《연구논문》 Korean Journal of Optics and Photonics, Volume 23, Number 2, April 2012

DOI: http://dx.doi.org/10.3807/KJOP.2012.23.2.077

연속적 라비 진동과 불연속적 양자도약의 양립성

조영탁[1†] · 김기식[2]

[1]광주대학교 보건의료공학과
㉾ 503-703 광주광역시 남구 효덕로 52번지

[2]인하대학교 물리학과
㉾ 402-751 인천광역시 남구 인하로 100번지

(2012년 2월 24일 받음, 2012년 4월 3일 수정본 받음, 2012년 4월 4일 게재 확정)

양자물리학적 패러다임이 발견된 이래, 라비(Rabi) 진동과 같은 전자(electron)의 에너지 준위 간 연속적인 천이(transition)와 보어(Bohr) 모형으로 대표되는 불연속적 양자 도약(quantum jump)의 상충성(incompatibility)은 현재까지도 서로 자연스럽게 연결하기가 어려운 오랜 개념적 어려움으로 남아 있다. 본 연구에서는 그러나, 빛과 물질의 상호작용을 기술하는 현대적 이론 중의 하나인 양자궤적이론(quantum trajectory theory)의 관점에서 단일 모드 공진기 장(single mode cavity field)과 상호작용하는 단일 원자의 행동을 관찰한 바, 원자-장 간 상호작용의 강도(strength)가 줄어듦에 따라서 원자의 행동이 연속적 라비 진동으로부터 불연속적 양자도약의 양상으로 점진적으로 변화하여 가는 과정을 발견하고, 이 단순하면서도 흥미로운 현상에 대하여 보고한다.

Compatibility of Continuous Rabi Oscillation and Discontinuous Quantum Jumps

Young-Tak Chough[1†] and Kisik Kim[2]

[1]Department of Healthcare & Medical Technology, Gwangju University, Gwangju 503-703, Korea
[2]Department of Physics, Inha University, Incheon 402-751, Korea

(Received February 24, 2012; Revised manuscript April 3, 2012; Accepted April 4, 2012)

The connection between the continuousness of Rabi oscillation and the discontinuity of quantum jumps has long remained one of the conceptual difficulties since the discovery of the quantum physical paradigm. In this study, however, we demonstrate that the behavior of the atom-field composite system gradually changes from the continuous Rabi interaction to the discontinuous quantum jumps as the atom-field coupling strength is reduced. The reduction occurs through enlarging the quantization volume of the mode so that the mode approaches one of the infinitely many modes of the thermal background.

Keywords: Rabi oscillation, Quantum jumps, Quantum trajectory, BKS proposal, Strong coupling
OCIS codes: (270.0270) Quantum optics; (270.2500) Fluctuations, relaxations, and noise; (000.1600) Classical and quantum physics; (030.5260) Photon counting; (030.1640) Coherence

I. 서 론

양자도약(quantum jump)이라는 개념은 보어(Bohr)의 원자 모형[1]에 의하여 처음으로 물리학에 들어오게 되었고, 이후 광전효과(photoelectric effect)에서의 아인슈타인의 광량자 모형 및 현대 레이저 이론의 원형이 되는 이른바 "아인슈타인-AB 이론"에서 준정량적(semi-quantitative) 형태를 갖추게 된다[2]. 그러나 이 개념은 사실 처음부터, 전자기파로서의 빛의 연속적 구조는 물론, 물리계의 연속적 시간진화에 관한 오랜 인식과는 편차가 있는 것이다. (또한 이것이 바로 보어 모형이 "혁신적"으로 인식되었던 이유 중의 하나이기도 하다.) 슈뢰딩거 방정식의 출현으로 이 개념적 어려움이 수학적 형식주의(mathematical formalism) 상으로는 좀 완화되기는 했지만, 아직도 인식론적 어려움은 여전히 남아있는 것이 사실이다.

양자광학에서 발견된 몬티-카알로 파동함수(Monte-Carlo wave-function)[3, 4] 혹은 양자궤적이론(quantum trajectory theory)[5]의 방법들은 아인슈타인-AB 이론과 유사한 방법으로 계의

†E-mail: tak@gwangju.ac.kr

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

무작위 시간진화(stochastic time evolution)의 한 성분으로 양자도약을 노골적으로 사용한다. 다만 한 가지 새로운 것은, 아인슈타인의 양자도약에 관한 규칙을 도약과 도약 사이의 연속적 진화, 즉, 정상상태(stationary states)들의 중첩과 관련한 동력학적 과정과 적절하게 통합시켰다는 사실뿐이다. 이 점에서, 이 방법들은 계의 정상상태 사이의 불연속적 도약과, 이들 도약 사이의 진화과정, 즉, 정연한 진폭(coherent amplitudes)을 가진 물질 진동자들이 행동하게 되는 시간 동안의 연속적인 시간적 진화를 통합하려 하였던 이른바 "보어, 크레이머즈(Kramers) 및 슬레이터(Slater)의 제안" 혹은 간단히 "BKS proposal"로 불리는 일종의 "연구계획안"과 놀랍도록 유사한 점을 보이게 된다[6, 7].

그런데, 이들 현대적 이론에서는, 이 불연속적 양자도약을 단순히 광검출기에서의 광검출 사건, 즉, 시간적으로 분해된 광자수의 기록(time-resolved photon count record)로 해석하고 있다[5, 8]. 이 시나리오는, 가시광의 영역에서는 산란된 광자들이 근본적으로 진공상태의 배경에서 검출될 수 있기 때문에 충분히 설득력이 있다. 그러나 이 "측정에 기반을 둔 해석"의 문제점은 열복사장과 상호작용하는 원자의 경우에서 드러난다. 이 상황에서는 부정연한 광자(incoherent photon)들이 방출만 되는 것이 아니라 흡수도 되는 것이다. 더욱 심각한 것은 산란 광자들이 배경에 있는 다른 광자들과 구별이 안 된다는 점이다. 물론 열복사장의 양자도약을 감시할 수 있는 "전자-치받기(electron shelving)"와 같은 방법이 있다[9-12]. 그러나 이것들은 다른 입출력과의 강결합을 이용한 "침입적 측정(intrusive measurement)"을 하므로 가시광의 상황과 같은 해석이 곤란하다는 것은 잘 알려진 사실이다.

이 논문에서는, 이런 관점에서, 열복사 배경과 광자를 주고받는 원자가 실제로 어떤 "잘 정의된 방법"으로 양자도약을 행한다는 해석에다 단순한 주장을 넘어선 어떤 근거를 주기 위하여, 비교적 최근에 개발된 이른바 "양자궤적이론"의 관점에서 접근하고자 하는 것이다. 양자역학은 사실, 양자도약의 개념과는 반대로 슈뢰딩거 방정식에 의한 진화를 통하여 끊임없이 상호작용하는 두 개의 물리계를 얽히게(entangle)한다[13-17]. 이 연구에서는 이 점에 착안하여, 열복사장의 많은 모드(mode) 중의 하나를 선택하고, 이 선택된 모드가 그와 같이 원자와 얽힘(entanglement)을 일으키도록 상호작용시킨다[18]. 그런 후, 총체적으로 열저수지로 취급되는 나머지 모든 모드들이 아인슈타인-AB 이론에서의 규칙을 따라 원자 상태 간의 도약을 유도한다고 가정할 때, 그 단일 모드가 실제로 광자수의 기대치에 있어서 양자도약을 행한다는 것을 보일 것이다. 즉, 강결합[18]에서 연속적인 진화를 보이던 원자의 (혹은 그 선택된 모드의) 행동은 결합이 약해짐에 양자도약적 행동으로 나타난다는 것을 보일 것이다. 다시 말하면, 열저수지 전체에 의하여 유도되는 양자도약을 가정한 것이, 표준 상호작용 해밀토니안과 슈뢰딩거 진화를 따라 원자와 얽히도록 허락된 그 선택된 모드가 양자도약을 하게 되는 것으로 연결이 되는 것이다. 이 양자도약은 그 개별 모드가 광자수에 있어서 보즈-아인슈타인 분포(Bose-Einstein distribution)를 따르고, 또 모든 모드를 이와 같이 개별적으로 보았을 때, 각 모드의 도약률을 합하면 아인슈타인-AB 이론과 상응하는 원자의 원래의 순도약률(net jump rate)이 되는 것을 볼 수 있다.

이 논문의 근저에 있는 주제는 연속적 및 불연속적 양자진화의 개념적 충돌과, 약결합 극한에 있어서의 그 일관성에 관한 것이다. 제II장에서는 그러므로 아인슈타인의 양자도약 모형 및 이른바 BKS의 제안의 요지를 살펴보고, 현대의 양자궤적이론은 어떠한 취지인가를 논한다. 제III장에서는 이 논문의 주된 논지, 즉, 연속적인 라비 진동이 불연속적인 양자도약으로 점진적으로 변화되어 나아가는 과정을 시연하고, 여기서 열복사장의 도약적 궤적에 있어서의 자기일관성(self-consistency)이 어떻게 출현하는가를 상세히 묘사한다. 마지막으로 제IV장에서 전체를 요약한다.

II. 아인슈타인-AB 이론, 보어-크레이머즈-슬레이터의 제안 및 양자궤적이론

2.1. 아인슈타인-AB 이론

그림 1과 같이, 온도 T의 플랑크 복사장(Planck radiation)과 열평형 상태에서 있는 2-준위 원자(two-state atom)를 고려하자. 아인슈타인-AB 이론에서는 원자가 그 두 정상상태 사이를 무작위로 뛰어다님에 따라 광자들이 원자와 복사장 사이에서 방출 또는 흡수되게 된다. 그 도약의 발생률은 아인슈타인-AB 이론에 따르면,

$$\Gamma_{\text{down}} = A(\bar{n}+1) \tag{1a}$$

$$\Gamma_{\text{up}} = A\bar{n} \tag{1b}$$

으로 주어진다. 여기서 $\bar{n}$는 원자의 공진주파수 ω_A에 해당하는 열배경의 평균광자수이며,

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_A/k_BT}-1} \tag{2}$$

로 주어진다[19].

이 아인슈타인의 이론은 원자의 정상상태 점유확률(occupation probability)에 관한 비율방정식(rate equation)의 수준에서 논

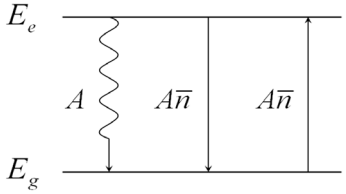

FIG. 1. The model of thermal quantum jumps in the Einstein-AB theory. The jump rates Γ_{up} and Γ_{down} are given by Eqs. (1a) and (1b).

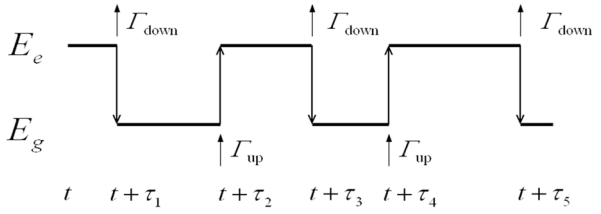

FIG. 2. The stochastic evolution process in the Einstein model, the record of which is Eq. (3).

의된다. 다시 말해 식 (1a) 및 (1b)의 무작위 과정에 따라, 양자도약의 (위나 아래의) 종류와 발생시점에 관한 기록을, 예컨대 다음과 같이 만들 수 있다.

$$\mathrm{REC}=\begin{Bmatrix}\cdots & \Gamma_{\text{down}} & \Gamma_{\text{up}} & \Gamma_{\text{down}} & \Gamma_{\text{up}} & \Gamma_{\text{down}} & \cdots \\ \cdots & t+\tau_1 & t+\tau_2 & t+\tau_3 & t+\tau_4 & t+\tau_5 & \cdots\end{Bmatrix} \quad (3)$$

그리고 이런 방식으로 원자가 열복사광을 흡수하고 방출하면서 불연속적으로 진화하는 모습의 도식적으로 표현하면 아래의 그림 2와 같이 될 것이다. 그러나 이 이론은 이처럼 확률론적 과정(stochastic process) -즉, 시간상에서 무작위로 일어나는 일련의 양자도약의 과정- 만을 정의하는 것으로, 앞에서 지적한 바와 같이, 예를 들어, 강한 전기장 속에서 원자가 보이는 정연하고 연속적인 라비 진동과 같은 현상은 설명을 못한다는 문제점이 있다는 것이다.

2.2. 보어-크레이머즈-슬레이터의 제안(BKS Proposal)

이런 이유에서 보어는, 비록 자신이 그의 원자모형에서 양자도약의 개념을 내놓았지만[1], 아인슈타인의 제안 하에서 얻게 되는 구체적인 형태로서의 그 자신의 원자모형에 상당한 거부감을 가졌던 것이다. 그를 가장 곤란하게 만든 것은 특히 그 광량자의 개념이었다. 즉, 보어는 수많은 광학적 현상들이 정연한 파동의 연속성에 의존하고 있으므로 그렇게 간단히 빛의 파동성을 내던질 수가 없었던 것이다. 그러면서도 그는, 빛의 방출과 검출을 설명하기 위하여서는 불연속적 과정 또한 필요불가결함을 잘 인식하고 있었다. 결국 그가 피할 수 없이 추구해야 했던 것은 바로 이 두 개념들을 어떤 방법으로든 통합하는 것이었다.

이를 구현하기 위한 일종의 연구계획안이 바로 보어, 크레이머즈 그리고 슬레이터가 한 때 검토하였던 이른바 "BKS proposal"이다[6, 7]. 이 안의 핵심은 바로, 원자가 그림 2의 두 정상상태 $|e\rangle$혹은 $|g\rangle$에 머물고 있는 동안, 전자기 파동과의 상호작용이 없는 것이 아니라는 것이다. 두 준위의 에너지가 각각 E_e와 E_g라고 할 때, 이 동안 원자는 주파수 $\omega_A=(E_e-E_g)/\hbar$의 전자기파를 언제나 방출하는 정연한 쌍극자 방출원(dipole radiator), 혹은 BKS의 용어로 "가상 진동자(virtual oscillator)"를 통하여 행동하고 있다는 것이다. 그런데 이 파는 머물고 있는 준위의 에너지가 E_e 인가 E_g 인가에 따라, 주파수 ω_A의 외부 전자기 복사장과 위상이 같을 수도 있고 어긋날 수도 있다. 그리하여, 고전전기역학의 법칙 하에서 원자의 초기상태에 따라 쌍극자로부터 전자기장으로 혹은 전자기장으로부터 쌍극자로 에너지가 전이될 수 있다고 본 것이다[1)].

그런데 도약이 일어나는 순간에 광자들이 또한 연속적으로 방출되고 흡수된다고 한다면, 명백히 교환되는 에너지를 중복하여 셈하는 일이 일어나게 된다. 목표는 바로 이 양자들을 제거하되, 그럼에도 불구하고 원자는 여전히 도약을 하도록 만드는 데에 있었다. 그래서 BKS는 이 두 가지의 양립되지 않는 에너지 교환의 메커니즘-즉, 복사장의 흡수와 방출에 관한 (연속적인) 파동적 기작과 물질 상태의 에너지의 변화에 관한 (불연속적인) 입자적 기작-을 둘 다 유지하면서도, 분리가 되도록 하는 방법을 모색하였다. 그러나 그 시도는 결국 성공적이지 못하였고, 제안은 개별 양자적 사건의 수준에서 에너지 보존법칙의 명백한 위반으로 인하여 곧 잊혀지게 되었는데, 바로 콤턴 산란실험(Compton scattering experiment)에서 개별적 양자 사건에서도 에너지는 엄밀하게 보존된다는 것이 명확히 증명되었기 때문이다[20, 21].

2.3. 양자궤적이론

현대적 관점에서 보면, 보어는 그 당시에 구할 수 있었던 광원에는 그리 적절하지 못한 빛에 관한 개념을 가지고 있었다고 보여진다. 열평형 상태의 방사원(radiators)은 정연파를 내는 파동원이 아니다. 이들은 전자기적 잡신호(noise)를 방사하고, 이를 여과하면 1차 정연성(first-order coherence)을 지닌 약한 세기의 빛에 근사될 수 있다. 그러나 이것들은 여전히 진폭이 크고 조정가능한 정연파로서의 고전적 빛의 개념과는 매우 다르다.

반면, 오늘날의 레이저들은 고전적인 이상적 모형에 근접하는 빛을 내놓는다. 이들의 경우에는, 그 고도의 정연성이 개별 양자 수준에서 에너지를 추적하는 것을 허락하지 않고, 따라서 BKS의 제안을 내려놓게 한 "에너지 보존"에 근거한 반론은 적용되지 않는다. 그 이유는 물론, 위상에 있어서의 불확정성 $\Delta\phi$와 광자수에 있어서의 불확정성 Δn은 (현상학적으로) $\Delta\phi\cdot\Delta n\geq 1/2$이기 때문이다[22-24]. 다시 말하면, 정연상태의 빛은 광자수가 명확히 정의되지 않고 따라서 개별광자 수준의 에너지 보존을 논할 수가 없기 때문이다. 광자수가 명확히 정의되는 상태는 이른바 수상태(number state, 혹은 Fock state)임은 주지의 사실이다.

양자궤적이론은 현대의 실험실에서 얻을 수 있는 고도의 정연성을 가진 빛과 물질의 상호작용이 개입되는 문제를 다

1) 아인슈타인이 흡수에 의한 도약과 함께 유도 방출에 의한 도약을 포함시키게 된 동기를 바로 이 파동에 기반한 물리학을 떠올림으로써 얻었다는 것은 재미있는 사실이다[2]: "플랑크의 공진기가 복사장 내에 놓여 있다면, 공진기의 에너지는 그 전자장에 의하여 공진기에 가해지는 일(work)을 통하여 변화하게 된다. 이 일은 공진기와 진동하는 전자장의 위상에 따라 양수가 될 수도 있고, 음수가 될 수도 있다. 그리하여 우리는 다음과 같은 가설을 세우게 된다."

루기 위하여 설계되었다. 그런데, 이 이론을 자세히 들여다보면 BKS 제안과 놀라운 유사성을 가지고 있음이 발견된다. 우선, 아인슈타인-AB 이론과 그림 1의 2-준위 원자를 들뜨게 하는 진폭 ε_0의 고전적 정연파에 관한 양자궤적의 묘사를 비교해볼 필요가 있는데, 실제로 여기에서 BKS와의 연관성이 자동적으로, 그리고 명확하게 나타나기 때문이다. 원자는 여전히 열복사장 배경에 놓여 있고, 따라서 식 (1a) 및 (1b)가 주는 확률에 따라서 두 에너지 준위 사이를 무작위로 뛰어다니는 도약이 나타나지만, 다만 한 가지 주목할 만한 변화가 있다. 바로 유도된 정연성(induced coherence)으로 인하여, 계의 상태가 정상상태 $|e\rangle$와 $|g\rangle$의 중첩상태로 될 수밖에 없는데, 이것이 바로 BKS가 제안했던 양자도약 사이의 전자장과의 정연한 상호작용과 정확히 같은 문맥인 것이다.

이 중첩상태를 $|\Psi_{REC}(t)\rangle$로 표시하자. 양자궤적이론에 의하면, 이 상태는 미규격화 조건부 상태(unnormalized conditional state)에 관한 슈뢰딩거 방정식, 즉,

$$\frac{d}{dt}\left|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\tilde{H}\left|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\right\rangle \tag{4}$$

에 의하여 연속적으로 진화하게 되는데[3-5], 여기서 $\tilde{H}$는 비-에르미트 해밀토니안(non-Hermitian Hamiltonian)으로서

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\hbar(\omega_A - i\Gamma_{\mathrm{down}})|e\rangle\langle e| - \frac{1}{2}\hbar(\omega_A + i\Gamma_{\mathrm{up}})|g\rangle\langle g| + i\hbar\varepsilon_0\left(e^{i\omega_A t}|g\rangle\langle e| - e^{-i\omega_A t}|e\rangle\langle g|\right) \tag{5}$$

으로 주어진다. 여기서 외부 정연파 ε_0는 고전광(classical field)으로 간주하며, 이 고전광과 원자와의 상호작용은 쌍극자 근사(dipole approximation, DA) 및 회전파 근사(rotating-wave approximation, RWA) 내에서 다루어진다[5, 25, 26].

양자도약은 아인슈타인-AB 이론에서의 규칙에 의하여 지배되지만, 이 규칙은 자연스럽게 확장되어 계의 상태가 임의의 시간에 꼭 특정한 정상상태에만 있지 않음을 반영한다. 도약의 내용은

$$\left|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\right\rangle \rightarrow |g\rangle\langle e|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle \quad \text{(하향도약)} \tag{6a}$$

$$\left|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\right\rangle \rightarrow |e\rangle\langle g|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle \quad \text{(상향도약)} \tag{6b}$$

이며, 이런 사건들이 일어나는 비율은 다음과 같이 주어진다.

$$R_{\mathrm{down}} = \Gamma_{\mathrm{down}}\left|\langle e|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle\right|^2 , \tag{7a}$$

$$R_{\mathrm{up}} = \Gamma_{\mathrm{up}}\left|\langle g|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle\right|^2 . \tag{7b}$$

그림 3(a) 및 (b)는 이 확률적 과정이 어떻게 시각적으로

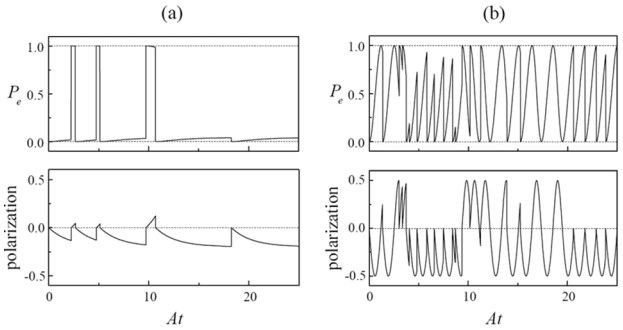

FIG. 3. Quantum trajectories of the thermal jumps and the induced coherence. $\bar{n}$=0.25. (a) $\varepsilon_0 A$=0.1 (b) $\varepsilon_0 A$=1.5. $P_e = \left|\langle e|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle\right|^2$ and polarization=$\langle\psi_{\mathrm{REC}}(t)|g\rangle\langle e|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle$.

나타나는지 보여주고 있다. 3(a)에서는 원자의 정연한 여기(coherent excitation)가 비교적 약한 경우여서 전체적인 진화의 형태가 보어-아인슈타인 식의 양자도약과 비슷한 모습이다. 그러나 에너지를 바꾸는 행동 외에, 약한 유도 정연성이 양자도약 사이의 연속적 진화의 의하여 유한한 값을 가진 분극(polarization)의 진폭으로 나타나는 것이 보이는데, 이는 바로 BKS 이론에서의 "가상 진동자"를 떠올리게 한다.

한편, 그림 3(b)에서는 정연 여기(coherent excitation)가 훨씬 더 강하다. 여기서는 정상상태 간의 진화의 지배적인 메커니즘이 연속적이고 정연한 라비 진동이다. 즉, 이제 섭동(perturbation)의 한계를 벗어난 정연한 진화로 옮아 왔는데, 이는 레이저가 개발된 다음에야 비로소 접근이 가능하게 된 영역이다. 이는 다름 아닌 슈뢰딩거 방정식에 따라서 나오는 진화인데, 주목할 것은, 이 비섭동적 정연성이란 BKS 제안에서는 전혀 예상되지 않았던 것이다. 하지만, 밀도반전 없는 레이저 발진(lasing without inversion, LWI) 등과 같은 비직관적 현상들은 바로 이러한 비섭동적 정연성에 의하여 얻어지는 것이다[25, 26].

III. 열적 양자도약의 자기일관성

서론에서 언급한 바와 같이, 충분히 낮은 온도, 즉, 식(2)에서 $\bar{n} \ll 1$인 경우에는 계의 상태를 나타내는 양자도약의 기록이 산란광을 감시하는 검출기에 의하여 물리적으로 설득력이 있게 만들어질 수 있다. 이 상황에서는 근본적으로 모든 도약이 자발적 방출률, 즉, 아인슈타인-A 계수에 의하여 지배되는 하향도약(down-jump)이고, 이는 시공간적으로 분해된 진공의 여기로서, 하나 둘, 그 수가 세어지는 광자들의 방출기록과 동일시 될 수 있다. 양자광학의 거의 대부분의 경우에서 상황이 이러하다. 다시 말하면, 온도가 매우 낮은 열적 배경은 그야말로 (광자조차 없는) "진공"이라 할 수 있고, 광자가 계로부터 진공으로 방출되는 그 현상 자체가 "진공의 여기"인 것이다.

그럼에도 불구하고, 열복사장에 의한 원자의 비정연 여기(incoherent excitation)란 검출기로 포착되는 것이 아니며, 따

라서 검출기록으로 바꾸어 놓을 수가 없는 것이기 때문에, 원론적 시각에서 볼 때, 이런 현상을 개념적으로 어떻게 정당화할 것인가 하는 문제가 대두된다. 즉, 검출기의 신호포착음(click)으로 동일시 될 수 없는 그런 도약에 관하여, 연속적인 진화만을 끌어내고 있는 슈뢰딩거 방정식으로부터 양자도약을 어떻게 정당화할 수 있느냐 하는 개념적인 문제를 말한다. 이 장에서는 바로 이 문제를 염두에 두고, 약결합 극한에서 연속적인 슈뢰딩거 진화가 자연스럽게 불연속적인 양자도약으로 연결이 되는 놀라운 현상을 보일 것이다.

3.1. 열배경 중의 단일 모드의 궤적

열적 배경 복사장과 상호작용하는 2-준위 원자의 해밀토니안은 $\varepsilon_0 = 0$으로 두어서 다음과 같이 주어진다:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right) + \hbar\sum_{\lambda,\mathbf{k},\omega}\omega b^{+}_{\lambda,\mathbf{k},\omega}b_{\lambda,\mathbf{k},\omega} + \hbar\sum_{\lambda,\mathbf{k},\omega}\left[\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|e\rangle\langle g|b_{\lambda,\mathbf{k},\omega} + \text{H.c.}\right] \tag{8}$$

여기서 $b^{+}_{\lambda,\mathbf{k},\omega}$와 $b_{\lambda,\mathbf{k},\omega}$는 각각 편광모드 λ, 진행방향을 나타내는 단위벡터 $\mathbf{k}$ 및 주파수 ω인 모드의 생성 및 소멸 연산자이고, $\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)$는 해당 모드와 원자 간의 결합계수이다. $\varepsilon_0 = 0$인 경우의 식 (6a)-(7b)의 확률적 과정은 식 (8)로부터 도출되는 으뜸방정식(master equation)[5, 25, 26]을 써서 형식론적으로 다음과 같이 꾸며진다.

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H_S, \rho] + \frac{1}{2}\Gamma_{\text{down}}\left(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \rho\sigma_+\sigma_- - \sigma_+\sigma_-\rho\right) + \frac{1}{2}\Gamma_{\text{up}}\left(2\sigma_+\rho\sigma_- - \rho\sigma_-\sigma_+ - \sigma_-\sigma_+\rho\right). \tag{9}$$

여기서 H_S는 현재 관찰하고자 하는 물리계, 즉, 원자의 해밀토니안으로서

$$H_S = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right) \tag{10}$$

으로 주어지고, $\sigma_{-(+)}$는 원자의 유사-스핀 연산자(pseudo-spin operator)로서

$$\sigma_- \equiv |g\rangle\langle e| = (\sigma_+)^{+} \tag{11}$$

이다[5, 25, 26]. 이 으뜸방정식 (9)는 모든 복사장 모드에 관하여 대각합(trace)을 취하여 얻은 원자만의 양자상태를 묘사한다.

이제 여기서 복사장 모드 중의 하나를 선택하여 이것으로 하여금 원자와 같은 지위를 띠도록 계의 해밀토니안에 포함시키고, 이렇게 새롭게 설정된 "계"의 행동을 양자궤적이론의 관점에서 관찰하고자 한다. 다른 모든 모드들은 기존 설정과 같이 열적 배경으로 취급하고, 이들의 원자와의 상호작용은 양자도약으로 묘사한다. 그러면 그 무작위 도약과정은 식 (6a)-(7b)와 같고, 다만 식 (5)의 비-에르미트 해밀토니안만이 다음의 식으로 바뀌게 된다:

$$\begin{aligned}\widetilde{H} = {} & \frac{1}{2}\hbar\left(\omega_A - i\Gamma_{\text{down}}\right)|e\rangle\langle e| - \frac{1}{2}\hbar\left(\omega_A + i\Gamma_{\text{up}}\right)|g\rangle\langle g| \\ & + \hbar\omega b^{+}_{\lambda,\mathbf{k},\omega}b_{\lambda,\mathbf{k},\omega} + i\hbar\left[\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|g\rangle\langle e|b_{\lambda,\mathbf{k},\omega} + \text{H.c.}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

물론 무한개의 열배경 모드들로부터 한 개의 모드를 제거하는 것은 전체 양자도약률에 아무런 영향을 끼치지 않을 것이다. 변화는 단지 그 선택된 모드의 힐버트 공간에서의 진화, 즉, 원자와 이 모드를 얽히게 하는 진화를 추적할 수 있게 되었다는 것이다. 요점은 바로, 이 선택된 모드와 원자와의 결합강도를 줄여갈 경우, 이 모드가 힐버트 공간에서 어떻게 진화할 것이며, 특히 이 모드 역시 양자도약을 일으킬 것인가를 들여다보고자 하는 것이다. 결합강도를 줄인다는 말은 다음 그림 4가 설명한다. 즉, 선택된 모드의 체적을 키우면 원자-장 간의 결합강도는 체적의 제곱근에 반비례하므로 결합강도가 줄어지게 되고[18, 25, 26], 이 체적이 무한대로 커질 경우 이 선택된 모드는 열배경 모드 중의 하나로 되돌아가게 되는 것이다.

이런 방법으로 선택된 모드를 열배경 모드 중의 하나로 점

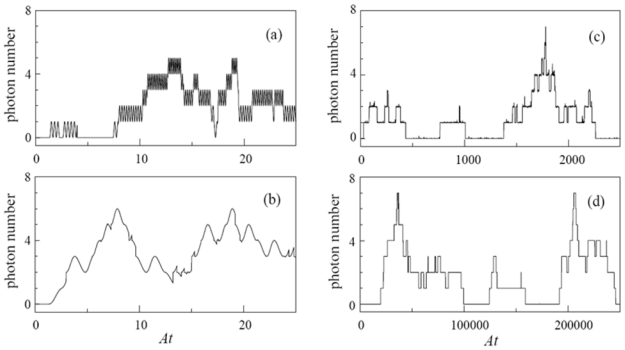

FIG. 4. Returning the selected mode to one of the many modes of thermal reservoir.

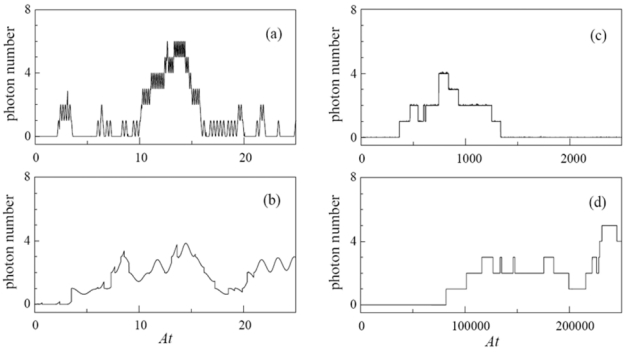

FIG. 5. The quantum trajectory of the photon number in the selected mode. The mode is in resonance with the atom, i.e., $\Delta\omega/A = 0$. $\bar{n}(\omega_A) = 1$. (a) $|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega_A)| = 10$, (b) 1.0, (c) 0.1, and (d) 0.01.

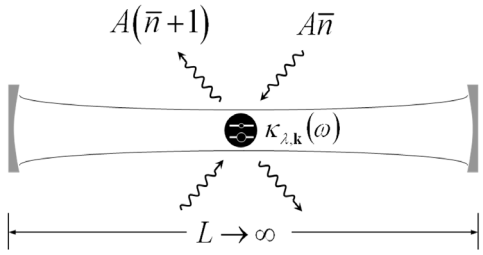

FIG. 6. The quantum trajectory of the photon number in the selected mode. The mode is off=resonant with the atom by $\Delta\omega/A=2.0$. $\bar{n}(\omega_A)=1$. (a) $|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega_A)|=10$, (b) 1.0, (c) 0.1, and (d) 0.01.

진적으로 되돌리면서 이 모드의 행동을 관찰한 것이 그림 5와 6이며, 그 선택된 모드의 광자수 여기에 관한 궤적을 보여주고 있다[2]. 그림 5는 선택된 모드와 원자가 공진인 경우이고, 그림 6은 원자-모드 간에 "주파수 이격(detuning)"이 있는 경우이며, (a)에서 (d)로 감에 따라 원자와 이 선택된 모드 간의 결합강도가 줄어진다. 이들 그림에서 보이는 바와 같이, 결합강도가 아인슈타인-A 계수보다 강한 경우에는 궤적은 거의 정연한 라비 진동으로 나타나고 있다. 그러나 분명히 불연속적 변화도 함께 보이는데, 강결합의 경우에 이것은 단순히 원자에 관하여 가정된 양자도약일 뿐이다. 그러나 그림 2에서처럼 원자가 단조롭게 "위"-"아래"-"위"-"아래"-의 순서로 번갈아 도약하는 행동만을 보이는 것이 아님을 주목할 필요가 있다. 즉, 위로 뛴 다음 또다시 위로 뛰기도 하고, 아래로 뛴 다음 또 한번 더 아래로 뛰기도 한다는 것이다. 그리고 연속으로 "위로 뜀(up jump)"이 일어날 경우에 그 선택된 모드로 에너지 양자가 하나 옮겨 가게 되고, 연속한 "아래로 뜀(down jump)"이 일어나면 모드의 양자수가 하나 줄게 되는 것을 볼 수 있다.

중간 세기의 결합강도에 관해서는 부분적인 라비 진동이 보인다. 그러나 결합강도가 충분히 약해지면, 라비 진동이 아예 사라지고, 전혀 새로운 도약적 진화가 들어오는 것이 보인다. 이 경우의 도약은 원자의 총도약률에 비하여 훨씬 작은 비율로 발생한다. 이 도약률은 결합상수의 제곱에 비례하여 [그림 (c)에서 (d)], 또 디튜닝이 커짐에 따라 (그림 5에서 6) 줄어든다. 그리하여, 열적 배경의 수많은 모드 중의 하나를 선택하여 원자와 상호작용 시킬 때, 모드의 양자화 체적을 줄임으로써 원자-모드 간 상호작용강도를 크게 하면 그 모드와 원자는 연속적인 라비 진동을 보이나, 모드의 체적을 다시 자유공간의 규모로 늘려서 그 모드를 열적 배경 모드로 되돌려놓을 경우, 원자와 모드의 광자수는 연속적 상호작용을 멈추고 점진적으로 도약적 행동을 보이게 된다는 것이 발견된 것이다.

다시 말하면, 하나를 제외한 나머지 모든 모드들과의 상호작용에서 원자가 도약적 진화를 한다고 가정한 것이, 분리된 한 개의 모드가 약결합 극한에서 자연스럽게 도약적 진화를 보이게 하였다는 결론이 된다. 다음 절에서는, 이 선택된 모드가 광자수의 보즈-아인슈타인 분포를 따른다는 것을 보이고, 단일 모드의 도약률을 계산하여 이것들의 합이 정확히 Γ_{up} 및 Γ_{down}으로 나타나는 것을 보이는 것으로 이 열적 양자도약의 자기일관성에 관한 논의를 완성할 것이다.

3.2. 자기일관성

시간 t에서 원자와 복사장 모드 사이에서 공유되는 에너지 양자의 수를 $n_\omega+1$로 나타낸다. t_k를 원자의 마지막 도약이 일어난 시각이라고 하고, t_{k+1}을 다음 도약이 일어날 시각이라고 하자. 그러면, $t_k< t < t_{k+1}$의 시간 영역에서의 원자와 모드 간의 얽힌 상태는 다음과 같이 나타내어진다.

$$|\psi_{\mathrm{REC}}(t)\rangle = C_{ei}(t)|e,n_\omega\rangle + C_{gi}(t)|g,n_\omega+1\rangle \tag{13}$$

여기서 $C_{e\,|\,i}(t_k)=\delta_{e,i}$이고, $C_{g\,|\,i}(t_k)=\delta_{g,i}$이다. i는 t_k에서의 도약이 "위로 뜀" 혹은 "아래로 뜀"일 때 각각 e와 g가 된다. 이제 $\phi_{\mathbf{k}}(\omega)\equiv\arg\left[\kappa_{\pi,\mathbf{k}}(\omega)\right]$이라고 할 때,

$$C_{ei}(t)=e^{-i\left(n_\omega+\frac{1}{2}\right)\omega t}e^{i\frac{1}{2}\phi_{\mathbf{k}}(\omega)}\tilde{C}_{ei}(t) \tag{14a}$$

$$C_{gi}(t)=e^{-i\left(n_\omega+\frac{1}{2}\right)\omega t}e^{i\frac{1}{2}\phi_{\mathbf{k}}(\omega)}\tilde{C}_{gi}(t) \tag{14b}$$

로 놓으면, 식 (4)와 (12)로부터 조건부 상태의 진폭에 관한 운동방정식이 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt}\tilde{C}_{ei}(t)=-\frac{1}{2}(\Gamma_{\mathrm{down}}-i\Delta\omega)\tilde{C}_{ei}(t)-i|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega+1}\tilde{C}_{gi}(t) \tag{15a}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{C}_{gi}(t)=-\frac{1}{2}(\Gamma_{\mathrm{up}}+i\Delta\omega)\tilde{C}_{gi}(t)-i|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega+1}\tilde{C}_{ei}(t) \tag{15b}$$

이제 시각 t_k에서 위로 뜀이 발생하여 초기상태의 진폭이 각각 $C_{e\,|\,i}(t_k)=1$과 $C_{g\,|\,i}(t_k)=\delta_{g,i}$인 경우를 생각하자. 이제 이 시점에서 시간이 조금 흐른 일반적 시간 t에서, 약결합에서는 $C_{e\,|\,i}(t)\approx 1$이고 $C_{gi}(t)\approx t|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega+1}$ 이라고 할 수 있고, 따라서 다음에 발생할 도약은 "아래로 뜀"이 될 확률이 매우 크다. 같은 논리로, 아래로 뛴 다음에는 위로 뛸 확률이 매우 높다. 그리하여 가장 일어날 확률이 큰 사건 전개는 그림 2와 같이 "위" - "아래" - "위" - "아래" - 하는 식이 될 것이다. 도약의 이런 전개에서는 n_ω의 값이 바뀌지 않음을 주목할 필요가 있다.

그러나 $C_{gi}(t)\approx t|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega+1}$ 이든, $C_{ei}(t)\approx t|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega+1}$ 이든, 원자가 선택된 모드에 결합됨으로써 형성된 이 작은 확률진폭으로 인하여, 이렇게 위아래로의 도약이 번갈아 나타나는 사건의 전개순서를 깨어버리는 도약이 일어날 확률

2) 이는 양자역학적 평균값(quantum mean)의 의미가 아니고, 진정한 기대-즉, 그렇게 될 가능성-의 의미로 이해되어야 한다.

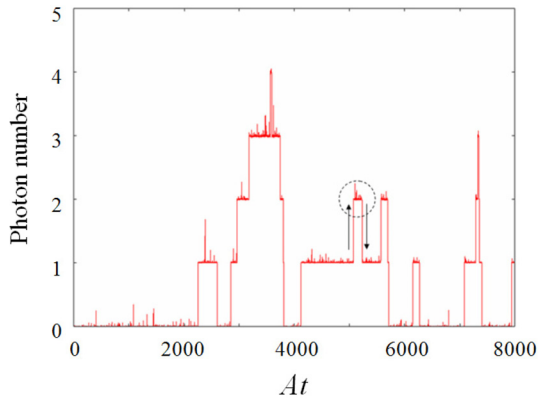

FIG. 7. The quantum trajectory of the selected mode showing jumpy behavior. Figs. 8(a) and (b) are the magnified views of the region specified by the dotted circle here.

이 언제나 있는 것이다. 즉, "up-jump" 다음에 다시 "up-jump"가 올 수도 있고, "down-jump" 다음에 또 "down-jump"가 올 수도 있는 것이다. 이런 사건의 전개에서는 n_ω의 값이 변하고, 따라서 그림 5와 6에서와 같이 복사장 모드의 광자수의 도약을 야기한다. 그림 5(c)와 6(c)에서는, 그런 도약의 배경에 있는 작은 진폭의 존재가, 매우 천천히 발전하는 부드러운 곡선 위에 아직 "보풀(fuzz)"처럼 얹혀져 있는 형태로 보이고 있다. 이런 확률의 "보풀"은 그림 5(d)와 6(d)에도 있지만, 너무 작아서 보이지 않을 뿐이다.

원자의 도약 기록에서의 위와 같은 "비정상적인 사건들"에 관한 물리적 해석은, 이런 사건 각각이 무수히 많은 열배경 모드 중의 하나와 선택된 모드 사이에서의 광자의 산란(scattering)을 나타낸다는 것이다. 예컨대 잇달아 일어난 두 개의 "up-jump"는 그 도약들 사이에 첫 번째 도약에서 흡수된 에너지가 선택된 모드에게로 옮아 가버렸기 때문이다. 양자궤적은 다음 도약이 일어나는 때에 그 에너지의 이동이 확정지어지는 것을 보여주고 있다.

그림 7은 도약적 궤적을 보여주고 있는 모드의 또 하나의 보기인데, 원으로 표시한 부분을 확대하여 원자의 행동과 광자수의 행동을 그림 8(a)와 (b)에서 비교하고 있다. 보이는 바와 같이, 원자가 연속하여 "up-jump"를 하는 순간에 모드의 광자수가 한 개 증가하는 모습과 연속한 "down-jump"가 일어날 때 광자수가 한 개 감소하는 모습을 보여주고 있다.

이제 남은 과제는 그러한 "일어나기 힘든 도약"들의 발생률을 계산하는 것이다. 이것을 하기 위하여 참고문헌 [27]의 절 IV D에 소개된 방법을 사용한다. 먼저 식 (15a) 및 (15b)의 운동방정식은

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{C}_{e|i}\right|^2 = -\Gamma_{\text{down}}\left|\tilde{C}_{e|i}\right|^2 - 2\left|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)\right|\sqrt{n_\omega+1}\,\text{Im}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) \tag{16a}$$

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{C}_{g|i}\right|^2 = -\Gamma_{\text{up}}\left|\tilde{C}_{g|i}\right|^2 + 2\left|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)\right|\sqrt{n_\omega+1}\,\text{Im}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) \tag{16b}$$

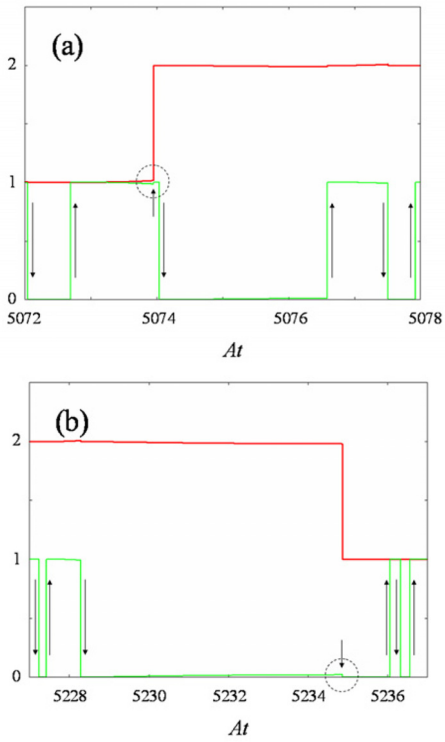

FIG. 8. Thicker line represents the photon number, while the jumpy signal between 0 and 1 is the atomic trajectory. The arrows designate the directions of the jumps. (a) A small "up-jump" right after an "up-jump" is shown within the dotted circle. Note that at this moment, the photon number goes up by one. (b) Another "down-jump" right after a "down-jump" is shown. At this moment, the photon number goes down by one. Either in (a) or (b), the photon number does not change when the up, down-jumps occur in the orderly sequence.

$$\frac{d}{dt}\text{Re}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) = -\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\text{up}}+\Gamma_{\text{down}}\right)\text{Re}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) - \Delta\omega\,\text{Im}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) \tag{16c}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\text{Im}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) = &-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\text{up}}+\Gamma_{\text{down}}\right)\text{Im}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right) - \Delta\omega\,\text{Re}\left(\tilde{C}_{e|i}\tilde{C}^*_{g|i}\right)\\ &+\left|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)\right|\sqrt{n_\omega+1}\left(\left|\tilde{C}_{e|i}\right|^2-\left|\tilde{C}_{g|i}\right|^2\right)\end{aligned} \tag{16d}$$

으로 변형된다. 이제, 다음과 같은 물리량들을 정의한다.

$$W_e = \int_{t_k}^{\infty}\left|\tilde{C}_{e|i}(t)\right|^2 dt \tag{17a}$$

$$W_g = \int_{t_k}^{\infty}\left|\tilde{C}_{g|i}(t)\right|^2 dt \tag{17b}$$

$$U = \text{Re}\int_{t_k}^{\infty}\tilde{C}_{e|i}(t)\tilde{C}^*_{g|i}(t)dt \tag{17c}$$

$$V = \text{Im}\int_{t_k}^{\infty}\tilde{C}_{e|i}(t)\tilde{C}^*_{g|i}(t)dt \tag{17d}$$

이렇게 하면 $\Gamma_{\text{up}}W_g$와 $\Gamma_{\text{down}}W_e$는 초기상태 i가 e나 g로 주어졌을 때, 그러한 "일어나기 힘든 도약"이 일어날 확률들이

되는 것이다. 부연하면, 예컨대, 시각 t_k에서 원자가 "up-jump"를 일으켰다고 하자. 그러면 이 사건 직후에 계는, 앞에서 언급한 바와 같이 명백히 원자가 $|e\rangle$-상태일 확률이 1에 가까운 그런 상태가 될 것이다. 이 순간의, 선택된 모드에 있는 광자수를 n_ω이라고 하자. 그러나 그 이후 계의 상태는, 원자와 선택된 모드 간의 상호작용을 통하여 $|\psi(t)\rangle = C_{e|i}(t)|e, n_\omega\rangle + C_{g|i}(t)|g, n_\omega + 1\rangle$로 발전할 것인데, 여기서 또다시 "up-jump"가 일어났다면, 이것은 계가 $|g, n_\omega + 1\rangle$-상태, 즉, 원자가 실은 $|g\rangle$-상태에 있었고 광자수는 n_ω가 아니라 $n_{\omega+1}$이었다는 말이 된다.

이 상태에 있을 확률이 $|C_{e|i}(t)|^2$ 이고, 이 들뜬 상태에서 "up-jump"가 일어날 확률이 Γ_{up}이므로, 시각 t_k에서 "up-jump"가 일어난 후 임의의 시간 t와 $t + dt$사이에 또다시 "up-jump"가 일어날 확률은 $\Gamma_{\rm up}|C_{e|i}(t)|^2 dt$ 이다. 그러므로 어떤 시간에 일어나든 관계없이 연이어 "up-jump"가 일어날 총확률은 $\Gamma_{\rm up}|C_{e|i}(t)|^2 dt$ 의 t_k 이후의 시간에 관한 적분, 즉, $\Gamma_{up}W_g$로 주어지는 것이다.

이제 라플라스 변환[28]으로 식 (13a)-(13d)는

$$-\delta_{e,i} = -\Gamma_{\rm down}W_e - 2|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega + 1}V \tag{18a}$$

$$-\delta_{g,i} = -\Gamma_{\rm up}W_g + 2|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega + 1}V \tag{18b}$$

$$0 = -\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})V + \Delta\omega U + |\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|\sqrt{n_\omega + 1}(W_e - W_g) \tag{18c}$$

$$0 = -\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})U - \Delta\omega V \tag{18d}$$

가 된다. 이 연립방정식을 결합강도에 관한 최저차 해를 구하면

$$\Gamma_{\rm up}W_g|_{i=e} = \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})/\pi}{\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})\right]^2 + (\Delta\omega)^2}\frac{2\pi|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|^2}{\Gamma_{\rm down}}(n_\omega + 1) \tag{19a}$$

$$\Gamma_{\rm down}W_e|_{i=g} = \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})/\pi}{\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})\right]^2 + (\Delta\omega)^2}\frac{2\pi|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|^2}{\Gamma_{\rm up}}(n_\omega + 1) \tag{19b}$$

를 얻는다.

이것들이 바로 초기상태 i에 따라 그러한 "일어나기 힘든 도약," 즉, "up-jump"와 "down-jump"가 각각 연속하여 일어날 확률들이다. 광자수의 도약률을 얻기 위하여서는, 초기상태 i가 준비되는 비율, 즉, 원자의 도약률을 또한 곱하여야 한다. 그래서 p_e^{eq}와 p_g^{eq}를 열평형에서의 상태점유 확률이라 할 때, 식 (16a)에는 $\Gamma_{up}p_e^{eq}$를, 식 (19b)에는 $\Gamma_{down}p_g^{eq}$를 각각 곱해야 한다. 한편, $n_{\omega+1}$은 애초에 원자와 모드가 공유하는

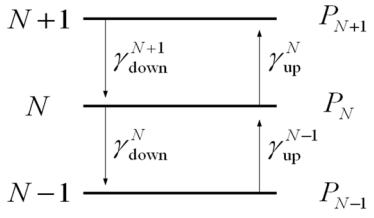

FIG. 9. The detailed balance in the photon number of the selected mode.

총 양자수로 정의되었음을 기억할 때, 식 (19a)에서는 원자가 실제로는 들떠서 양자 하나를 먹고 있는 상태이므로 광자수의 기대치는 $N = n_\omega$이 되고, 식 (19b)에서는 원자가 실제로 바닥 상태에 있으므로 $N = n_\omega + 1$이 된다. 그러므로 광자수 N의 도약률은

$$\gamma_{\rm up}^N = \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})/\pi}{\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})\right]^2 + (\Delta\omega)^2}\frac{2\pi|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|^2}{\Gamma_{\rm down}}(N + 1)p_e^{\rm eq} \tag{20a}$$

$$\gamma_{\rm down}^N = \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})/\pi}{\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{\rm up} + \Gamma_{\rm down})\right]^2 + (\Delta\omega)^2}\frac{2\pi|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega)|^2}{\Gamma_{\rm down}}Np_g^{\rm eq} \tag{20b}$$

으로 주어지게 된다. 여기서 $p_e^{eq}/p_g^{eq} = \Gamma_{up}/\Gamma_{down}$의 관계를 사용하였다.

열복사장의 도약이라는 그림의 자기일관성은 이제 쉽게 보일 수 있다. 먼저, 식 (20a) 및 (20b)를 사용하여 선택된 모드의 광자수에 관한 비율방정식을 세우고, 세부평형(detailed balance)의 논거를 써서 이 방정식의 안정상태(steady state)에서의 해를 구한다. 그림 9를 참조하자. 광자수가 N개일 확률 P_N의 변화율을 아래 위 준위로부터의 확률의 유입과 유출에 의하여

$$\dot{P}_N = P_{N+1}\gamma_{\rm down}^{N+1} - P_N\gamma_{\rm down}^N + P_{N-1}\gamma_{\rm up}^{N-1} - P_N\gamma_{\rm up}^N \tag{21}$$

으로 주어질 것인데, 평형상태에서는 물론

$$0 = P_{N+1}\gamma_{\rm down}^{N+1} - P_N\gamma_{\rm down}^N + P_{N-1}\gamma_{\rm up}^{N-1} - P_N\gamma_{\rm up}^N \tag{22}$$

이 될 것이다. 이것은 인접하는 준위들 사이의 관계식으로 다시 정리하면

$$P_{N+1}\gamma_{\rm down}^{N+1} - P_N\gamma_{\rm up}^N = P_N\gamma_{\rm down}^N - P_{N-1}\gamma_{\rm up}^{N-1} \tag{23}$$

이 된다. 이 관계의 해는 이웃하는 준위들 간의 확률의 출입이 각각 평형을 이루는 상황, 즉,

$$P_N \gamma_{\text{down}}^N = P_{N-1}\gamma_{\text{up}}^{N-1} \tag{24}$$

이고, 이것을 세부평형이라고 한다. 식 (20a)와 (20b)를 넣어서

$$P_N N p_g^{\text{eq}} = P_{N-1} N p_e^{\text{eq}} \tag{25}$$

를 얻고, 따라서

$$P_N = P_0 \left(p_e^{\text{eq}} / p_g^{\text{eq}}\right)^N \tag{26}$$

을 얻는다. 그런데 $\sum_{N=0}^{\infty} P_N = 1$ 이어야 하므로 여기에서 P_0가 결정되고, 결과적으로 선택된 모드에서 N개의 광자를 발견할 평형상태의 확률은 아인슈타인의 식 (1a) 및 (1b)를 써서

$$P_N^{\text{eq}} = \left(1 - \frac{p_e^{\text{eq}}}{p_g^{\text{eq}}}\right)\left(\frac{p_e^{\text{eq}}}{p_g^{\text{eq}}}\right)^N = \frac{1}{\bar{n}(\omega_A)+1}\left(\frac{\bar{n}(\omega_A)}{\bar{n}(\omega_A)+1}\right)^N \tag{27}$$

으로 주어진다. 보다시피 식 (27)는 명백히 보즈-아인슈타인 광자수 분포의 형태이고 그 평균 광자수는 $\bar{N} = \bar{n}(\omega_A)$이다. 여기서, 특정 모드의 결합강도와 주파수는 단지 얼마나 빨리 평형상태에 도달하는가에만 관련하는 점을 주목할 필요가 있다. 물론 실제로는, 각 모드는 수많은 2-준위 원자들과 동시에 상호작용하고 그 중에서 공진에 가까운 원자들과 가장 강하게 결합한다. 그러므로 실제 상황에서는, 평균광자수로 $\bar{N}(\omega) = \bar{n}(\omega_A)$를 얻을 것이고, 이는 플랑크의 복사 공식으로 회귀할 것이다.

마지막으로 이제, 도약률에 있어서의 자기일관성을 보이고자 한다. 이 목적으로 N_ω를 그것의 평균값 $\bar{n}(\omega_A)$으로 놓은 다음, 식 (20a)와 (20b)를 모든 모드, 즉, 모든 λ, **k**, ω에 관해서 합한다. 이때 상태밀도(density of states)와 쌍극자 결합상수의 주파수 의존성을 무시한다. 결과적으로 얻는 열복사장에 의한 광자의 이득과 손실에 관한 도약률은 애초에 원자에 관하여 가정한 도약률과 같아야만 한다. 수식의 모양을 보기 위하여 우선

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\text{up}} + \Gamma_{\text{down}}\right) \tag{28}$$

이라고 두자. 그러면 예컨대 γ_{up}^N의 적분은

$$\sum_\lambda \int d\Omega \rho(\omega_A) \gamma_{\text{up}}^{N_\omega} \approx 2\pi \sum_\lambda \int d\Omega \rho(\omega_A) \left|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega_A)\right|^2 \left(\bar{n}_{\omega_0}+1\right) p_e^{\text{eq}} \left[\frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_A)^2+\Gamma^2}\right] \tag{29}$$

의 모양이 되는데, 오른쪽 대괄호 안의 로렌치안(Lorentzian)이 충분히 좁은 분포라고 보아서 κ, ρ, $\bar{n}$등의 주파수 의존성을 무시하는 것이다. 결국 남는 적분은 바로

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_A)^2+\Gamma^2}\right] = 1 \tag{30}$$

일 뿐이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sum_\lambda \int d\Omega \rho(\omega_A) \gamma_{\text{up}}^{N_\omega} &\approx 2\pi \sum_\lambda \int d\Omega \rho(\omega_A) \left|\kappa_{\lambda,\mathbf{k}}(\omega_A)\right|^2 \left(\bar{n}_{\omega_0}+1\right) p_e^{\text{eq}} \\ &= A\left(\bar{n}+1\right) p_e^{\text{eq}} \equiv \Gamma_{\text{down}}\, p_e^{\text{eq}}\end{aligned} \tag{31}$$

이 되어, 실제로 열복사장 모드 각각의 광자수의 상향도약률의 총합은 원자의 하향도약률의 총합, 즉, $\Gamma_{down} p_e^{eq}$이 되는 것이 명확히 드러난다. 마찬가지로 γ_{down}^N의 적분도 $\Gamma_{up} p_g^{eq}$으로 나타나서, 순도약률이 식 (1a)와 (1b)의 아인슈타인 규칙과 일치함이 보인다. 열복사장 도약의 자기일관성이 이렇게 완벽하게 보여지는 것이다.

IV. 결 론

열복사장과 상호작용하는 원자의 양자도약을 원자로부터의 에너지 출입을 감시하는 검출기의 반응 숫자로 해석하는 데에는 문제점이 있는데, 그 이유는 예를 들어, 배경 복사장으로부터 원자가 광자 하나를 흡수하고 여기 상태로 도약을 하는 경우는 검출기의 검출신호로 나타나지 않기 때문이다. 따라서 그러한 제한적인 해석의 대안으로서, 자기일관성의 논리에 근거하여 양자도약에 관한 해석을 제시하였다. 계의 해밀토니안에 한 개의 열복사장 모드를 포함시킨 다음, 그 모드와 원자 간의 상호작용을 얽힌 양자상태로 묘사하되, 다른 열복사장 모드는 기존의 방법대로 양자도약을 야기하게 하였다. 이렇게 한 결과, 일반적으로 강결합에서 라비 진동이 나타나던 것이, 약결합 극한에서 그 선택된 모드의 여기 광자수가 양자도약을 행하는 것이 관찰되었다.

즉, 열적 배경의 수많은 모드 중의 하나를 선택하여 원자와 상호작용 시킬 때, 모드의 양자화 체적을 줄임으로써 원자-모드 간 상호작용강도를 크게 하면 그 모드와 원자는 연속적인 라비 진동을 보이나, 모드의 체적을 다시 자유공간의 규모로 늘려서 그 모드를 열적 배경 모드로 되돌려놓을 경우, 원자와 모드의 광자수는 연속적 상호작용을 멈추고 점진적으로 도약적 행동을 보이게 된다는 것을 보인 것이다. 한편, 그 선택된 모드의 평형상태의 광자수 분포는 보즈-아인슈타인 분포가 됨을 보였다. 결론적으로 각각의 열복사장의 모드를 이런 방법으로 격리시켜서 볼 수 있고, 그렇게 분리된 각 모드들의 약결합 양자도약률을 모두 합할 때, 정확히 애초에 가정한 원자의 순도약률이 된다는 사실을 보였다.

감사의 글

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2008-2-C00191.

References

1. N. Bohr, "On the constitution of atoms and molecules, Part I," Philos. Mag. **26**, 1-24 (1913).
2. A. Einstein, "Strahlungs, emission und absorption nach der quantentheorie (Emission and absorption of radiation in quantum theory)," Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, 318-323 (1916). English translations of relevant papers appear in B. L. van der Wärden: *Sources of Quantum Mechanics* (North Holland, Amsterdam, 1967), Chapter 1.
3. J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mømer, "Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics," Phys. Rev. Lett. **68**, 580-583 (1992).
4. R. Dum, P. Zoller, and H. Ritsch, "Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission," Phys. Rev. A **45**, 4879-4887 (1992).
5. H. J. Carmichael, "An open systems approach to quantum optics," in *Lecture Notes in Physics, New Series M: Monographs* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1993), vol. M18.
6. N. Bohr, H. A. Kramers, and J. C. Slater, "The quantum theory of radiation," Philos. Mag. **47**, 785-802 (1924).
7. J. C. Slater, "A quantum theory of optical phenomenon," Phys. Rev. **25**, 395-428 (1925).
8. H. J. Carmichael, "Quantum jumps revisited: an overview of quantum trajectory theory," in *Quantum Future: From Volta and Como to the Present and Beyond*, Proceedings of the X-th Max Born Symposium, Przesieka, Poland, 24-27 September 1997, ed. by Ph. Blanchard, and A. Jadczyk (Springer, Berlin, Heidelberg, 1999), pp. 15-36.
9. W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt, "Shelved optical electron amplifier: observation of quantum jumps," Phys. Rev. Lett. **56**, 2797-2799 (1986).
10. Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P. E. Toschek, "Observation of quantum jumps," Phys. Rev. Lett. **57**, 1696-1698 (1986).
11. J. C. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, and D. J. Wineland, "Observation of quantum jumps in a single atom," Phys. Rev. Lett. **57**, 1699-1702 (1986).
12. A. Barchielli, "Qauntum stochastic differential equations: an application to the electron shelving effect," J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 6341-6355 (1987).
13. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can qauntum-mechanical description of physical reality be considered complete?" Phys. Rev. **47**, 777-780 (1935).
14. E. Schrödinger and P. A. M. Dirac, "Probability relations between separated systems," Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 446-452 (1936).
15. J. S. Bell, "On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox," Physics **1**, 195-200 (1964); "On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox," in *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987), pp. 14-21.
16. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. "Quantum entanglement," Rev. Mod. Phys. **81**, 865-942 (2007).
17. B. W. Shore and P. L. Knight, "The Jaynes-Cummings model," J. Mod. Opt. **40**, 1195-1238 (1993).
18. S. E. Morin, C. C. Yu, and T. W. Mossberg, "Strong atom-cavity coupling over large volumes and the observation of subnatural intracavity atomic linewidths," Phys. Rev. Lett. **73**, 1489-1492 (1994).
19. M. Planck, "Über eine Verbesserung der Wienschen spektralgleichung (On an improvement of Wien's equation for the spectrum)," Ver. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 202-204 (1900).
20. W. Bothe and H. Geiger, "Über das Wesen des Comptoneffekts; ein experimenteller Beitrag zur theorie der Strahlung (The essentials of Compton effects: an experimental contribution to the theory of radiation)," Z. Phys. **32**, 639-663 (1925).
21. A. H. Compton and A. W. Simon, "Directed quanta of scattered x-rays," Phys. Rev. **26**, 289-299 (1925).
22. M. Ozawa, "Phase operator problem and macroscopic extension of quantum mechanics," Ann. Phys. **267**, 65-83 (1997).
23. D. T. Pegg and S. M. Barnett, "Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field," Phys. Rev. A **39**, 1665-1675 (1989).
24. P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the emission and absorption of radiation," Proc. R. Soc. London, Ser. A **114**, 243-265 (1927).
25. C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, 1985).
26. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 2nd ed. (Springer, 2008).
27. H. J. Carmichael, "Coherence and decoherence in the interaction of light with atoms," Phys. Rev. A **56**, 5065-5099 (1997).
28. B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed. (Springer, New York, USA, 2002).