 비교, 분석하였다. 직사각형의 넓이 모델로 분수 곱셈 알고리즘 형식화를 시도한 7차 교과서와 달리, 개정 교과서에는 직사각형 넓이 모델과 더불어 길이 모델을 사용한다. 개정 교과서에 제시된 활동들과 '분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱한다'는 분수 곱셈 알고리즘은 직접적으로 연결되지 않는다. 이 논문의 후반부에서는, 길이 모델을 도입한 개정 교과서의 시도에서 한발 더 나아가, 길이 모델과 분수 곱셈 알고리즘의 연결성을 분명하게 하기 위해 고려해야 할 사항을 고찰하였다. 길이 모델과 분수 곱셈 알고리즘은 '분배 전략'을 매개로, 즉 분수 곱셈 문제 상황을 분배 전략으로 해결하고 그 해결 과정을 길이 모델로 나타내고 그것을 형식화하는 경험을 통해 연결될 수 있다. 이와 같은 경험은, (진분수)×(진분수)에서 일회성으로 다루어질 것이 아니라, (진분수)×(단위분수), (자연수)×(진분수), 몫으로서 분수 개념 등에서 포괄적으로 고려되어야 할 성질의 것이다.

I. 서 론

'분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱한다'는 분수 곱셈의 표준 알고리즘은 계산 절차만 가르치기로 하면 단지 몇 분 내에 가르칠 수 있을 정도로 단순하지만(Reys, Suydam, Lindquist, and Smith, 1999), 계산 절차에 내재된 의미와 이유를 이해하게 하는 것은 상대적으로 어렵다. 오영열(2004)에 의하면, 분수의 곱셈 계산을 잘 수행한 초등예비교사들 중 상당수가 분수 곱셈의 의미에 대해서 상대적으로 낮은 이해 정도를 보였다. 분수의 곱셈을 이해하기 위해서는 자연수의 곱셈에서 형성된 곱하면 커진다는 관념을 극복해야 하며, 조작 분수로서 분수에 대한 이해를 바탕으로 하여 곱셈을 동수누가를 넘어 배의 개념으로 이해해야 한다(김명운, 장경윤, 2009; Prediger, 2008; Taber, 2002; Tirosh & Graeber, 1989). Baroody와 Coslick (2005)은 승수가 분수인 곱셈은 소박한 동수누가 개념으로는 이해하기 어려움을 지적하면서, 묶음과 넓이의 의미를 바탕으로 분수 곱셈 지도가 이루어져야 한다고 하였다. 분수의 곱셈 알고리즘을 이해하기 위해서는 단위의 재개념화와 승수의 연산자로서의 역할을 이해해야 한다(백선수, 김원경, 2005; 김명운, 장경윤, 2009).

이 논문에서는 2007 개정 교육과정의 초등수학 교과서(이하 개정 교과서)의 분수 곱셈 알고리즘 형식화 과정을 분석한다. 강문봉(2011)은 개정 교과서의 자연수 나눗셈 관련 내용을 분석하면서, 교과서의 활동과 계산 알고리즘이 연결되지 않는 문제점을 지적하였다. 방정숙과 이지영(2009)은 분수 곱셈의 계산 원리를 탐색하는 활동에서 직사각형 모양의 넓이 모델에 비해 분

* 경인교육대학교 (jhyim@ginue.ac.kr)

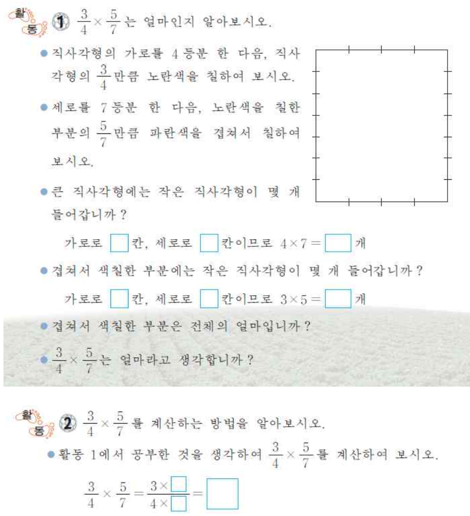
수 막대 모델이나 수직선 모델이 상대적으로 적게 사용되고 있음을 지적하고, 수직선을 활용하여 분수 연산 과정을 파악하는 활동을 더 제시하는 것을 고려할 것을 제안하였다. 이용률(2010)도 분수의 곱셈에 대한 계산 원리를 면적도(넓이 모델)와 선분도(길이 모델)로 나타나는 문제를 해결하는 활동을 통하여 정립될 수 있다고 하였다. 이 논문에서는 이러한 연구들의 연속선 상에서 개정 교과서의 분수 곱셈 알고리즘 형식화 과정을 7차 교과서의 해당 부분과 같이 분석한다. 분석의 초점은 강문봉(2011)이 주목한 활동과 알고리즘의 연결성과 방정숙과 이지영(2009), 이용률(2010)이 주목한 길이 모델과 넓이 모델의 사용 방식의 두 가지이다.

II. 7차 교과서 및 개정 교과서의 (진분수)×(진분수) 활동 분석

1. 7차 교과서와 개정 교과서의 분수 곱셈

개정 교과서와 7차 교과서의 분수 곱셈 단원의 차시별 소주제와 각 차시의 내용 전개에 사용된 곱셈식은 <표 Ⅱ-1>과 같다. 이 중에서 (진분수)×(진분수)는 분수 곱셈 알고리즘($\frac{□}{△}\times\frac{☆}{○}=\frac{□\times☆}{△\times○}$)의 형식화가 이루어지는 결정적인 차시이다. 그러므로 여기서는 (진분수)×(진분수) 도입 활동을 분수 곱셈 알고리즘과의 연결성에 초점을 맞추어 분석한다.

7차 교과서에서는 다음 [그림 Ⅱ-1]의 활동 1을 바탕으로 활동 2에서 (진분수)×(진분수)의 계산 알



[그림 II-1] 7차 교과서의 (진분수)×(진분수) (수학 5-나, p.121)

<표 Ⅱ-1> 분수 곱셈 단원의 내용 순서

	2007 개정 교과서		7차 교과서	
	소주제	곱셈식	소주제	곱셈식
1차시	진분수×자연수	$\frac{3}{8}\times5$	진분수×자연수	$\frac{3}{8}\times5$
2차시	대분수×자연수	$2\frac{1}{4}\times3$	대분수×자연수	$1\frac{1}{2}\times3$
3차시	자연수×진분수	$6\times\frac{2}{3}$	자연수×진분수	$12\times\frac{3}{4}$
4차시	자연수×대분수	$3\times2\frac{1}{4}$	자연수×대분수	$6\times2\frac{1}{3}$
5차시	단위분수×단위분수	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$	단위분수×단위분수	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$
6차시	진분수×진분수	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$	진분수×진분수	$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$
7차시	대분수×대분수	$2\frac{2}{5}\times1\frac{3}{4}$	대분수×대분수	$2\frac{2}{5}\times1\frac{3}{5}$
8차시	세 분수의 곱셈	$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}$	세 분수의 곱셈	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

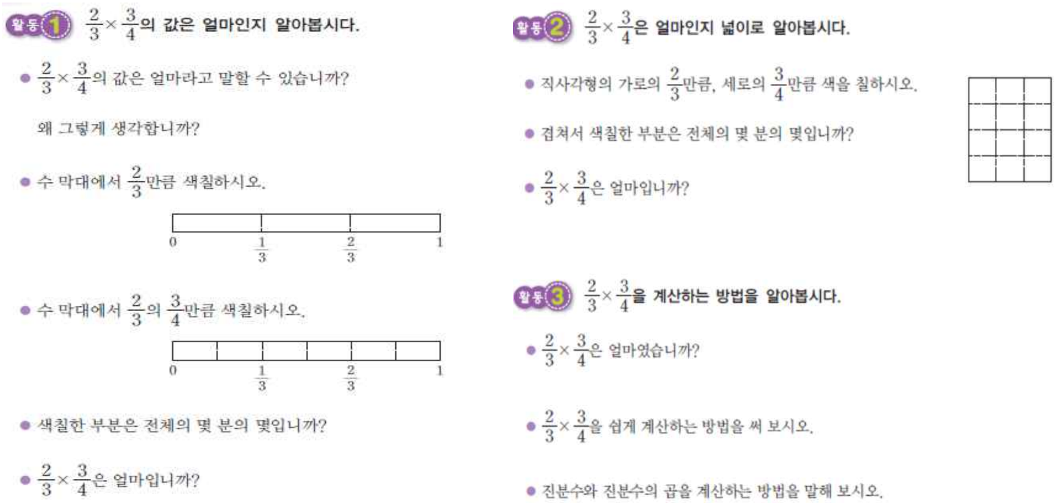
고리즘의 형식화를 시도한다. 활동 1은 '주호네 밭의 $\frac{3}{4}$은 채소밭입니다. 이 중에서 $\frac{5}{7}$에 배추를 심었습니다. 배추를 심은 밭은 전체의 몇 분의 몇인지 알아보시오.'라는 생활에서 알아보기 문제를 해결하는 맥락에서 도입된다. 문제 상황이 밭의 넓이에 관한 것이므로, 자연스럽게 직사각형의 넓이 모델이 사용된다.

개정교과서에서는 실생활 문제 상황 없이 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$의 값은 얼마인지 알아보는 활동 1, 그 값을 직사각형의 넓이로 알아보는 활동 2에 이어, 활동 3에서 알고리즘의 형식화를 시도한다.

활동 3에 대하여, 교사용 지도서에서는 '활동 1, 2에서 학습한 내용을 바탕으로 (진분수)×(진분수)의 계산을 어떻게 하는지 형식화하기 위해 학생 스스로 계산 방법을 찾아보는 활동 단계로서 $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$와 같이 형식화할 수 있다'고 되어 있다(5-1 교사용 지도서, p. 197). 개정 교과서의 활동 2는 직사각형의 넓이 모델을 사용했다는 점에서, 7차 교과서의 활동 1과 유사하므로, 개정 교과서와 7차 교과서의 주요 차이점은 개정 교과서의 '활동 1'에 있다고 할 수 있다.

2. 길이 모델 활동 분석

개정 교과서의 활동 1은 수 막대를 모델로 사용한다. 다음 두 가지 점을 고려할 때, 활동 1에서 수 막대는 본질상 수직선과 같은 길이 모델로 사용된 것으로 보인다. 첫째, 활동 2에서 "$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$은 얼마인지 넓이로 알아봅시다."라고 하고 있는데, 이것은 활동 1의 본질은 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 넓이로 알아보는 데에 있지 않음을 시사한다. 둘째로, 활동 1에서 수 막대의 분할은 한 방향으로만 이루어진다. 넓이 모델에서는 한 방향의 분할은 물론, 가로 세로 양 방향의 분할이 이루어질 수 있다. 그러므로 분수 곱셈 알고리즘 형식화와 관련된, 7차 교과서와 개정 교과서의 중요한 차이는, 넓이 모델만 사용한 7차 교과서와 달리 개정 교과서에서는 길이 모델과 넓이 모델을 모두 사용한다는 점이다. 모델이나 표상의 다양성의 긍정적 기능에 주목할 때(장혜원, 1997; Dienes, 1960), 길이 모델과 넓이 모델을 사용하여 분수 곱셈 알고리즘을 형식화하려 한 한 개정 교과서의 시도는 긍정적으로 평가할 수 있다.

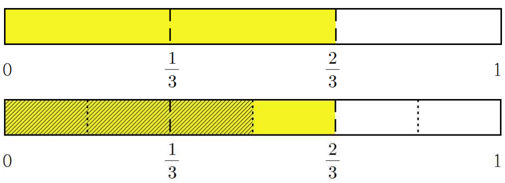


[그림 II-2] 개정 교과서의 (진분수)×(진분수) (수학 5-1, pp. 58-59)

이제 각 모델을 사용한 활동과 분수 곱셈 알고리즘의 관계를 더 자세히 살펴보자. 교과서에서 차지하는 분량을 고려할 때 활동 1이 활동 2보다 비중 있는 활동으로 보인다. 교사용 지도서는 활동 1에 대하여 다음과 같이 말한다.

> $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$은 $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{4}$배라고 할 수 있는가에 대한 의문에 답해 보게 함으로써 수식에 포함된 의미를 찾아보게 하며, 또 이 수식의 계산 원리를 알아보기 위해 수 막대에 색칠해 봄으로써 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$은 결국 전체의 $\frac{1}{2}$이 됨을 알 수 있도록 한다. 이 활동의 과정은 먼저 주어진 단위길이 1인 수 막대를 3등분한 후 $\frac{2}{3}$에 해당하는 부분에 색칠을 하고, 이어서 색칠된 부분을 다시 4등분하여 그것의 $\frac{3}{4}$에 해당하는 부분에 겹쳐서 색칠하는 활동이다. 이러한 조작 과정을 통하여 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$의 계산 결과를 알아보게 됨으로써 계산 원리를 이해할 수 있게 하고 있다. (5-1, 교사용 지도서, p.196)

교사용 지도서에 따르면 이 활동의 목적은 첫째, 수식에 포함된 의미를 찾아보게 하는 것, 둘째, 수식의 계산 원리를 알아보게 하기 위한 것이다. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$에서 $\times\frac{3}{4}$의 의미는 주어진 양 $\frac{2}{3}$를 4등분하고 그 중 3개를 취하는 조작으로 이해될 수 있다. 수식에 포함된 의미를 찾아보게 한다는 첫째 목적은 교과서에서 [그림 Ⅱ-3]과 같은 색칠하기 활동 속에 구현되어 있는 것으로 보인다.

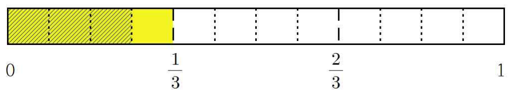


[그림 Ⅱ-3] $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{4}$ 색칠 활동.

수식의 계산 원리를 이해하게 한다는 둘째 목적과 관련하여, 교과서에 제시된 활동과 분수 곱셈 알고리즘의 연결성을 살펴보자. 교과서의 수 막대 색칠 활동은 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$의 결과가 $\frac{1}{2}$임을 직관적으로 쉽게 알 수 있게 한다. 그러나 이 활동으로부터 형식화해야 하는 분수 곱셈 알고리즘과의 관련은 분명하지 않다. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 분수 곱셈 알고리즘에 따라 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{3\times4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

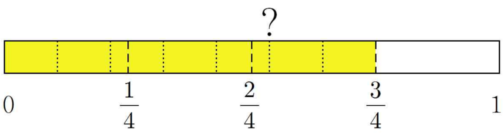
그런데 교과서의 활동에 따른 색칠한 그림에서 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$은 나타나지만 $\frac{1}{12}$은 나타나지 않는다. 그러므로 활동 1로부터 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하는 알고리즘을 형식화하기는 어렵다. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$이 아니라 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$이었다면 $\frac{1}{3}$을 4등분해야 하는 과정에서 $\frac{1}{12}$이 나타나지만([그림 Ⅱ-4]), $\frac{1}{3}$은 단위분수이므로 일반적인 (진분수)×(진분수)를 대표하기에 적당하지 않다.



[그림 Ⅱ-4] $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$ 색칠하기.

$\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$이라는 수치는 일반적인 진분수를 대표하면서 학생들이 쉽게 분할 활동을 수행할 수 있는 수치로 의도적으로 선택된 것으로 보인다. 그런데 $\frac{2}{3}$를 4등분하면 4등분선들이 기존의 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 등분선과 일치하게 된다. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$의 두 분수의 분자 분모들이 서로 약분되기 때문이다. 백선수와 김원경(2005)은 아동들이 비형식적으로 모델을 이용하여 해결한 것을 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱한다는 형식적 지식으로 연결하는데 있어서 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우는 걸림돌이 될 수 있으므로, 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소인 경우를 먼저 형식화하는 것이 바람직하다고 제안하였다. 이것은 7차 교과서와 개정 교과서의 두 번째 차이점, 곧 사용된 곱셈식의 수치들에 주목하게 한다.

7차 교과서에서는 서로 약분되지 않는 수치로 된 두 분수로 된 곱셈식 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$를 사용하였다. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$에 개정 교과서의 활동 1을 적용하면, $\frac{3}{4}$을 색칠하고 난 후 그것을 7등분하고 그 중 5부분을 색칠해야 한다. 그런데 $\frac{2}{3}$를 4등분하는 것과 달리, $\frac{3}{4}$을 7등분하는 것은 쉽지 않으며, 분할선들이 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ 선과 일치하지 않는다. 따라서 $\frac{3}{4}$을 7등분한 선들이 나타내는 분수가 얼마인지 직관적으로 알기 어렵다([그림 Ⅱ-5]).



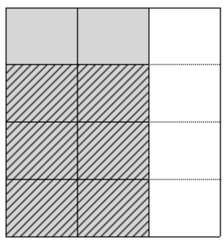
[그림 Ⅱ-5] $\frac{3}{4}$의 7등분.

개정 교과서는 이와 같은 난점을 고려하여, 길이 모델을 도입하면서 활동 1에서 분할이 쉽고 분할선이 나타내는 분수도 그림에서 알아내기 쉬운 수치로 된 곱셈식을 사용한 것으로 보인다. 그러나 이와 같은 수치는, 분할의 편의성과 결과 도출의 편의성을 증가시킨 반면, 활동과 분수 곱셈 표준 알고리즘의 연결성이 약화되는 문제점을 지니게 만들었다.

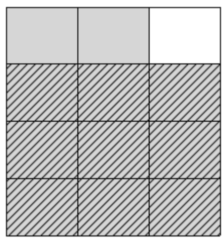
3. 넓이 모델 활동 분석

개정 및 7차 교과서에서, 분수 곱셈 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$를 직사각형 넓이 모델을 이용하는 맥락으로 다음 세 가지를 찾아볼 수 있다. 첫째, 가로의 길이가 $\frac{b}{a}$이고 세로의 길이가 $\frac{d}{c}$인 직사각형의 넓이를 구하는 맥락이다. 개정 교과서와 7차 교과서에서 이와 같은 맥락은, 이를테면 (대분수)×(대분수)에서 나오지만(5-1, p. 60; 5-가, p.123), (진분수)×(진분수)의 분수 알고리즘을 형식화하는 대목에서는 사용되지 않는다. 둘째, 넓이가 $\frac{b}{a}$인 직사각형의 $\frac{d}{c}$만큼의 영역의 넓이를 구하는 맥락이다. 넓이가 $\frac{3}{4}$인 직사각형을 색칠하고 그것의 $\frac{5}{7}$만큼을 다시 색칠하는 7차 교과서의 활동이 이에 해당한다. 만일 이 둘째 맥락에서 처음에 가로 1, 세로 1 정사각형에서 시작하면, 겹치는 부분의 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$가 되므로 첫째 맥락과 연결된다(Reys, Suydam, Lindquist, and Smith, 1999). 셋째, 주어진 직사각형의 가로 방향으로 $\frac{b}{a}$만큼의 영역과 세로 방향으로 $\frac{d}{c}$만큼의 영역의 공통부분의 넓이를 구하는 맥락이다. 개정 교과서의 활동 2는 여기에 해당한다.

둘째 맥락과 셋째 맥락은 $\frac{b}{a}$가 직사각형의 한 변의 길이가 아니라 어떤 직사각형의 넓이를 나타낸다는 점에서 공통적이다. 그러나 둘째 맥락과 셋째 맥락에서 승수 $\frac{d}{c}$가 나타내는 것에 다소 차이가 있다. 둘째 맥락에서 $\frac{d}{c}$는 넓이가 $\frac{b}{a}$인 한 직사각형을 c등분하고 그 중 d개를 취하는 조작을 의미한다. 셋째 맥락에서 $\frac{d}{c}$는 다른 한 직사각형의 넓이를 뜻한다. 이 두 맥락의 차이를 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 예로 하여 [그림 Ⅱ-6], [그림 Ⅱ-7]과 같이 나타낼 수 있다. (두 그림 모두에서 $\frac{2}{3}$는 한 직사각형의 넓이를 뜻한다.)

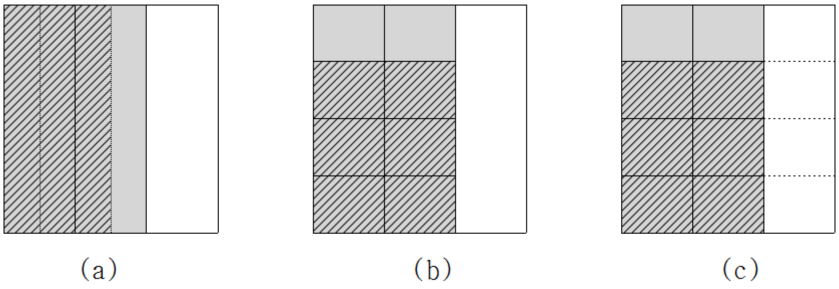


[그림 Ⅱ-6] $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$의 둘째 맥락



[그림 Ⅱ-7] $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$의 셋째 맥락

둘째 맥락에 해당하는 [그림 Ⅱ-6]에서는 세 번째 열에 칠해지는 칸이 없다. 셋째 맥락에 해당하는 [그림 Ⅱ-7]에서는 넓이가 $\frac{3}{4}$인 직사각형을 생각



[그림 Ⅱ-8] 직사각형의 분할.

하므로 세 번째 열의 세 칸도 칠해지고, 이때 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$은 넓이가 $\frac{2}{3}$인 직사각형과 넓이가 $\frac{3}{4}$인 직사각형의 공통부분의 넓이를 뜻한다.

[그림 Ⅱ-6]의 둘째 맥락에서 $\frac{2}{3}$, $\times$, $\frac{3}{4}$은 초등 수학에서 설명 가능한 의미를 지닌다. $\frac{2}{3}$는 처음 직사각형의 넓이를 1로 볼 때 색칠된 직사각형의 넓이, $\times$는 동수누가를 확장한 배의 의미, $\frac{3}{4}$은 몇 배의 몇 또는 4등분하고 그 중 3개를 취하는 조작으로 해석할 수 있다. 이것은 둘째 맥락이 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$과 자연스럽게 연결될 수 있음을 뜻한다.

직사각형의 $\frac{2}{3}$만큼을 가로로 분할하여 색칠한 후, 그것의 $\frac{3}{4}$을 구하기 위해 색칠한 부분을 4등분하는 방법은 가로로 4등분하는 것([그림 Ⅱ-8(a)])과 세로로 4등분하는 것([그림 Ⅱ-8(b)])이 있다. 가로로 4등분하는 것은 본질상 길이 모델에서 한 것과 동일하다. 가로 세로 양방향 등분 가능성은, 1차원 길이 모델에서는 불가능한, 2차원 직사각형 넓이 모델이 지닌 장점이다(Van de Walle, Karp, and Bay-Williams, 2009). [그림 Ⅱ-8(b)]와 같이 직사각형 넓이 모델의 장점을 살려 분할한 후에, 만들어진 작은 모눈 한 칸의 크기가 얼마인지 알기 위해서는 [그림 Ⅱ-8(b)]의 세 번째 열도 분할해야 한다([그림 Ⅱ-8(c)]).

앞의 길이 모델 활동 분석에서, 길이 모델에서는 곱하는 두 분수 $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$의 분자 분모가 서로 약분이 되는 수치인가 아닌가가 분할 활동의 용이성 및 알고리즘과의 연결성에 중요한 영향을 미침을 보았다. 직사각형 넓이 모델에서는 [그림 Ⅱ-8] (b), (c)와 같은 양방향 분할을 할 수 있으므로, 7차 교과서와 같이 약분이 되지 않는 수치를 사용하는가 개정 교과서와 같이 약분이 되는 수치를 사용하는가가 길이 모델에서만큼 문제가 되지 않는다.

넓이 모델의 둘째 맥락을 취한 7차 교과서에서는 "큰 직사각형에는 작은 직사각형이 몇 개 들어갑니까?" "큰 모눈 하나의 넓이가 1이라면, 작은 모눈 하나의 넓이는 얼마입니까?"와 같은 질문을 바탕으로 작은 직사각형 한 칸에 주목을 하게 하고, 그것을 바탕으로 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$와 $\frac{b\times d}{a\times c}$를 연결지으려 하고 있다. 이와 같은 7차 교과서의 접근은, 세로로 등분하는 과정에서 [그림 Ⅱ-8(b)와 (c)]가 보여주는 두 단계의 구분이 드러나 있지 않고, 백선수와 김원경(2005, p. 156)이 지적한 것처럼 세부 활동에서 분수의 곱을 구하기 위해서 그렇게 겹쳐서 색칠하는 이유가 분명히 드러나지 않는 부분이 다소 있지만, 문제 맥락과 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$의 연결성, 활동과 $\frac{b\times d}{a\times c}$의 연결성, 최종적으로 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$와 $\frac{b\times d}{a\times c}$의 연결성에서 큰 무리가 없어 보인다.

이제 개정 교과서의 맥락에 대해 살펴보자. [그림 Ⅱ-7]에서 보이는 바와 같이, 셋째 맥락에서 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$은 각각 서로 다른 직사각형의 넓이를 나타낸다. 이때 $\times$는 동수누가나 배의 의미로 해석되기 어렵다. 초등학교에서 곱은 '개수×횟수(배)' 개념을 바

탕으로 하므로, 피승수와 승수가 나타내는 것이 다르다. 피승수는 넓이를 나타낼 수 있지만, 승수는 넓이를 나타낼 수 없다. 그러므로 셋째 맥락에서 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 설명하는 것은 초등학교의 전형적인 곱의 개념과 직접적으로 연결되지 않는다.

초등학교에서 경우에 따라 동수누가 또는 배의 개념으로 설명하기 곤란한 곱셈식을 쓰기도 한다. 평면도형의 넓이 공식에서, 이를테면 (직사각형의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)에서 피승수와 승수는 모두 길이이다. (길이)×(길이) 곱셈식은 형태상 '개수×횟수' 또는 '양×배'의 형태가 아니다. 그러나 이 곱셈식은 동수누가 또는 배로서의 곱셈을 표현의 편의상 (가로의 길이)×(세로의 길이)라는 형식으로 쓴 것으로 볼 수 있다. 실제로 교과서에서 이 공식이 유도되는 과정에서(4-2 교과서, p. 74; 5-가 교과서, p. 91), 3×2=6(㎠)는 1(㎠)×3×2의 압축된 표현으로 볼 수 있기 때문이다.

이와 마찬가지로, 셋째 맥락에서 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$도, 형태상 (양)×(양)으로 기존의 동수누가나 배로서의 곱셈과 다른 곱셈인 것으로 보이지만, 실상은 동수누가나 배의 곱셈의 과정을 단지 압축 또는 간결하게 표현한 것은 아닌가? 이것이 가능하려면, 3×2에서 2가 '3㎠ 넓이의 가로줄'이 '2번 반복'된다는 것을 나타내는, 곧 3에 작용하는 조작인 것처럼, $\frac{3}{4}$이 $\frac{2}{3}$에 작용하는 어떤 조작으로 해석될 수 있어야 한다. 그런데 $\frac{3}{4}$은 서로 다른 방향으로 처음 정사각형을 잘라 얻은 영역의 넓이이지, $\frac{2}{3}$에 직접 작용하는 조작이 아니다. 그러므로 직사각형의 넓이 공식에서와 달리, $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$에서 곱의 의미를 동수누가나 배로 바로 연결하기 어렵다. 개정 교과서의 활동 2에서 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$은 [그림 Ⅱ-7]에서 음영된 영역을 A, 빗금친 영역을 B라 할 때 A∩B의 넓이를 뜻한다. 이것은 식으로 $m(A)=\frac{2}{3}$, $m(B)=\frac{3}{4}$일 때 $m(A\cap B)=m(A)\times m(B)$와 같이, 곱사건의 확률 공식 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$와 같은 형태로 표현되는 곱이다.

개정 교과서의 활동 2는 다음 3개의 세부 활동으로 구성되어 있다.

- 직사각형의 가로의 $\frac{2}{3}$만큼, 세로의 $\frac{3}{4}$만큼 색을 칠하시오.
- 겹쳐서 색칠한 부분은 전체의 몇 분의 몇입니까?
- $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$은 얼마입니까?

이상의 고찰은 처음 두 세부 활동에서 세 번째 활동으로 넘어가는 부분에 간격이 있음을 시사한다. 처음 두 세부 활동으로부터 겹쳐서 색칠한 부분이 $\frac{6}{12}(=\frac{1}{2})$이라는 것은 알 수 있지만, 그것이 어떻게 그리고 왜 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$과 연결되는 것인지 분명하지 않다. 아동들은 단순히 두 세부 활동에서 얻은 결과인 $\frac{6}{12}$이 앞서 활동 1에서 얻은 결과인 $\frac{1}{2}$과 같다는 것에 착안해서 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$과 연결하려 할지도 모른다. 이것은 $\frac{6}{12}$이라는 결과를 활동 1을 매개로 해서 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$과 연결하는 것이지, 활동 그 자체를 매개로 $\frac{6}{12}$과 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 연결하는 것이 아니다. 활동과 곱셈식을 연결하기 위해서는 세로로 칠한 부분이 가로로 칠한 부분을 $\frac{3}{4}$으로 자르고 있다는 것을 의도적으로 드러내어야 한다(Baroody & Coslick, 2005, p. 363). 이것은 본질상 셋째 맥락을 둘째 맥락과 관련짓는 세부 활동이 삽입될 필요가 있음을 시사한다.

정리하면, 개정 교과서에서는 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$과 같이 서로 약분되는 수치로 된 두 분수의 곱셈식을 가지고 길이 모델을 이용한 활동 1과 넓이 모델을 이용한 활동 2를 바탕으로 알고리즘의 형식화를 시도하고 있다. 서로 약분되는 수치의 사용은 새로 도입된 길이 모델에서 분할 활동의 편리성을 증진시켰지만, 일반적인 분수 곱셈 알고리즘을 도출하기 어렵게 만들었다. 개정 교과서는 활동 1의 주요 의의를 분수 곱셈의 의

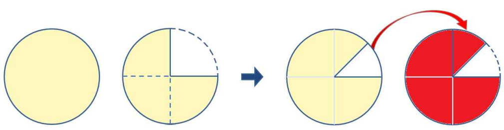
미 이해에 두고, 알고리즘의 형식화는 직사각형의 넓이 모델을 이용한 활동 2를 바탕으로 할 것을 의도했을 수 있다. 그러나 개정 교과서가 사용한 직사각형 넓이 맥락은 활동과 분수 곱셈의 연결성 면에서 문제점을 안고 있다. 결국 활동 1과 활동 2를 종합해도, 문제 맥락과 분수 곱셈식 그리고 그 계산 알고리즘은 서로 자연스럽게 연결되지 않는다. 그러나 다양한 모델의 도입 자체는 발전을 위한 시도로 평가할 수 있다. 이에 다음 장에서는 길이 모델의 도입이라는 개정 교과서의 시도에서 한발 더 나아가면서 길이 모델을 통해 분수 곱셈 알고리즘의 형식화하고자 할 때 중요하게 취급되어야 하는 사고 전략 및 고려할 점에 대해 논의한다.

III. 분배전략을 매개로 한 길이모델과 분수 곱셈 알고리즘의 연결

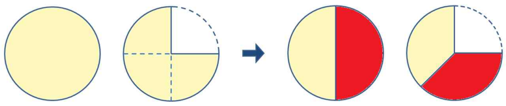
1. 분수의 곱셈과 분배 전략

분수의 곱셈 알고리즘에는 특수한 문제해결 전략이 내재되어 있다. 이를 피자 $1\frac{3}{4}$판 또는 $\frac{7}{4}$판의 $\frac{1}{2}$을 구하는 문제를 예로 하여 살펴보자. 이 문제는 그림을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

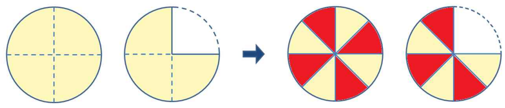
수민: 주어진 피자의 $\frac{1}{2}$을 구하기 위해서, 주어진 피자를 똑같은 양의 두 부분으로 만들어 보자. 피자 1판에서 $\frac{1}{8}$판을 떼어 $\frac{3}{4}$판 조각에 붙이면 피자 $\frac{7}{8}$판으로 된 똑같은 모양을 얻는다.



병희: 주어진 피자의 $\frac{1}{2}$을 바로 구하지 못하겠는데...... 피자 1판의 $\frac{1}{2}$과 피자 $\frac{3}{4}$판의 $\frac{1}{2}$을 각각 구하여 합하면 되겠다.



근우: 주어진 피자의 $\frac{1}{2}$을 바로 구하지 못하겠다. 주어진 피자는 $\frac{1}{4}$판들이 모여 된 것이다. 그러니까 각각의 $\frac{1}{4}$판의 $\frac{1}{2}$을 구해서 합하면 되겠다.



수민이의 풀이를 식으로 $1+\frac{3}{4}=(1-\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}+\frac{3}{4})=\frac{7}{8}+\frac{7}{8}=2\times\frac{7}{8}$과 같이 나타낼 수 있다. 병희의 풀이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$1\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=(1+\frac{3}{4})\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$$

근우의 풀이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

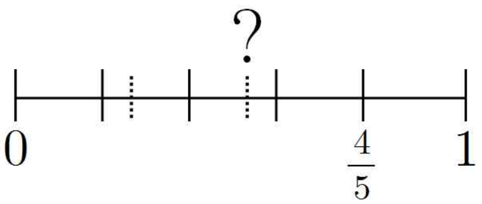
$$\begin{aligned}\frac{7}{4}\times\frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\\ &\quad +\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4\times2}\times7 = \frac{1\times7}{4\times2}\end{aligned}$$

수민이의 풀이와 달리, 병희의 풀이는 (대분수)×(진분수)의 풀이 방법과, 근우의 풀이는 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하는 분수 곱셈 알고리즘과 직접적으로 연결될 수 있다. 여기서 병희와 근우의 풀이에는 공통된 사고 전략이 들어 있음에 주목할 필요가 있다. 전체를 바로 공략하기 어려

울 때에 그 전체를 구성하고 있는 부분들을 공략하는 일을 반복한다는 문제 해결 전략이 그것이다. $\frac{b}{a}$는 $\frac{1}{a}$이 b개 모여 이루어진 것이므로, $\frac{b}{a}$를 전체로서 공략하기 힘들 때에는 그것의 핵심 구성 요소인 $\frac{1}{a}$을 공략한다는 것이다. 이것은 일반적인 경우를 구성하는 특수한 경우를 공략한다는 점에서, Polya(1961)가 보간법과 원주각의 성질을 통해 예시한 일차결합의 아이디어와 상통하는 바가 있다. 이 전략은 병희와 근우의 풀이를 식으로 나타낸 것에서 볼 수 있듯이 분배 법칙과 관련 있으므로, 이를 분배 전략이라고 부르기로 한다. 분배 전략은 아동들이 문제 상황으로부터 분수 곱셈 알고리즘의 구성으로 나아가는 과정에서 경험해야 하는 핵심적인 사고 전략이다. 앞에서 살펴본 개정 교과서나 7차 교과서의 (진분수)×(진분수) 활동들에서는 이 전략이 드러나 있지 않다. 이에 다음에서는 길이 모델을 사용하여 분배 전략을 매개로 하여 분수 곱셈 알고리즘을 형식화하는 것과 관련된 문제를 살펴보겠다.

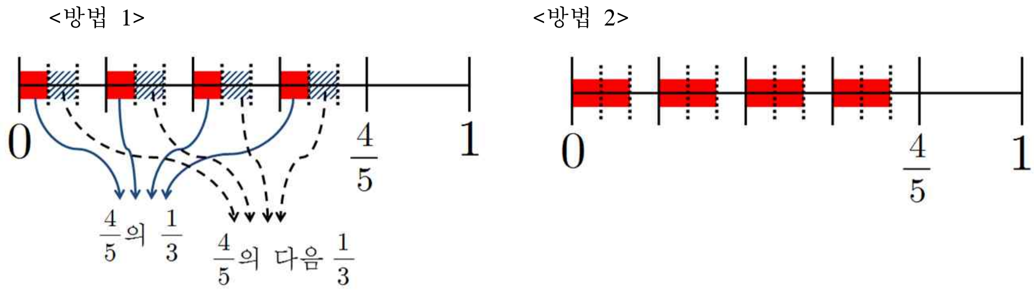
2. (분수)×(분수)와 분배 전략

개정교과서에서는 곱셈식 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 사용하였는데 이 경우 $\frac{2}{3}$의 4등분선이 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$선과 일치하여 직관적으로 $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{4}$ 지점이 $\frac{3}{6}(=\frac{1}{2})$이라는 것을 알 수 있다. 그러나 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$에서 $\frac{b}{a}$의 c등분선이 $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a}$, .. 등분선과 일치하지 않는 경우, 곧 $\frac{b}{a}$를 c등분한 값을 바로 알기 어려운 경우에는, 위와 같이 직관적으로 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$의 값이 얼마인지 알 수 없다, 이를테면 $\frac{4}{5}$를 3등분한 값이 얼마인지 그림에서 바로 알 수 없으므로, $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$가 얼마인지 직관적으로 알기 어렵다([그림 Ⅲ-1]).



[그림 Ⅲ-1] $\frac{4}{5}$의 3등분.

여기에 '전체를 바로 공략할 수 없을 때 그것을 구성하는 각 부분을 공략하는 일을 반복한다'는 전략을 사용해 보자. 전체 $\frac{4}{5}$를 3등분한 값이 얼마인지 바로 알기 어려우므로, 그것을 구성하는 각 부분 곧 $\frac{1}{5}$들을 3등분하는 일을 반복한다. 이렇게 전체 $\frac{4}{5}$를 구성하는 각 부분인 $\frac{1}{5}$을 모두 3등분하면, 다음 [그림 Ⅲ-2]와 같이 두 가지 방법으로 $\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$를 구할 수 있다.



[그림 Ⅲ-2] $\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$와 분배 전략의 적용.

<방법 1>에서는, 각각의 $\frac{1}{5}$을 3등분한 후 그 중에서 한 조각씩을 뽑아 모은다. 이렇게 각각의 $\frac{1}{5}$에서 뽑아 모은 4조각은 $\frac{4}{5}$의 $\frac{1}{3}$을 이룬다. 각각의 $\frac{1}{5}$을 3등분한 것에서 한 조각씩을 뽑아 4 조각을 모으는 일을 3번 반복하면 전체 $\frac{4}{5}$가 되기 때문이다. 이때 $\frac{4}{5}$의 $\frac{1}{3}$에는 $\frac{1}{5}$을 3등분한 작은 조각이 4개 들어가고, 다시 $\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$에는 작은 조각이 8개 들어간다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5\times3}\times4\times2=\frac{4\times2}{5\times3}$$

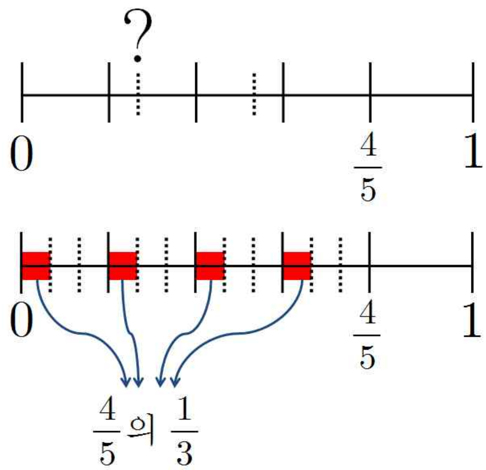
<방법 2>에서는, 각각의 $\frac{1}{5}$을 3등분한 것에서 두 조각씩을 취하는 일을 4번 반복한다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\right)\times4=\frac{2}{5\times3}\times4=\frac{2\times4}{5\times3}$$

<방법 1>과 <방법 2>에서는, 공통으로 $\frac{1}{5\times3}$ 조각이 나타나고 곱셈 알고리즘에서 분자에 나타나는 4와 2도 나름의 의미를 지닌다. <방법 1>에서 4는 4개의 $\frac{1}{5}$에서 $\frac{1}{5\times3}$ 조각을 하나씩 모으는 것을, 2는 그 조작을 두 번 반복함을 뜻한다. <방법 2>에서, 2는 각각의 $\frac{1}{5}$에 있는 두 개의 $\frac{1}{5\times3}$ 조각을, 4는 그것이 4개의 $\frac{1}{5}$에서 반복됨을 뜻한다.

<방법 1>과 <방법 2>는 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱하는 알고리즘으로 연결된다는 점에서는 차이가 없다. 그러나 앞의 분수의 분자(분모)에 뒤의 분수의 분자(분모)를 곱하는 알고리즘과는, 위의 두 수식에서 볼 수 있듯이, <방법 1>이 더 잘 어울린다. 이에 아래에서는 앞과 뒤의 분수의 분자와 분모를 차례대로 곱하는 알고리즘의 형식화에 초점을 두어 <방법 1>의 방향으로 논의를 진행한다.

7차 교과서와 2007 개정 교과서에서는 모두 (단위분수)×(단위분수)에 이어서 바로 (진분수)×(진분수)를 도입하고 있다. 이 둘 사이에 (진분수)×(단위분수) 또는 (단위분수)×(진분수)는 별도로 다루어지지 않는다. 그런데 위의 <방법 1>과 <방법 2>를 보면, <방법 1>에서는 $\frac{4}{5}$의 $\frac{1}{3}$을 구하는 조작을 반복하게 되고, <방법 2>에서는 $\frac{1}{5}$의 $\frac{2}{3}$를 구하는 조작을 반복하게 된다. 이것은 분배 전략을 매개로 상황과 분수 곱셈 알고리즘을 연결하고자 할 때, 단위분수와 단위분수의 곱($\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$)과 진분수와 진분수의 곱($\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$) 사이에 (진분수)×(단위분수)($\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$) 또는 (단위분수)×(진분수)($\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}$)를 중간 단계로 다룰 필요가 있음을 시사한다. <방법 1>에 초점을 두어 말하면, (진분수)×(단위분수)를 중간 단계로 다룰 필요가 있다. $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$이 얼마인지를 바로 알기 어렵다는 것, 그리고 이것을 분배 전략을 사용하면 해결할 수 있다는 것이 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$과 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ 사이에 삽입될 필요가 있다.

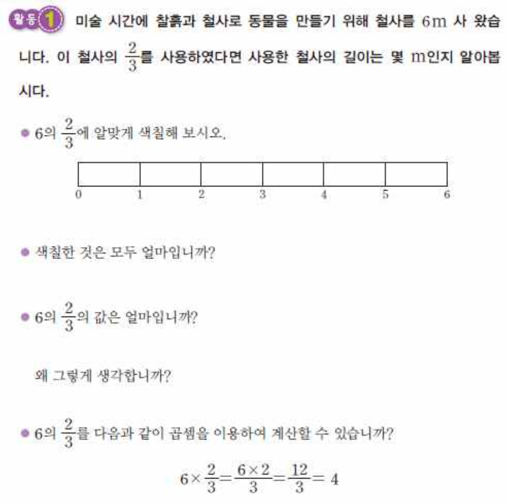


[그림 Ⅲ-3] $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$과 분배 전략.

3. (자연수)×(분수)와 분배 전략

7차 교과서와 개정 교과서에서는 (분수)×(분수)

에 앞서 (자연수)×(분수)를 다룬다. (분수)×(분수)를 분배 전략의 관점에서 접근하기 위해서는 (자연수)×(분수)도 분배 전략의 관점에서 이해될 필요가 있다. 개정 교과서에서 (자연수)×(진분수)는 [그림 Ⅲ-4]와 같이 다루어진다.


활동1 미술 시간에 찰흙과 철사로 동물을 만들기 위해 철사를 6m 사 왔습니다. 이 철사의 $\frac{2}{3}$를 사용하였다면 사용한 철사의 길이는 몇 m인지 알아봅시다.

● 6의 $\frac{2}{3}$에 알맞게 색칠해 보시오.

0 1 2 3 4 5 6

● 색칠한 것은 모두 얼마입니까?

● 6의 $\frac{2}{3}$의 값은 얼마입니까?

왜 그렇게 생각합니까?

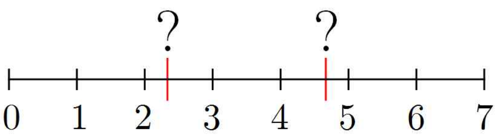
● 6의 $\frac{2}{3}$를 다음과 같이 곱셈을 이용하여 계산할 수 있습니까?

$$6\times\frac{2}{3}=\frac{6\times2}{3}=\frac{12}{3}=4$$

[그림 Ⅲ-4] 개정 교과서의 (자연수)×(진분수)
(수학 5-1, p.52)

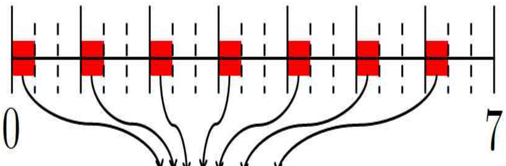
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$을 길이 모델로 구하는 개정 교과서의 활동과 유사하게, 6의 $\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}$가 얼마인지 그림에서 직관적으로 알 수 있다. 개정 교과서의 (진분수)×(진분수) 활동 1에 대한 분석에서 지적한 것과 마찬가지로, 여기에도 활동으로부터 $6\times\frac{2}{3}=\frac{6\times2}{3}$라는 알고리즘의 형식화가 곤란하다는 문제점이 있다.

$6\times\frac{2}{3}$가 아니라 $7\times\frac{2}{3}$라면, 7의 $\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}$ 등분선이 기존 등분선과 일치하지 않아 그림에서 그 값을 직관적으로 찾기 어렵다.



[그림 Ⅲ-5] 7의 3등분.

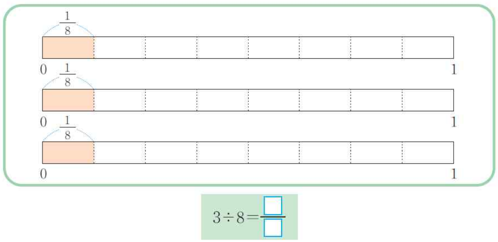
$7\times\frac{2}{3}$에도 위의 <방법 1> 및 <방법 2>가 다 적용될 수 있으며, 두 방법 모두 $7\times\frac{1}{3}$을 구하는 [그림 Ⅲ-6]의 방법에 바탕을 두고 있다. [그림 Ⅲ-6]은 $7\times\frac{2}{3}$를 구하는 과정이 실상 $7\times\frac{1}{3}$은 $\frac{1}{3}\times7$과 같음(교환법칙)을 아는 과정이기도 함을 시사한다. 7의 $\frac{1}{3}$을 구하는 과정이 $\frac{1}{3}$을 7개 합하는 과정으로 환원되기 때문이다.



$$7\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\times7$$

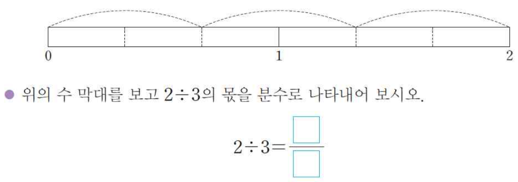
[그림 Ⅲ-6] 분배 전략과 $7\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times7$

여기서 $\frac{7}{3}$이라는 분수의 두 가지 의미의 지도 문제가 제기된다. $\frac{7}{3}$의 첫 번째 의미는 '$\frac{1}{3}$이 7개인 수'이다. 둘째 의미는 '3개 모여서 7이 되는 수'이다. 분배 전략을 바탕으로 분수 곱셈 알고리즘을 도입하기 위해서는 $\frac{7}{3}$의 이 두 가지 의미가 모두 이전에 취급되어야 한다. 그 첫 번째 의미는 가분수가 도입될 때 취급된다(수학 4-1, p. 96). 그러면 두 번째 의미는 어디서 취급되는가? 2007 개정 교과서에서는 수학 5-1에서 분수의 곱셈을 지도한 후, 수학 5-2에서 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 방법을 다룬다. 7차 교과서에서는 수학 5-가에서 분수의 곱셈을 다루기 전에, 수학 4-나에서 나누어떨어지지 않는 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 ($\square\div\triangle=\frac{\square}{\triangle}$) 방법을 다룬다. 다음 [그림 Ⅲ-7]은 7차 4-나 수학 익힘책에 나오는 문제이다.



[그림 Ⅲ-7] 7차 교과서의 몫 분수 (4-나 익힘책, p. 7).

3을 8로 나눈 몫이 얼마인지 바로 알 수 없기 때문에 각각의 1을 8등분 한 후, 그 중 하나씩을 취하여 $\frac{3}{8}$을 얻는다. 이때 $\frac{3}{8}$은 '$\frac{1}{8}$이 3개'라는 의미와 함께 '8번 모으면 3이 되는 수'의 의미를 동시에 지닌다. 곧 3÷8을 구할 때에 분배 전략을 사용하고 있으며, 이것을 나타낸 그림을 통해 $\frac{3}{8}$이 '$\frac{1}{8}$이 3개 모인 수'라는 의미와 더불어 '8번 모아서 3이 되는 수'라는 이중의 의미를 담아내고 있다. 개정 교과서에서는 몫으로서 분수 개념을 다루면서 이와 같은 분배 전략을 명시적으로 드러내지 않는다. 7차 교과서가 3을 1막대 3개로 나타내고 각각의 $\frac{1}{8}$을 구하고 있는 것과 달리, 개정 교과서는 2를 전체 하나의 막대로 나타내고 있다([그림 Ⅲ-8]). 이 그림에는 1을 3등분하여 그 하나씩을 몫으로 취하는 일을 두 번 반복한다는 분배 전략 적용의 과정이 [그림 Ⅲ-7]만큼 드러나 있지 않다.



[그림 Ⅲ-8] 개정 교과서의 몫 분수 (수학 5-2, p. 8).

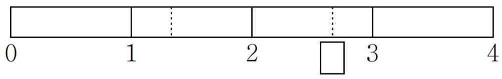
4. 분배 전략에 중점을 둔 분수 곱셈 알고리즘 구성 활동 예시

이상의 논의를 정리하면서, 길이 모델을 가지고 분배 전략에 중점을 두어 분수 곱셈 알고리즘 구성을 도모하는 일련의 활동을 예시한다.

◎ 자연수와 진분수의 곱셈을 알아봅시다

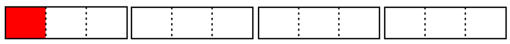
미술 시간에 쓰려고 1m짜리 테이프를 4개 샀습니다. 테이프의 $\frac{2}{3}$를 사용하였다면 사용한 테이프는 몇 m인지 알아봅시다.

- $4m$의 $\frac{2}{3}$가 얼마인지 바로 알 수 있습니까?



활동 1 $4m$의 $\frac{1}{3}$은 얼마인지 알아보시오.

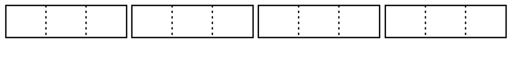
- $1m$짜리 테이프 각각의 $\frac{1}{3}$씩 색칠해 보시오.



- 색칠한 조각이 몇 개 있습니까?
- 4의 $\frac{1}{3}$은 얼마라고 생각합니까?
- 왜 그렇게 생각합니까?
- $4\times\frac{1}{3}$은 어떻게 계산할 수 있습니까?

활동 2 $4m$의 $\frac{2}{3}$는 얼마인지 알아보시오.

- $4m$의 $\frac{2}{3}$를 색칠해 보시오.



- $4m$의 $\frac{2}{3}$에는 $\frac{1}{3}m$가 몇 번 들어있습니까?
- $4\times\frac{2}{3}$는 $4\times\frac{1}{3}$의 몇 배와 같다고 생각합니까?
- $4\times\frac{2}{3}$는 얼마라고 생각합니까?

활동 3 $4\times\frac{2}{3}$ 를 계산하는 방법을 알아보시오.

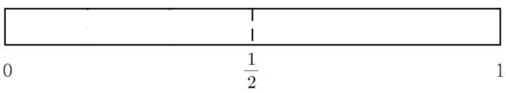
- 앞에서 공부한 것을 생각하여 $4\times\frac{2}{3}$ 를 계산하여 보시오.

$$4\times\frac{2}{3}=(4\times\frac{1}{3})\times\square=\frac{4}{3}\times\square=\frac{4\times\square}{3}=\frac{\square}{3}$$

◎ **<u>곱하는 수가 단위분수인 분수의 곱셈을 알아봅시다.</u>**

활동 1 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ 의 값은 얼마인지 알아봅시다.

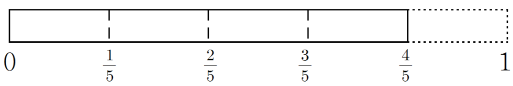
- 수막대에 $\frac{1}{2}$ 의 $\frac{1}{3}$ 만큼 색칠하시오.



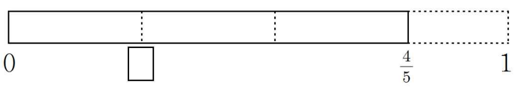
- 색칠한 조각은 전체 수 막대의 몇 분의 몇입니까?
- $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ 은 얼마입니까?
- 단위분수와 단위분수의 곱을 쉽게 계산하는 방법을 말해 보시오.

활동 2 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$ 의 값은 얼마인지 알아봅시다.

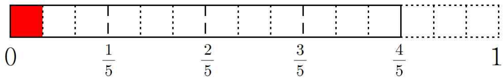
민수는 작은 상자를 묶는데 길이가 $\frac{4}{5}m$인 끈의 $\frac{1}{3}$ 을 사용하였습니다. 민수가 사용한 끈은 몇 m인지 알아봅시다.



- $\frac{4}{5}m$의 $\frac{1}{3}$ 은 얼마인지 바로 알 수 있습니까?



- 각각의 $\frac{1}{5}m$를 똑같이 셋으로 나누었습니다. 각각의 $\frac{1}{5}m$의 $\frac{1}{3}$ 을 색칠하여 보시오.

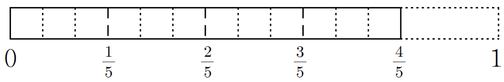


- $\frac{1}{5}$ 의 $\frac{1}{3}$ 은 얼마입니까?
- $\frac{4}{5}$ 에는 색칠한 작은 조각이 몇 개 들어 있습니까?
- $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$ 는 얼마라고 생각합니까?
- 진분수와 단위분수의 곱을 쉽게 계산하는 방법을 말해 보시오.

◎ **<u>진분수와 진분수의 곱셈을 알아봅시다.</u>**

활동 1 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ 의 값은 얼마인지 수 막대로 알아봅시다.

- $\frac{4}{5}$ 의 $\frac{2}{3}$ 를 색칠하여 보시오.



- $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ 는 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$ 의 몇 배라고 생각합니까?
- $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ 는 얼마입니까?

활동 2 진분수와 진분수의 곱을 계산하는 방법을 알아보시오.

- 앞에서 공부한 것을 생각하여 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ 를 계산해 보시오.

$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=$

- 진분수와 진분수의 곱을 계산하는 방법을 말해 보시오.

Ⅳ. 결 어

이 연구는, 분자는 분자끼리 곱하고 분모는 분모끼리 곱한다는 분수 곱셈의 표준 알고리즘을 형식화를 위한, 개정 교과서의 새로운 시도에서 촉발되었다. 7차 교과서가 (진분수)×(진분수)를 직사각형의 넓이 모델만 사용한 것과 달리, 개정 교과서에서는 길이 모델을 도입하였고, 넓이 모델도 7차 교과서와는 다소 다른 맥락에서 사용하였다. 또 길이 모델의 도입에 따른 활동의 편리성을 고려하여, 약분이 되는 수치들로 된 분수를 사용하였다. 그러나 이것은 활동과 표준 알고리즘 사이의 연결성을 불분명하게 만드는 결과를 초래하였다.

이 논문의 후반부에서는, 길이 모델의 도입이라는 개정 교과서의 새로운 시도에서 한발 더 나아가, 길이 모델과 분수 곱셈 표준 알고리즘 사이의 연결성을 더 분명하게 하기 위해서 고려해야 할 점들에 대해 논의하였다. 분수 곱셈의 표준 알고리즘에는 '전체를 바로 공략하기 어려울 때에 그 전체를 구성하고 있는 부분들을 공략하는 일을 반복한다'는 소위 분배 전략이 내재되어 있고, 분수 곱셈 알고리즘은 이 전략이 분수 곱셈 맥락에서 형식화된 것으로 볼 수 있다. 길이 모델로 이 전략을 사용한 활동으로부터 계산 방법을 형식화하는 것은, (진분수)×(진분수)에서 일회적으로 시도하기보다, (진분수)×(단위분수), (자연수)×(진분수), 가분수의 의미 지도와 관련하여 포괄적이고 종합적으로 접근해야 하는 성질의 것임을 시사한다. 이러한 포괄적 접근 없이, (진분수)×(진분수)에서 일회적으로 길이 모델로부터 분수 곱셈 알고리즘을 형식화하려는 시도는 성공하기 어려울 것이다.

이 연구의 결과는 양면적으로 해석될 수 있다. 한편으로, 분수 곱셈의 표준 알고리즘을 지도할 때 길이 모델이 아닌 직사각형 넓이 모델이 주로 사용되어 온 이유를 보여주는 것으로 해석될 수 있다. 길이 모델에서의 분할 활동과 표준 알고리즘을 연결하기 위해서는, 약분이 되지 않는 수치로 된 두 분수 곱셈을 사용해야 하는데, 이것은 다소 복잡한 분할 활동을 요구하므로, 상대적으로 분할이 쉬운 직사각형 넓이 모델을 사용해 온 것이다. 다른 한편, 이 연구의 결과는 길이 모델이 지닌 가능성을 보여주는 것으로도 해석될 수 있다. 길이 모델은, 직사각형 넓이 모델에 비해 상대적으로 복잡한 분할 활동을 요하지만, 전체($\frac{b}{a}$)를 직접 공략하기 어려울 때 전체를 구성하는 핵심 부분($\frac{1}{a}$)을 공략하는 일을 반복한다는 문제 해결 전략, 분수 곱셈($\times\frac{d}{c}$)의 의미, 몫으로서 분수의 의미 이해를 심화시킬 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2011a). **수학 4-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011b). **수학 5-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011c). **수학 5-2**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011d). **수학 교사용지도서 5-1**. 서울: 두산동아.

교육인적자원부(2006a). **수학 5-가**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부(2006b). **수학 5-나**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부(2006c). **수학 교사용지도서 4-나**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부(2006d). **수학 익힘책 4-나**. 서울: 천재교육.

강문봉(2011). 자연수의 나눗셈 지도에 대한 고

찰-2007 개정 교육과정의 초등수학 교과서와 지도서를 중심으로. **수학교육학연구**, 21(1), 1-16.

김명운・장경윤(2009). 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도. **학교수학**, 11(4), 685-706.

방정숙・이지영(2009). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **학교수학**, 11(4), 723-743.

백선수・김원경(2005). 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화 사례 연구. **학교수학**, 7(2), 139-168.

오영열(2004). 초등수학에 대한 예비교사들의 이해: 분수의 곱셈을 중심으로. **학교수학**, 6(3), 267-281.

이용률(2010). **초등학교 수학의 중요한 지도 내용**. 서울: 경문사.

장혜원(1997). **수학 학습에서 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (2005). **수학의 힘을 길러주자**. (권성룡 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1998년 출판)

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational Ltd.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. NY: John Wiley & sons, Inc.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3 - 17.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist, M. M., Smith, N. L. (1999). **초등 수학 학습 지도의 이해**. (강문봉 외 역). 서울: 양서원. (영어 원작은 1998년 출판).

Taber, S. B. (2002). Go ask Alice about multiplication of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.61-71). Reston, VA: NCTM.

Tirosh, D. & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 79-96.

Van de Walle, John A., Karp, K. S. and Bay-Williams, J. M. (2009). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

Models and the Algorithm for Fraction Multiplication in Elementary Mathematics Textbooks

Yim, Jaehoon (Gyeongin National University of Education)

This paper analyzes the activities for (fraction) ×(fraction) in Korean elementary textbooks focusing on the connection between visual models and the algorithm. New Korean textbook attempts a new approach to use length model (as well as rectangular area model) for developing the standard algorithm for the multiplication of fractions, $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$. However, activities with visual models in the textbook are not well connected to the algorithm. To bridge the gap between activities with models and the algorithm, distributive strategy should be emphasized. A wealth of experience of solving problems of fraction multiplication using the distributive strategy with visual models can serve as a strong basis for developing the algorithm for the multiplication of fractions.

* key words : Multiplication of fractions(분수의 곱셈), Length model (길이 모델), Area model (넓이 모델), Algorithm(알고리즘), Analysis of textbook(교과서 분석)

논문접수 : 2011. 1. 31
논문수정 : 2012. 2. 17
심사완료 : 2012. 3. 9