

전자파 수치 해석을 위해 갤러킨 기법과 보간법을 혼용하여 개선시킨 모멘트법

Improved Method of Moments Using Hybrid Technique of Galerkin's and Interpolation Methods for Numerical Analysis of Electromagnetic Waves

황 지 환 · 권 순 구 · 오 이 석

Ji-Hwan Hwang · Soon-Gu Kwon · Yisok Oh

요 약

본 논문에서는 3차원 공간의 전자파 수치 해석을 위한 모멘트법(method of moments)의 개선된 해석 기법을 선보인다. 전자파 산란 특성을 해석하기 위해 기본적으로 EFIE(Electric Field Integral Equation)와 RWG(Rao-Wilton-Glisson) 기저 함수를 이용하였으며, 계산 효율을 높이기 위해 기존의 갤러킨(Galerkin) 기법과 중심점 보간(interpolation)법을 혼용하여 해석 시간을 단축시켰다. 이때, 계산 정확도 유지를 위해 임피던스 행렬의 각 원소간 거리를 상대 거리 지수로 정의하여 보간법 적용이 가능한 먼 거리 원소를 구분하였다. 제안된 해석 기법의 성능 검증은 금속구의 Mie-series 해법을 이용한 이론적 RCS(Radar Cross Section)를 비교/분석하였다. 또한, 본 연구 결과를 삼면-/전방향- 전파반사기와 같은 산란체에 적용하여 레이더 후방 산란 특성을 분석하였다.

Abstract

An improved method of moments using a hybrid Galerkin-interpolation technique for numerical analysis of electromagnetic wave scattering in the 3-dimensional space is presented in this paper. Basically, the EFIE(electric field integral equation) and RWG(Rao-Wilton-Glisson) basis function are used to compute a property of electromagnetic wave scattering. We propose a hybrid technique combining the existing Galerkin's method with the interpolation method to improve the efficiency of the numerical computation. Then, an index of relative distance of each cells was defined to distinguish the relatively far elements, which interpolation method can be applied. To verify the performance of the proposed technique, the analytical Mie-series solution was used to compute the theoretical RCS of a conducting sphere for the purpose of comparison. We also applied this hybrid technique to various scatterers such as trihedral/omni-directional corner-reflectors to analyze the radar backscattering properties.

Key words : Method of Moments, RWG Basis Function, Galerkin Method, Interpolation Method

I. 서 론

입의 모양을 갖는 산란체(scatterer)의 전자파 산란 특성을 분석하기 위해 다양한 수치 해석 기법들

「본 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었음(No. 2011-0000087).」
홍익대학교 전자정보통신공학과(Department of Electronic Information and Communication Engineering, Hongik University)
· Manuscript received November 22, 2011 ; Revised January 9, 2012 ; Accepted January 11, 2012. (ID No. 20111122-148)
· Corresponding Author : Yisok Oh (e-mail : yisokoh@hongik.ac.kr)

이 이용된다. 특히, 원거리(far-zone)의 전자파 산란 및 방사 특성 분석을 위해 EFIE(Electric Field Integral Equation), MFIE(Magnetic Field Integral Equation), CFIE(Combined Field Integral Equation) 등의 적분방정식을 이용한 모멘트법(method of moments)이 일반적이며, 수치 해석을 위한 산란체의 재질과 해석 환경에 따라 적합한 적분방정식을 선택할 수 있다^{[1]-[3]}. 또한, 3차원 공간의 임의의 모양을 갖는 산란체의 전자파 응답 특성을 모멘트법으로 분석하기 위해서 산란체 표면 전류를 표현하기 위한 다양한 기저 함수를 적용할 수 있다. 예를 들어, 펄스 기저 함수는 사용범위가 넓고 표현이 간단한 장점이 있으나, 직각 좌표표를 이용한 임의의 구조 해석에 한계가 있는 반면, 최근 널리 사용되는 RWG(Rao-Wilton-Glisson) 기저 함수는 임의의 산란체 표현이 용이하여 최적의 표면 전류 계산이 가능하다^{[1],[2]}.

모멘트법 적용을 위해 유한한 요소로 표현되는 표면 전류는 기저 함수와 시험(testing) 함수에 의해서 점 정합(point-matching) 기법과 갤러킨(Galerkin) 기법에 의해 행렬식으로 나타낼 수 있으며, 임의의 산란체 해석을 위해 본 연구에는 RWG 기저 함수와 동일한 시험함수를 이용하는 갤러킨 기법을 적용하였다^{[4],[5]}. 이때, 산란체 표면을 구성하는 임의의 전원점(source point)과 관측점(observation point) 영역에 대한 수치 적분은 많은 계산 시간을 소모하게 된다.

본 연구에서는 임의의 금속 산란체의 전자파 산란 특성을 효율적으로 해석하기 위해서 EFIE와 RWG 기저 함수를 적용한 모멘트법의 임피던스 행렬[Z] 계산을 갤러킨 기법과 보간법을 혼용하여 계산 효율을 높이고 정확도를 유지시켰다^[6]. 이는, 임피던스 행렬의 대각원소(self-cells)와 인접한(adjacent cells) 원소에 전체 임피던스 행렬 원소 중 상대적으로 매우 큰 값이 집중되는 특성에 착안하여, 상대적으로 먼 거리의 행렬 원소의 수치 적분을 중심점 보간법으로 간소화시키는 방법을 선보인다. 이때, 정확도 분석을 위해 금속구를 이용한 bistatic RCS를 Mie-series 해법과 비교하였다^[7]. 또한, 본 논문에서 제안된 해석 기법을 이용한 다양한 전파반사기의 레이더 후방 산란 특성을 선보인다.

II. 모멘트법(Method of Moments)

EFIE 전계를 위해 식 (1)과 (2)는 3차원 공간 상에 위치한 임의의 금속 산란체의 표면 전계를 경계면 조건 $\hat{n} \times (\bar{E}^s + \bar{E}^i) = 0$ 을 적용해 나타낸 것이다^[1].

$$\bar{E}^s|_{\tan} = -\bar{E}^i|_{\tan} = -j\omega\bar{A} - \nabla\Phi|_{\tan} \quad (1)$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \bar{J}(\bar{r}') \frac{e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} dS' \quad (2a)$$

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \sigma(\bar{r}') \frac{e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} dS' \quad (2b)$$

식 (3)과 (4)는 RWG 기저 함수의 정의와 발산 특성을 나타낸 것이며, 식 (5)는 산란체 표면에 흐르는 전류 분포를 RWG 기저 함수를 이용한 미소 전류의 합으로 표현한 것이다^[1].

$$\bar{f}_n(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \bar{\rho}_n^+(\bar{r}), & \bar{r} \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \bar{\rho}_n^-(\bar{r}), & \bar{r} \in T_n^- \end{cases} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \bar{f}_n(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+}, & \bar{r} \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{A_n^-}, & \bar{r} \in T_n^- \end{cases} \quad (4)$$

$$\bar{J} \approx \sum_{n=1}^N a_n \bar{f}_n(\bar{r}') \quad (5)$$

이때, RWG 기저 함수는 삼각형으로 분할된 산란체의 표면 전류를 삼각형 쌍 구조의 내부 모서리를 수직으로 통과하는 벡터 성분으로 정의된다^{[1],[4]}.

$$\begin{aligned} & -\frac{j}{\omega\mu} \hat{t}(\bar{r}) \cdot \bar{E}^i(\bar{r}) d\bar{r} \\ & = \iint_{S'} \left[\left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \sum_{n=1}^N a_n \bar{f}_n(\bar{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] d\bar{r}' d\bar{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$

RWG 기저 함수로 표현된 표면 전류 식 (5)를 식 (1)에 대입하여 식 (6)과 같은 EFIE로 정리되며, 이는 다시 식 (7)과 같은 행렬식으로 표현될 수 있다. 임피던스[Z] 행렬과 입사파 [B] 행렬의 원소는 식 (8), (9)와 같이 정리될 수 있다^[4].

$$[B] = [Z][I] \quad (7)$$

$$z_{mn} = \iint_{\bar{f}_m} \iint_{\bar{f}_n} (c_{mn}) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\bar{r}' d\bar{r} \quad (8a)$$

$$c_{mn} = \bar{f}_m(\bar{r}) \cdot \bar{f}_n(\bar{r}') - \frac{1}{k^2} [\nabla \cdot \bar{f}_m(\bar{r})] [\nabla' \cdot \bar{f}_n(\bar{r}')] \quad (8b)$$

$$R = \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}$$

$$b_m = -\frac{j}{\omega\mu} \iint_{\bar{f}_m} \bar{f}_m(\bar{r}) \cdot \bar{E}^i(\bar{r}) d\bar{r} \quad (9)$$

III. Hybrid 기법

모멘트법은 표면 전류[I]를 얻기 위해서 앞서 정리된 행렬식을 이용해서 입사파[B] 행렬과 산란체 구조에 따른 임피던스[Z] 행렬의 각 원소를 계산하고, 임피던스 행렬의 역변환으로부터 표면 전류의 모든 원소를 계산하는 일련의 과정이다. 이때, 모멘트법의 최대 계산량은 표면 전류의 미지수 개수(n)에 의존적이며, 임피던스 행렬의 각 원소를 계산하기 위해 대부분의 시간이 소요된다. 이때, 대각원소에 큰 값이 집중되는 sparse matrix의 특성을 갖는 임피던스 행렬은 전원점과 관측점 간 거리가 일치(self-cell)하거나 인접(adjacent-cell) 할수록 EFIE의 행렬식 내부에 포함된 자유 공간의 3차원 Green 함수의 1/R (R→0)에 의해 계산 결과가 민감하게 반응한다. 따라서 특정 범위 내에서는 기존 갤러킨 기법을 적용한 수치 적분을 수행하고, 그 외의 영역에서는 중심점 보간법을 적용하여 계산 시간을 효율적으로 관리하게 된다.

이번 장에서는 RWG 기저 함수를 적용한 삼각형 요소(cell)의 수치적 적분법, R=0일 때 특이해(singularity)를 회피하는 방법, 1/R을 포함한 적분식의 해석적 적분법(analytic integration), 그리고 보간법을 이용해 계산 시간을 단축시킨 개선된 모멘트법에 대해 설명한다.

3-1 수치적 적분법(Numerical Integration)

임의의 삼각형 영역에 대한 수치 적분을 수행하기 위해서 simplex 좌표계를 이용한 좌표 변환을 적용한다. Simplex 좌표계는 적분 영역 내에 위치하는

임의의 점을 중심으로 분할되는 세 개의 삼각형 면적비와 세 개의 꼭짓점으로 임의의 위치를 표현하는 좌표계이다^[8]. 이는 α, β 로 표현되는 새로운 직각 좌표계로의 변환이 가능하며, 이 변환된 좌표계에서 수치적 적분법인 Gaussian quadrature를 수행할 수 있게 된다^[9]. 식 (10)은 직각좌표계로 표현된 적분식을 simplex 좌표계로 변환하는 식이며, A와 $J(\alpha, \beta)$ 는 각각 삼각형의 면적과 변수 치환을 위한 Jacobian이다. 식 (11)은 simplex 좌표계를 이용한 임의의 위치 벡터의 좌표변환식이 된다. 식 (12)는 simplex 좌표계를 이용한 Gaussian quadrature 수치 적분 방법이며, N은 적분 연산을 위한 점의 개수를 나타낸 것이다.

$$\iint_T f(\bar{r}) dS(\bar{r}) = \iint_{T'} f(\alpha, \beta) |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\alpha} f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (10)$$

$$\bar{r} = (1 - \alpha - \beta)\bar{v}_1 + \alpha\bar{v}_2 + \beta\bar{v}_3 \quad (11)$$

$$\iint_T f(\bar{r}) dS(\bar{r}) \approx A \sum_{i=1}^N \omega(\alpha_i, \beta_i) f(\alpha_i, \beta_i) \quad (12)$$

그림 1은 특정 삼각형 영역에 대한 식 (13)을 이용한 Green 함수의 수치 적분 결과를 나타낸 것으로 전원점(r_c)과 관측점(r_o)의 거리(R)가 가까워질수록 Green 함수의 적분 특성은 매우 불안정하게 발산하는 성질을 갖게 된다.

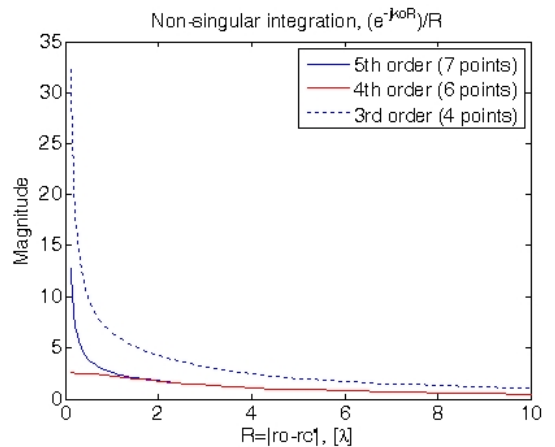


그림 1. Gaussian quadrature를 이용한 Green 함수의 수치 적분 특성

Fig. 1. Property of the numerical integration of Green's function using Gaussian quadrature.

$$\iint_{T'} G_0(\bar{r}, \bar{r}') d\bar{r}' = \iint_{T'} \frac{e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} d\bar{r}' \quad (13)$$

그림 2는 Gaussian quadrature와 simplex 좌표계를 이용한 수치 적분(---- quadrature)과 수식 적분(— equation) 결과를 비교한 것으로 XY-좌표 평면상의 삼각형 영역에 대해 RWG 기저 함수의 벡터 성분과 지수 함수 $(\bar{\rho}(\bar{r})e^{j\bar{s} \cdot \bar{r}})$ 식을 이용한 계산 결과이며, 적분 영역을 변화시켜 그 특성 변화를 분석한 것이다. 적분을 위한 계산 영역은 원점을 꼭지점으로 하는 정삼각형을 이용하였으며, 각 변의 길이를 0.1 λ_0 에서 3 λ_0 까지 변화시켰다. 이때, 길이 변화 1 λ_0 이내의 범위에서 수치 적분과 수식 적분 결과가 일치함을 알 수 있다. 또한, 모멘트법 적용 시 수치 적분의 유효 범위를 고려해 산란체 표면의 삼각형 요소 분할은 최대 1 λ_0 이내여야 하며, 일반적으로 0.1 λ_0 이내의 분할을 추천한다. Gaussian quadrature의 차수는 계산 정확도와 소요 시간에 영향을 준다. 그림 2의 수치 적분 결과는 7점(5차식) 규칙을 이용한 것이며, 갤러킨 기법 적용 시 이중적분을 위해 전원점과 관측점에서 각각 동일한 연산이 이루어져 총 7×7=49점에 해당하는 연산이 이루어진다.

3-2 특이해 회피법(Singularity Extraction)

특정 모서리의 표면 전류를 계산하기 위해서 삼각형 요소 쌍에 대한 적분계산을 수행할 때, 전원점

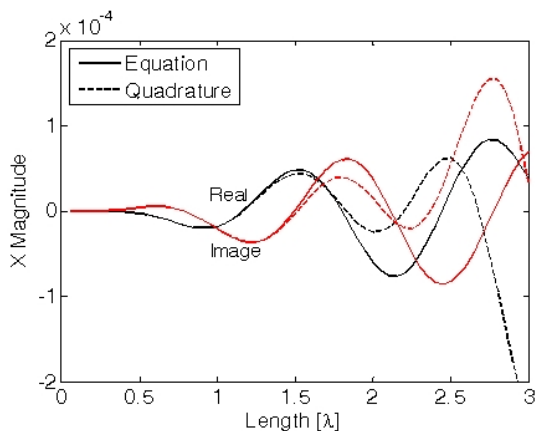


그림 2. 적분 영역 변화에 따른 수치 적분과 수식 적분 계산 결과 비교

Fig. 2. Comparison of quadrature and equation results to changes in the integral region.

과 관측점이 동일한 경우(self-term, $R=0$)에 대한 특이해 회피를 위해 여러 해석적 적분법 등을 이용해야 한다^{[10],[11]}. 3차원 자유 공간의 Green 함수의 $(1/R)$ 요소는 R 값이 작을수록 발산하는 특성을 갖게 되어, 이를 안정화시키는 특별한 기법이 필요하게 된다. 그 중 가장 보편적인 방법으로 Cauchy principal value와 L'hospital의 정리를 이용해 간략화된 식 (14)와 (15)를 이용한다^[10].

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \left[\frac{e^{-jkR}}{R} - \frac{1}{R} \right] + \frac{1}{R} \quad (14)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-jkR}}{R} - \frac{1}{R} \right] = -jk \quad (15)$$

식 (14)의 오른쪽 첫 번째 항은 $R=0$ 인 경우 식 (15)와 같은 특성을 보이며, 또한 R 이 '0'에 근접한 경우에도 Gaussian quadrature 수치 적분이 가능하게 된다. 따라서 두 번째 항인 $(1/R)$ 에 대한 적분을 해석적 방법을 이용하여 계산하게 된다.

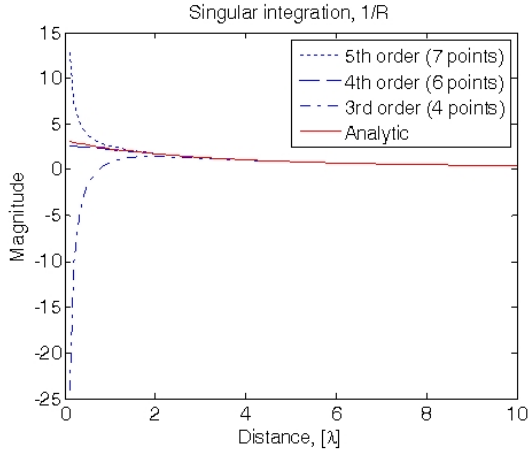
$$I_1 = \iint_T \rho_m^\pm(\bar{r}) \cdot \iint_{T'} \rho_n^\pm(\bar{r}') \frac{1}{R(\bar{r}, \bar{r}')} d\bar{r}' d\bar{r} \quad (16)$$

$$I_2 = \iint_T \iint_{T'} \frac{1}{R(\bar{r}, \bar{r}')} d\bar{r}' d\bar{r} \quad (17)$$

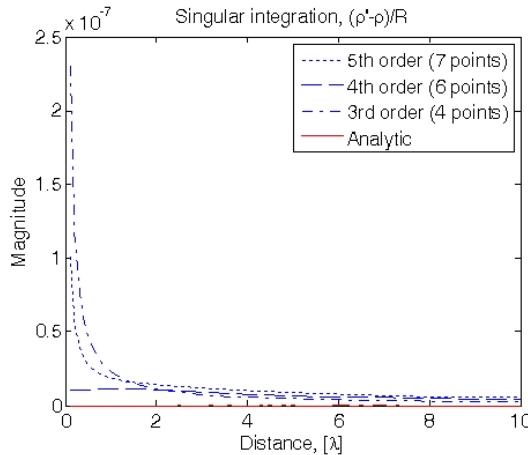
식 (16)과 (17)은 EFIE로부터 $(1/R)$ 에 대한 적분항만으로 분리하여 정리한 적분식이며, 이때 갤러킨 기법이 적용된 적분항 I_1 과 I_2 로 표현될 수 있다.

식 (16)과 (17)의 적분항은 참고문헌 [10]의 해석적 적분 기법에 의해 계산이 가능하며, 갤러킨 기법을 적용하기 위해서 전원점과 더불어 관측점 영역에 대한 적분을 Gaussian quadrature를 이용한 수치 적분 방법으로 계산이 가능해진다. 이때, $(1/R)$ 항을 계산하기 위한 해석적 적분 기법과 수치적 적분 기법의 연산시간이 긴 단점이 있다. 또한, $R=0$ 인 경우와 인접한 거리의 적분식 연산은 전체 모멘트법의 계산 정확도와 밀접한 관련이 있으며, 전체 계산 시간의 많은 부분을 소모하게 된다. 이에 대한 개선 방법으로 계산 영역 간 거리(R)가 상대적으로 먼 영역에 대해 보간법을 적용해 수치 적분의 계산량을 효율적으로 관리하고 전체 계산 효율을 높이는 방법을 선택하였다.

3-3 보간법(Interpolation Method)



(a) 1/R 적분식 계산 결과
(a) Integration results of 1/R



(b) (ρ' - ρ)/R 적분식 계산 결과
(b) Integration results of (ρ' - ρ)/R

그림 3. 특이해 근처에서 해석적 적분법의 적분 특성
Fig. 3. Properties of analytic integration at singular points.

적분을 위한 전원점과 관측점이 적분 영역에 비해 상대적으로 먼 거리(R)에 위치한 경우, 일반적으로 보간법을 이용한 방법으로 적분식 계산을 간소화할 수 있다. 이를 위해 일반적으로 중심점간 거리와 삼각형 면적을 이용하는 중심점 보간법(center-point interpolation method)이 이용된다^[6]. 또한, 근거리 경우 또는 $R=0$ 인 경우 발생하는 특이해를 회피하기 위해 9점 보간법(9-point interpolation method)^[12] 등이 사용될 수 있으나, 본 연구에서는 인접 영역의 적분 계산을 갤러킨 기법을 이용한 이중 적분을 수행하여 계산 정확도를 최대한 유지하고, 상대적으로 먼 거리

(R)의 계산만을 중심점 보간법을 적용함으로써 적분 연산 오차와 소요 시간을 최소화 하였다. 식 (18)과 (19)는 각각 중심점 보간법과 9점 보간법을 이용한 적분법을 나타낸 것이다.

$$\int_{T_m} g(\bar{r}) = A_m g(\bar{r}_m^c) \quad (18)$$

$$\int_{T_m} g(\bar{r}) = \frac{A_m}{9} \sum_{k=1}^9 g(\bar{r}_k^c) \quad (19)$$

중심점 보간법은 계산 영역 간 거리(R)가 상대적으로 먼 경우에 적용될 수 있으며, 일반적으로 모멘트법 적용을 위해 사용되는 삼각형 요소의 한 변의 길이가 $0.1 \lambda_0$ 정도인 것을 고려할 때 적분식의 계산 결과는 임피던스 $[Z]$ 행렬의 대각 원소에 비해 매우 작은 값을 갖게 되고, 전체 계산 결과에 매우 적은 영향을 미치게 된다. 이때, 본 연구의 핵심 요소인 갤러킨 기법과 중심점 보간법의 혼용은 계산 영역 간 거리를 지수화시킨 상대 거리 지수(R_{adj_cmd})에 의해 그 정확도를 유지시킬 수 있다.

3-4 Hybrid 알고리즘

본 논문에서 RWG 기저 함수를 이용한 모멘트법은 행렬식의 각 원소를 구성하기 위해서 임피던스 $[Z]$ 행렬과 입사파 $[B]$ 행렬 원소를 동일한 기저 함수를 이용하여 계산하는 갤러킨 기법을 적용하였다. 임의의 삼각형 요소로 나뉜 산란체 표면은 경계면 모서리(boundary edge)를 제외한 각 삼각형 요소의 내부 모서리(interior edge)에 대해 앞선 수치적/해석적 적분법을 적용할 수 있다^{[11],[9],[10]}. 이때, 임피던스 $[Z]$ 행렬 원소를 계산하기 위해 전원점과 관측점 영역이 일치하거나 인접한 경우에는 반드시 수치적/해석적 적분 기법을 모두 적용해야 하며, 상대적으로 먼 거리의 경우에는 중심점 보간법을 두 영역 모두에 적용한다.

$$R_{adj_cmd} = \frac{|r_s^{\pm} - r_o^{\pm}|}{L_s + L_o}, \quad (0 \leq R_{adj_cmd})$$

$$L_s = \max\left\{\left|v_1^s - r_s^{c\pm}\right|, \left|v_2^s - r_s^{c\pm}\right|, \left|v_3^s - r_s^{c\pm}\right|\right\}$$

$$L_o = \max\left\{\left|v_1^o - r_o^{c\pm}\right|, \left|v_2^o - r_o^{c\pm}\right|, \left|v_3^o - r_o^{c\pm}\right|\right\} \quad (20)$$

($a > b > c$)일 때, $\max\{a, b, c\} = a$ 이다.

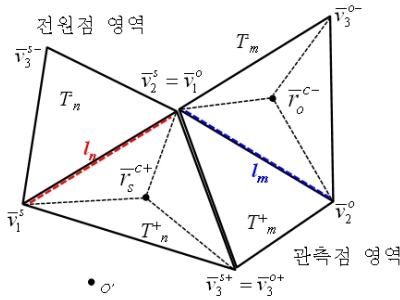


그림 4. 상대거리 지수(R_{adj_cond})를 위한 삼각형 쌍 기하 구조

Fig. 4. Geometry of triangle pairs to represent the index of relative distance(R_{adj_cond}).

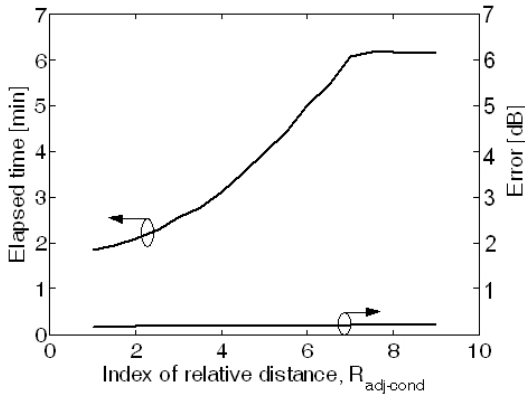


그림 5. 상대거리 지수(R_{adj_cond})의 유효 범위
Fig. 5. Effective range of index of relative distance.

그림 4와 식 (20)은 행렬 원소의 위치(m, n)에 따른 전원점과 관측점 영역 간의 상대거리를 지수화시킨 것으로 적분식 계산이 이루어지는 각 삼각형 요소 간 중심점의 거리와 중심점과 꼭짓점 간의 최장거리의 비를 나타낸 것이다. 예로 상대 거리 지수 (R_{adj_cond}) 1은 두 계산 영역이 인접할 최대거리를 의미한다.

그림 5는 금속구를 이용한 상대거리 지수의 유효 범위를 확인한 것으로 7이상의 상대거리에서 계산 소요 시간이 모든 원소에 대해 수치 해석 기법을 적용하는 기존 모멘트법에 근접해지며, 상대거리 지수가 1 이상인 모든 구간에서의 오차는 0.2 dB 수준을 유지함을 알 수 있다. 상대거리 지수의 유효성 검사 방법은 4장 제안된 모멘트법의 정확도 검증에서 상세히 설명된다.

그림 6은 본 논문에서 제시한 개선된 모멘트법의

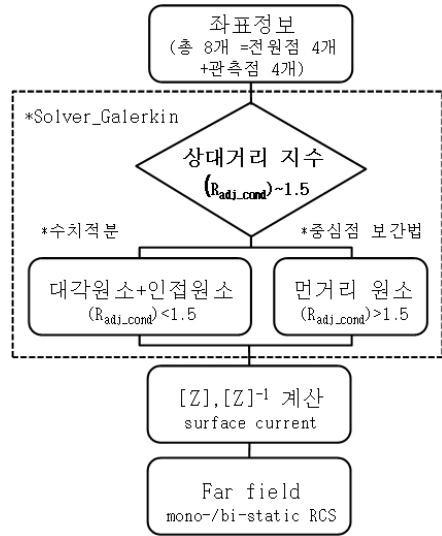


그림 6. 제안된 hybrid 기법 계산 알고리즘
Fig. 6. Algorithm of the proposed hybrid technique.

알고리즘을 도식화한 것으로 임피던스[Z] 행렬 계산 시 상대 거리 지수(R_{adj_cond})를 이용해 갤러킨 기법의 이중 적분이 필요한 영역과 보간법 적용 위치를 결정하며, 이때, 상대 거리 지수는 1이상의 값으로 설정하여 인접 영역이 보간법에 의해 계산되어지는 경우를 방지할 수 있다.

IV. 제안된 모멘트법의 정확도 검증

갤러킨 기법과 중심점 보간법을 이용한 개선된 모멘트법의 정확도 분석을 위해서 금속구의 이론적 bistatic RCS와 비교/분석할 수 있다. 식 (21)은 금속구의 이론적 특성을 표현한 Mie-series 해법이다. 여기서, P_n^1 은 'associated Legendre' 함수이며, B_n 식의 '(prime)은 'ka'에 대한 미분치를 의미한다^[7].

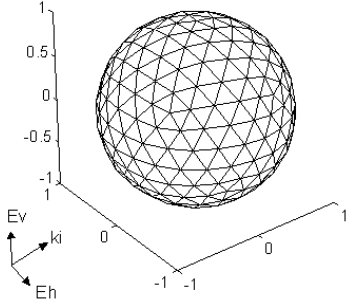
$$\vec{E}^s(\theta, \phi) = \frac{e^{jkr}}{kr} [\cos\phi \cdot S_1(\theta) \hat{\theta} - \sin\phi \cdot S_2(\theta) \hat{\phi}] \quad (21a)$$

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^{n+1} \left[A_n \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + jB_n \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos\theta) \right]$$

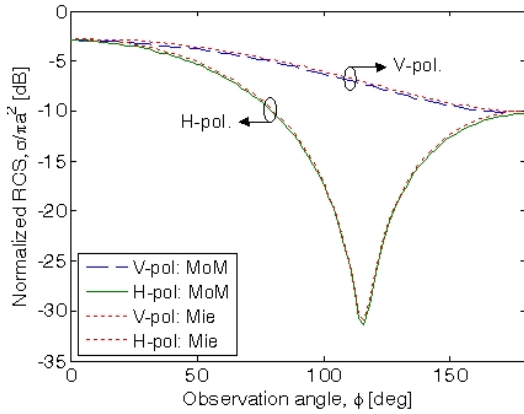
$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^{n+1} \left[A_n \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos\theta) + jB_n \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right]$$

$$A_n = -(-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}$$

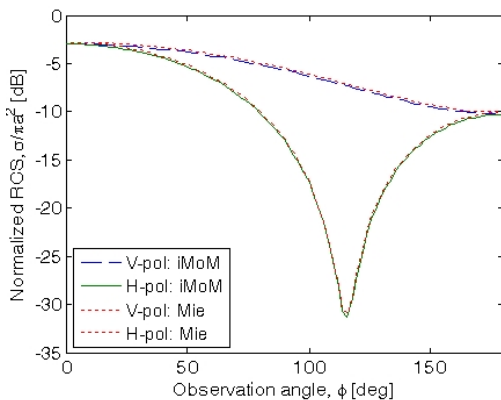
$$B_n = (-j)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{[ka j_n(ka)]'}{[ka h_n^{(1)}(ka)]'} \quad (21b)$$



(a) RWG 기저 함수를 이용한 삼각형 분할
(a) Grid generation using RWG basis function



(b) 기존 모멘트법
(b) Existing 'method of moments'



(c) 제안된 모멘트법
(c) Proposed 'method of moments'

그림 7. 제안된 모멘트법의 정확도 검증
Fig. 7. Verification of the proposed method.

표 1. 제안된 모멘트법의 수치 해석 결과 비교
Table 1. Comparison result of the proposed MoM.

해석 방법	금속구		Size of [Z]
	오차(dB)	소요 시간	
기존 모멘트법 (갤러킨 기법)	0.24/0.25	7분 55초	750×750
개선된 모멘트법 (갤러킨+보간법)	0.19/0.21	3분 20초	
비 고	계산 시간 약 50 % 단축		

그림 7(a)는 RWG 기저 함수를 적용하기 위해 삼각형 요소로 분할된 금속구를 나타낸 것이다. 그림 7(b)와 (c)는 이론값과 모멘트법을 이용해 $ka=0.5$ 인 금속구의 bistatic RCS 계산 결과이며, 각각 기존 방법(MoM)과 제안된 모멘트법(iMoM)의 결과를 비교한 것이다. 수치 해석을 위한 중심 주파수(f_0)는 10 GHz이며, 산란체 표면의 모서리는 750개이다. 이때, 금속구는 12개의 기준점을 이용한 정삼각형 분할 방법을 이용하였다^[13]. 또한, 모멘트법의 행렬식으로부터 임피던스[Z] 행렬의 역행렬을 계산하기 위해 BiCG-Stab(Biconjugate gradient stabilized)기법을 활용한 반복법(iterative method)을 이용하였다^[4].

Mie-series 해법과 모멘트법을 이용한 해석 정확도 분석을 위해 식 (22)를 이용하였으며, 식 (22)는 일반적으로 두 개의 데이터 열의 오차를 분석하기 위해 사용되는 'norm of residuals'의 rms(root-mean-square) 값을 표현한 것이다.

$$\text{오차} = \frac{\text{norm} \parallel \sigma_{\text{theory}} - \sigma_{\text{MoM}} \parallel}{\sqrt{\text{입력 데이터 수}}} \quad (22)$$

그림 7(b)과 (c)의 계산 결과와 식 (22)를 이용한 오차 분석 결과는 기존 방법과 제안된 방법에서 각각 0.24 dB(수직 편파)/0.25 dB(수평 편파)와 0.19 dB/0.21 dB의 오차를 보였다.

V. 수치 해석 응용 및 결과

앞서 검증된 개선된 모멘트법을 이용하여 삼면/전방향 전파반사기의 monostatic RCS 특성을 분석하였다. 삼면 전파반사기의 크기는 직각변 길이(l)가 $4\lambda_0$ 이며, 계산된 내부 모서리 개수는 총 1,770개이다. 전방향 전파반사기는 길이(l) $1\lambda_0$ 인 삼면 전파

반사기 20개와 정20면체 기하 구조로 이루어진 배열로써 내부 모서리는 총 3,060개이다. 삼면-/전방향-전파반사기의 monostatic RCS 특성 분석을 위한 기준 데이터로 PO(Physical Optics) 근사식과 상용 소프트웨어(HFSS: High Frequency Structure Simulator)를 이용하였으며, 식 (23)은 삼면 전파반사기를 위한 PO 근사식이다^[7].

$$\sigma(\theta, \phi) \approx \frac{4\pi}{\lambda_0^2} l^4 \left[\cos\theta + \sin\theta(\sin\phi + \cos\phi) - 2\{\cos\theta + \sin\theta(\sin\phi + \cos\phi)\}^{-1} \right]^2 \quad (23)$$

그림 8(a)~(c)는 삼면전파반사기의 크기(4 λ₀)가 비교적 PO 근사식에 근접한 특성을 보인다. 이때, 일반적으로 10 λ₀ 이상의 상대적으로 큰 전파반사기 분석에는 PO 근사화가 적합할 수 있으나, 이보다 작은 산란체의 다중 반사에 의한 복잡도가 높은 산

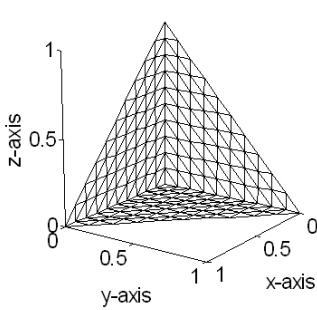
표 2. 계산 소요 시간 비교

Table 2. Comparison of elapsed time.

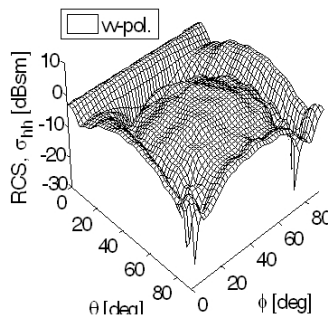
산란체	소요 시간		Size of [Z]
	개선된 모멘트법	기존 모멘트법	
삼면 전파반사기	35분 20초	1시간 9분	1,770×1,770
전방향 전파반사기	1시간 7분	2시간 31분	3,060×3,060
비 고	소요 시간: 2차원 RCS 패턴 계산 기준		

란 특성을 근사화 없이 계산하기 위해 본 연구의 모멘트법이 활용 가능하다.

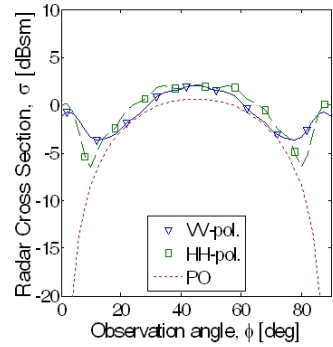
그림 8(d)~(f)의 전방향 전파반사기는 FEM(Finite Element Method) 알고리즘을 이용한 상용 소프트웨어와 비교하여 일치하는 결과를 보였으며, 각 피크에서 0.6 dB 이내의 오차를 나타낸다. 이때, 해석 시



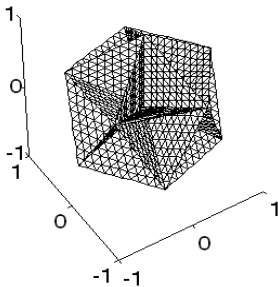
(a) 삼면 전파반사기
(a) Trihedral corner reflector



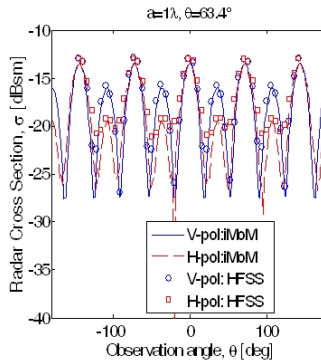
(b) 3차원 RCS(θ, φ) 패턴
(b) 3 dimensional RCS pattern



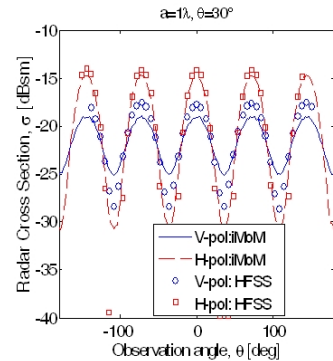
(c) φ-방향 RCS 패턴
(c) RCS pattern in φ-direction



(d) 전방향 전파반사기
(d) Omni-directional corner reflector



(e) 입사각 θ=63.4°
(e) Incidence angle of θ=63.4°



(f) 입사각 θ=30°
(f) Incidence angle of θ=30°

그림 8. 삼면-/전방향- 전파반사기 계산 결과

Fig. 8. Computational results of trihedral- and omni-directional corner reflectors.

간은 연구에 적용된 PC(CPU 3.4 GHz, RAM 3GB) 성능에 의존적이다.

VI. 결 론

본 논문에서는 갤러킨 기법과 중심점 보간법을 이용한 개선된 모멘트법을 선보였다. 수치 해석 결과에 많은 영향을 주는 임피던스[Z] 행렬의 대각원소를 중심으로 근사화를 최소화한 수치적/해석적 적분 기법을 적용하여 계산 정확도를 유지하였으며, 나머지 원소를 계산하기 위해 중심점 보간법을 응용한 적분 기법을 접목시켜 적분식 연산을 위한 계산 소요 시간을 단축시켰다. 개선된 모멘트법의 수치 해석 정확도는 Mie-series 해법과 비교/분석하였으며, 그 정확도는 약 0.2 dB 이내의 오차 범위에서 정확히 일치하였다. 또한, 다양한 응용 분야의 활용을 위해서 삼면-/전방향-전파반사기의 RCS를 분석하였으며, 본 연구의 개선된 모멘트법은 원격 탐사 분야 등의 폭넓은 활용을 위해 현재 연구 중인 이미지 이론과 임피던스 평면(Impedance surface) 이론을 접목한 지표면 반사 특성을 고려한 산란체의 레이더 후방 산란 특성 분석을 위한 연구에도 활용될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 30, pp. 409-418, May 1982.
- [2] Yisok Oh, Young-Mi Jang, and K. Sarabandi, "Full-wave analysis of microwave scattering from short vegetation: an investigation on the effect of multiple scattering", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 40, no. 11, pp. 2522-2526, Nov. 2002.
- [3] K. Umashankar, A. Taflove, and S. Rao, "Electromagnetic scattering by arbitrary shaped three-dimensional homogeneous lossy dielectric objects", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, no. 6, pp. 758-766, Jun. 1986.
- [4] Walton C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman & Hall/CRC, pp. 161-207, 2008.
- [5] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, pp. 670-732, 1989.
- [6] Sergey N. Makarov, *Antenna and EM Modeling with MATLAB*, Wiley, pp. 11-37, 2002.
- [7] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, and C. K. Krichbaum, *Radar Cross Section Handbook*, Plenum press, pp. 141-159, 1970.
- [8] P. C. Hammer, O. J. Marlowe, and A. H. Stroud, "Numerical integration over simplexes and cones", *Math. Tabl. Nat. Res. Coun. Wash.*, pp. 130-137, 1956.
- [9] John L. Volakis, "Quadrature rules for numerical integration over triangles and tetrahedra", *IEEE Antennas Propagat. Magazine*, vol. 38, pp. 100-102, Jun 1996.
- [10] D. Wilton, S. Rao, A. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak, and C. M. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domain", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-32, no. 3, pp. 276-281, Mar. 1984.
- [11] T. F. Eibert, V. Hansen, "On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, no. 12, pp. 1499-1502, Dec. 1995.
- [12] Yakov Kamen, Leon Shirman, "Triangle rendering using adaptive subdivision", *IEEE Computer Graphics and Applications*, pp. 95-103, Mar./ Apr. 1998.
- [13] Pascal Jean Frey, *Paul-Louis George, Mesh Generation*, Wiley, pp. 45-94, 2008.

황 지 환



2001년 2월: 홍익대학교 전파공학과 (공학사)
2003년 2월: 홍익대학교 전파통신공학과 (공학석사)
2003년 4월~2006년 5월: LG전자 단말연구소 연구원
2009년 3월~현재: 홍익대학교 전

자정보통신공학과 박사과정
[주 관심분야] 전파 산란, 마이크로파 원격탐사, SAR

오 이 석



1982년 2월: 연세대학교 전기공학과 (공학사)
1988년 12월: University of Missouri-Rolla, 전기 및 컴퓨터공학과 (공학석사)
1993년 12월: University of Michigan, Ann Arbor, 전기공학 및 컴퓨

터과학과 (공학박사)
1997년~2001년: 대한원격탐사학회 상임이사
2001년~2008년: 한국전자과학회 상임이사
2006년~2008년: Chair, IEEE GRS Korea Chapter
2009년~2010년: Stanford University 방문교수
1994년~현재: 홍익대학교 전자전기공학부 교수
2009년~현재: IEEE Fellow
[주 관심분야] 전파 산란, 마이크로파 원격탐사, 레이더, 안테나

권 순 구



2007년 2월: 홍익대학교 전자전기공학부 (공학사)
2009년 2월: 홍익대학교 전자정보통신공학과 (공학석사)
2009년 3월~현재: 홍익대학교 전자정보통신공학과 박사과정

[주 관심분야] 전파 산란, 마이크로파 원격탐사, SAR 영상분석