

# 등가 코너링강성을 사용한 차량의 조종안정성에 대한 민감도 해석

이창노<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>우석대학교 기계자동차공학과

## Application of Sensitivity Analysis to Vehicle Handling with Equivalent Cornering Stiffness

Chang-Ro Lee<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Mechanical & Automotive Engineering, Woosuk University

**요 약** 차량은 여러 가지 설계변수가 결합된 동적계이다. 차량의 운동특성은 이러한 설계변수의 변화에 따라 변하게 된다. 설계변수의 조종안정성에 대한 영향을 파악하기 위하여 현가장치나 조향장치 특성이 포함된 등가코너링강성을 고려한 차량의 조종안정성 모델에 대하여 수치해법에 의한 민감도 해석을 수행하였다. 민감도 해석결과로부터 차량설계변수인 무계중심위치, 타이어 코너링특성, 현가장치 및 조향장치의 특성의 변화에 대한 정상상태이득, 스테빌리티 팩터, 주파수응답 등 차량 조종안정성의 변화율을 파악할 수 있었다. 또한 민감도 해석은 정성적이고 정량적인 결과를 제공하므로 설계단계는 물론 차량개발단계에서도 차량의 성능향상을 위한 설계변수들의 최적화에 사용될 수 있다.

**Abstract** Vehicle is a dynamic system combined with various parameters. Dynamic characteristics of a vehicle can vary with the change of these parameters. To investigate the effect of the design parameter on vehicle handling performance the sensitivity analysis is carried out by the numerical method. The vehicle model is described by equivalent cornering stiffness that considers parameters of suspension and steering system. As the analysis results show the effect on the static and dynamic characteristics of the vehicle system, the sensitivity analysis can be used for synthesis of the design parameters to improve the vehicle handling characteristics at the design stage as well as during the vehicle test under development.

**Key Words** : Vehicle Dynamics, Sensitivity Analysis, Equivalent Cornering Stiffness

### 1. 서론

차량은 여러 가지 설계변수가 조합된 하나의 동적계이다. 그래서 이러한 설계변수의 변화에 따라 차량의 동특성 즉 성능이 변화한다. 이때 각 설계변수의 변화에 따른 관심 있는 차량성능에 미치는 영향의 정도를 해석하는 것이 민감도해석이다. 이러한 민감도해석을 차량동역학에 적용한 사례로서 승차감의 최적화를 위한 다물체동역학 민감도해석[1,2], 주파수 영역에서 차량설계변수의 민

감도 해석[3], 차량동역학 민감도 해석결과를 설계 최적화로 적용[4], 차량동역학문제에 대한 민감도 해석의 적용[5]등이 있다. 민감도 해석결과는 정성적일 뿐만 아니라 정량적인 정보를 포함하므로 설계개선이나 시험차량 튜닝을 하는데 유용하게 쓸 수 있다. 본 논문은 차량의 동적성능 중 특히 조종안정성에 관련된 주요 설계변수들로 구성되는 차량모델을 이용하여 설계변수의 변동에 대한 조종안정성의 변화율을 평가할 수 있는 민감도 해석에 관하여 기술한다.

본 논문은 2012학년도 우석대학교 교내학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

\*Corresponding Author : Chang-Ro Lee

Tel: +82-17-288-4778 email: rolee@woosuk.ac.kr

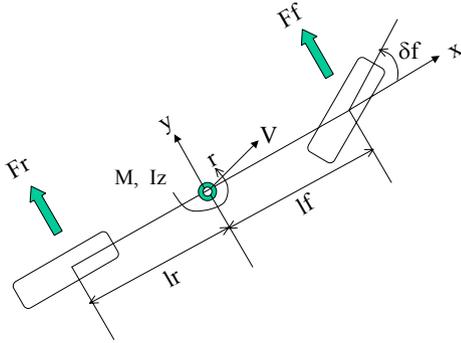
접수일 12년 03월 13일 수정일 12년 04월 10일

게재확정일 12년 04월 12일

## 2. 차량모델

### 2.1 운동방정식

차량의 조종안정성 해석을 위해 그림 1과 같은 차량모델을 사용한다. 이 모델은 횡방향운동, 요잉운동을 갖는 2자유도 선형모델로서 전륜조향입력에 대한 차량의 선회응답에 대한 해석이 가능하다. 또한 이 차량모델에는 등가 코너링파워 개념을 도입하여 조종안정성에 가장 중요한 타이어 코너링 특성뿐만 아니라 스티어링계 강성, 콤플라이언스 스티어, 롤 스티어등의 조향 및 현가장치의 특성 등이 포함되어 있다.



- $r$  : Yawrate
- $y$  : Lateral displacement
- $M$  : Vehicle mass
- $I_z$  : Yaw moment of inertia about C.G
- $V$  : Vehicle Velocity
- $F_f$  : Front Tire Cornering Forces
- $F_r$  : Rear Tire Cornering Forces
- $\delta_f$  : Front Wheel Steer Angle

[그림 1] 차량모델  
[Fig. 1] Vehicle Model

일정차속으로 진행하는 차량에 전륜조향을 가한 경우 차량의 두 자유도에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M(\dot{v} + V\dot{r}) = F_f + F_r \quad (1)$$

$$I_z \dot{r} = l_f F_f - l_r F_r \quad (2)$$

(1)식과 (2)식에서  $F_f, F_r$  는 각각 전후륜 타이어에서 발생하는 코너링력으로 전후타이어의 코너링강성  $C_f, C_r$  을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_f = 2C_f \left( \delta_f - \frac{v + l_f r}{V} \right) \quad (3)$$

$$F_r = 2C_r \left( \delta_r - \frac{v - l_r r}{V} \right) \quad (4)$$

(3)식과 (4)식에서  $\delta_f, \delta_r$  은 각각 전후륜 조향각으로 다음과 같다.

$$\delta_f = \frac{\theta_s}{N} + D_f \frac{F_f}{2} + R_f \phi - \frac{(t_{pf} + t_c)}{K_s} F_f \quad (5)$$

$$\delta_r = D_r \frac{F_r}{2} + R_r \phi \quad (6)$$

여기서  $\theta_s$ 는 스티어링 휠의 조향각,  $N$ 은 조향기어비,  $D_f, D_r$ 은 각각 전후 현가장치의 횡방향 콤플라이언스 스티어계수,  $R_f, R_r$ 는 각각 전후 현가장치의 롤스티어계수,  $\phi$ 는 롤각,  $t_{pf}$ 는 타이어공기트레일,  $t_c$ 는 캐스터 트레일  $K_s$ 는 조향계강성이다.

### 2.2 등가코너링강성

차량모델에 등가코너링강성의 개념[6]을 도입하기 위하여 우선 (5)식을 (3)식과 (4)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_f &= 2C_f \left( \delta_f - \frac{v + l_f r}{V} \right) \\ &= 2C_f \left( \frac{\theta_s}{N} + D_f \frac{F_f}{2} + R_f \phi - \frac{(t_{pf} + t_c)}{K_s} F_f - \frac{v + l_f r}{V} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

(7)식에서 롤각  $\phi$ 는 정상상태에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{M_x}{K_\phi - Mge} = \frac{Ma_y e}{K_\phi - Mge} \\ &= - \frac{(F_f + F_r)e}{K_\phi - Mge} = - \frac{\left( F_f + \frac{l_f}{l_r} F_f \right) e}{K_\phi - Mge} = - \frac{(l_f + l_r) F_f e}{l_r (K_\phi - Mge)} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $M_\phi$ 는 롤모멘트,  $K_\phi$ 는 현가장치의 롤강성,  $a_y$

는 차량의 횡가속도,  $e$ 는 롤축에서 차체 무게중심사이의 거리,  $g$ 는 중력가속도이다. 또한 (8)식을 (7)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$F_f = \frac{2C_f}{\left[1 - \left(D_f - \frac{2R_f(l_f + l_r)e}{l_r(K_\phi - Mge)} - \frac{2(t_{pf} + t_c)}{K_s}\right)C_f\right]} \left(\frac{\theta_s}{N} - \frac{v + l_f r}{V}\right) = 2C_f \left(\frac{\theta_s}{N} - \frac{v + l_f r}{V}\right) \quad (9)$$

(9)식에서

$$C_f^* = \frac{C_f}{\left[1 - \left(D_f - \frac{2R_f(l_f + l_r)e}{l_r(K_\phi - Mge)} - \frac{2(t_{pf} + t_c)}{K_s}\right)C_f\right]}$$

이며 이것을 전륜 등가코너링강성이라 부른다. 후륜에 대하여도 마찬가지로 정리하면 후륜 등가코너링강성은 다음과 같다.

$$C_r^* = \frac{C_r}{\left[1 - \left(D_r - \frac{2R_r(l_f + l_r)e}{l_f(K_\phi - Mge)}\right)C_r\right]}$$

이 등가 코너링강성  $C_f^*$ ,  $C_r^*$ 를 사용하여 (1)과 (2)식의 운동방정식을 행렬형태로 고치면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P\dot{\mathbf{x}} + Q\mathbf{x} = R\mathbf{u} \quad (10)$$

여기서  $\mathbf{x} = [v \ r]^T$ ,  $\mathbf{u} = \theta_s$

$$P = \begin{bmatrix} MV & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix},$$

이고

$$Q = \begin{bmatrix} 2(C_f^* + C_r^*) & \frac{2(l_f C_f^* - l_r C_r^*)}{V} + MV \\ 2(l_f C_f^* - l_r C_r^*) & \frac{2(l_f^2 C_f^* + l_r^2 C_r^*)}{V} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2C_f^*}{N} \\ \frac{2l_f C_f^*}{N} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

### 3. 조종안정성과 관련된 해석

#### 3.1 고유치해석

식(10)에서  $u=0$  일 때,  $(\lambda_j P + Q)\phi_j = 0$  인데 여기서  $\lambda_j$ 는  $Q = -\lambda P$ 의  $j$  번째 고유치로 그 크기는 고유진동수  $\omega_n$ 에 해당하며  $\phi_j$ 는 이에 상응하는 고유벡터이다. 또한 감쇠비는 다음과 같다.

$$\zeta = -\frac{\text{real}(\lambda_i)}{\omega_n}$$

#### 3.2 주파수응답 해석

전달함수를 이용한 계의 주파수 응답을 구하기 위하여 우선 (10)식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$sPX(s) + QX(s) = RU(s)$$

따라서 조향입력에 대한 차량응답의 전달함수는 다음과 같고

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sP + Q)^{-1}R$$

주파수응답은

$$H(\omega) = (j\omega P + Q)^{-1}R$$

이다. 정상상태에서는  $\omega = 0$ 이므로 정상상태이득은 다음과 같다.

$$S = H(0) = Q^{-1}R$$

### 4. 조종안정성 성능지수

전륜조향입력에 대한 차량의 응답특성은 크게 과도응답특성과 정상상태 특성으로 나타낼 수 있는데 상기 해석으로부터 다음과 같은 차량의 조종안정성에 관련된 성능지수[7]들을 구할 수 있다.

#### 4.1 정상상태 특성

1) Stability Factor (SF) : 차량의 선회특성을 판단할 수 있는 값으로 양이면 Under steer, 영이면 Neutral steer, 음이면 Over steer를 의미한다. 차량파라메타들을 사용하여 다음 식으로 정의된다.

$$K = \frac{(C_r^* l_r - C_f^* l_f) M}{2 C_f^* C_r^* (l_f + l_r)^2}$$

2) Steering Sensitivity (SS) : 일정차속에서 조향각 100도 입력에 대한 정상상태에서의 차량의 횡가속도인데 조향민감도를 나타내며 정상상태이득으로부터 구한다.

### 4.2 과도응답 특성

일정차속에서 조향입력에 대한 차량의 요레이트 주파수응답으로부터 다음과 같은 과도응답특성을 평가할 수 있다.

- 1) Yawrate Natural Frequency : 주파수응답에서 요-각 속도 이득의 크기가 Peak로 되는 조향입력 주파수로서, 이 값이 크다는 것은 빠른 조향입력에도 차량의 선회가 잘된다는 것을 의미한다.
- 2) Yawrate Damping Ratio : 주파수응답에서 요-각 속도 이득의 DC값과 Peak 값의 차이를 나타내는데, 차이가 클수록(봉우리가 뾰족할수록) Damping Ratio는 작다. Damping Ratio가 작으면 조향계단입력에 대한 차량의 응답의 Overshoot가 커진다.
- 3) Yawrate Phase Angle : 주파수응답에서 1Hz 에서의 요-각속도의 위상각을 나타내며 음수(위상지연)이다. 이 값이 영에 근접하면 조향에 대한 차량의 선회운동은 빠르게 응답한다.

## 5. 민감도 해석결과

### 5.1 민감도

민감도는 설계변수의 변동에 대한 성능지수의 변화율을 의미하는데 민감도해석을 해석적으로 행하려면 어렵고 복잡해지므로 본 연구에서는 해석적 민감도를 구하는 대신 수치해법에 의한 1차 편도함수를 구하여 사용하였다. 이를 위해 각 설계변수의 초기치에 미소 변동량을 주고 각 성능지수의 변화량을 산출하였다. 또한 설계변수의 초기치의 크기 정도에 따라 변하는 절대민감도 대신 상대민감도를 구하여 설계변수간 각 성능지수의 변화에 대한 기여도를 파악하였다. 초기설계  $(X_{i0}, Y_{j0})$ 에 대한 상대민감도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{S}_{ij} = \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \bigg|_{X_{i0}, Y_{j0}} = \frac{Y_j \text{의 변화}(\%)}{X_i \text{의 변화}(\%)}$$

여기서  $X_i$ 는  $i$ 번째 설계변수이고,  $Y_j$ 는  $j$ 번째 성능지수이다. 차량 초기설계변수는 표1과 같으며 민감도 계산을 위한 프로그램은 MATLAB[8]을 이용하였다.

[표 1] 차량 설계변수

[Table 1] Design Parameters of a Vehicle

| No. | Name | Description (Unit)                         | Initial ( $X_0$ ) |
|-----|------|--|-------------------|
| 1   | M    | Total Vehicle Mass (kg)                    | 1935              |
| 2   | Iz   | Yaw Moment of Inertia (kg-m <sup>2</sup> ) | 2300              |
| 3   | lf   | Distance from CG to Front Axle (m)         | 1.23              |
| 4   | lr   | Distance from CG to Rear Axle (m)          | 1.40              |
| 5   | Cf   | Front tire cornering stiffness (N/rad)     | 60000             |
| 6   | Cr   | Rear tire cornering stiffness (N/rad)      | 60000             |
| 7   | Df   | Front lateral compliance steer (rad/kN)    | 0.022             |
| 8   | Dr   | Rear lateral compliance steer (rad/kN)     | 0.031             |
| 9   | Rf   | Front Roll Steer                           | -0.019            |
| 10  | Rr   | Rear Roll Steer                            | -0.1              |
| 11  | Ks   | Steering System Stiffness (N-m/rad)        | 1.0e5             |
| 12  | tc   | Caster Trail (m)                           | 0.06              |
| 13  | tpf  | Tire pneumatic trail (m)                   | 0.04              |
| 14  | e    | Distance from Body CG to roll axis (m)     | 0.53              |
| 15  | Kφ   | Total Roll Stiffness (N-m/rad)             | 95000             |
| 16  | N    | Overall Steering Gear Ratio                | 18                |

### 5.2 해석결과

차속이 100 km/h 인 경우 모든 설계변수 변동량을 ± 10%로 한 경우 조종안정성 성능지수들에 대한 상대민감도 해석결과가 표2와 같다. 표2에서 각 값의 글자가 진하면 초기설계에 대한 상대민감도가 크다.

[표 2] 상대민감도 해석결과

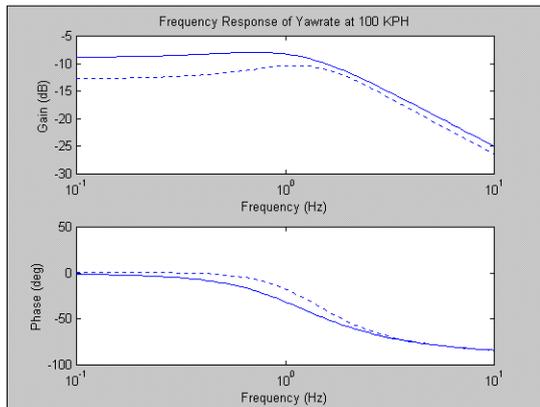
[Table 2] Relative Sensitivity Analysis Results

| No. | Design Param. | Stability Factor | Steering Sensitivity | Natural Frequency | Damping ratio | Phase Angle  |
|-----|---------------|------------------|----------------------|-------------------|---------------|--------------|
| 1   | M             | 1.02             | -0.57                | -0.21             | -0.18         | -0.58        |
| 2   | Iz            | 0.0              | 0.0                  | -0.50             | -0.10         | 1.46         |
| 3   | lf            | <b>-2.64</b>     | <b>0.98</b>          | <b>-0.30</b>      | <b>0.66</b>   | <b>0.59</b>  |
| 4   | lr            | <b>1.64</b>      | <b>-1.48</b>         | <b>1.03</b>       | <b>-0.20</b>  | <b>-2.52</b> |
| 5   | Cf            | <b>-2.06</b>     | <b>1.13</b>          | <b>-0.16</b>      | <b>0.46</b>   | <b>0.76</b>  |
| 6   | Cr            | <b>1.81</b>      | <b>-1.03</b>         | <b>1.09</b>       | <b>-0.36</b>  | <b>-2.18</b> |
| 7   | Df            | 0.0              | 0.0                  | 0.0               | 0.0           | 0.0          |
| 8   | Dr            | 0.0              | 0.0                  | 0.0               | 0.0           | 0.0          |
| 9   | Rf            | -0.05            | 0.03                 | 0.0               | 0.01          | 0.02         |
| 10  | Rr            | 0.26             | -0.15                | 0.16              | -0.05         | -0.32        |
| 11  | Ks            | -0.54            | 0.30                 | -0.04             | 0.12          | 0.20         |
| 12  | tc            | 0.46             | -0.26                | 0.04              | -0.11         | -0.17        |
| 13  | tpf           | 0.07             | -0.04                | 0.01              | -0.02         | -0.03        |
| 14  | h             | 0.24             | -0.13                | 0.17              | -0.04         | -0.33        |
| 15  | Kφ            | -0.24            | 0.13                 | -0.18             | 0.04          | 0.34         |
| 16  | N             | 0.0              | <b>-1.01</b>         | 0.0               | 0.0           | 0.0          |

해석결과로부터 다음과 같은 설계변수와 조종안정성과의 관계를 정성적뿐만 아니라 정량적으로 파악할 수 있었다. 일반적으로 조종안정성은 차량무게중심의 전후 위치 즉  $l_f, l_r$  및 전후타이어 코너링강성 즉  $C_f, C_r$ 에 크게 영향을 받는다. 또한 이들 설계변수의 전륜과 후륜에서의 변화는 조종안정성에 서로 반대로 영향을 미친다. 예를 들어  $l_f$ 의 증가(무게중심의 후방이동)나  $C_f$ 의 증가는 다음과 같은 성능지수의 변화를 가져온다.

- 1) Stability Factor의 감소 : 차량의 U/S특성의 약화로 안정성이 감소한다.
- 2) Steering Sensitivity 증가 : 작은 조향각으로 주어진 선회반경을 회전할 수 있다.
- 3) 고유진동수의 감소 : 빠른 조향조작에는 차량의 응답이 느려진다.
- 4) 감쇠비의 증가 : 급격한 조향 조작 시 차량응답의 오버슈트가 작게 발생한다.
- 5) 위상지연의 증가 : 조향입력에 대한 차량응답이 느려진다.

이상의 5가지 성능지수의 변화 중에서 2), 4)번은 조종안정성 향상에 유리한 것들이고 1), 3), 5)번은 불리한 것으로 된다. 그림2는  $l_f, C_f$ 를 증가시킨 경우와  $l_r, C_r$ 을 증가시킨 경우 조향입력에 대한 요각속도의 주파수응답 해석결과를 보이는데 이 그림에서 상기 5가지 검토내용이 잘 나타나 있는 것을 알 수 있다.



[그림 2] 조향입력에 대한 요레이트의 주파수응답 (실선:  $l_f, C_f$  증가, 점선:  $l_r, C_r$  증가)

[Fig. 2] Frequency Response of Yawrate to Steer Input (Solid line :  $l_f, C_f$  Increased, Dotted line :  $l_r, C_r$  Increased)

## 6. 결론

차량의 조종안정성에 관련된 설계변수와 성능지수의 관계를 파악하고자 민감도 해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 현가장치의 특성과 조향장치의 특성이 반영된 등가 코너링 강성을 사용한 조종안정성해석을 위한 차량 모델이 유도되었다.
2. 민감도 해석결과는 일반적인 설계변수와 조종안정성과의 관계를 정성적으로 뿐만 아니라 정량적으로 보여주었다.
3. 이 해석방법은 차량설계초기단계나 개발시험단계에서 차량의 조종안정성 개선을 위한 유효한 설계 파라메타의 선정 및 변화량을 결정하는데 유용하게 사용될 것으로 기대된다.

## References

- [1] P.G. Song, M. Spiriyagin and H.H. You., "Robust Design Optimization of the Vehicle Ride Comfort Considering Variation of the Design Parameters", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 12, pp. 1217-1223, 2008.
- [2] J.N. Lee and S. H. Park., "Sensitivity Analysis of Multibody System", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 14, No. 3, pp. 50-56, 1997.
- [3] Andrzej G. Nalecz, "Sensitivity analysis of vehicle design attributes in frequency domain", Vehicle System Dynamics, Vol. 17, pp. 141-163, 1988.
- [4] Andrzej G. Nalecz., "Application of sensitivity methods to analysis and synthesis of vehicle dynamic system", Vehicle System Dynamics, Vol. 18, No. 3, pp. 1-44, 1989.
- [5] D.N.L. Horton and D.A. Crolla., "Application of linear sensitivity methods to vehicle dynamics problems", Vehicle System Dynamics, Vol. 20, Supplement 1, pp. 269-283, 1992.
- [6] H. Sakai and Y. Satoh., "A theoretical study of vehicle behavior with complex cornering stiffness ", IPC-8 Proceedings Vol. 2, pp. 63-68, 1995.
- [7] J. Kim., "Analysis of handling performance based on simplified lateral vehicle dynamics", International Journal of Automotive Technology, Vol. 9, No. 6, pp. 687-693, 2008.

[8] The Math Works Inc., "Matlab Version 5.0 User Guide", Prentice Hall, 1997.

---

**이 창 노**(Chang-Ro Lee)

[정회원]



- 1993년 8월 : 연세대학교 공학대학원 기계공학전공 (공학석사)
- 2000년 2월 : 연세대학교 대학원 기계공학과 (공학박사)
- 1983년 3월 ~ 1988년 9월 : 현대자동차 기술연구소
- 1989년 10월 ~ 2000년 12월 : 쌍용자동차 기술연구소
- 2001년 3월 ~ 현재 : 우석대학교 기계자동차공학과 교수

<관심분야>

차량동역학, 차량제어, 기구동역학시뮬레이션