한국학교수학회논문집 제 15 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 15, Number 1, 183-197, March 2012

기하프로그램을 활용한 정다각형 외연의 확장에 대한 연구[1)]

서보억[2)]

평면기하는 가장 오래 된 학교수학 학습내용 중 하나이며, 중등학교에서 학생들의 사고력 및 창의력 신장에 중요한 역할을 한다. 평면기하 학습내용 중 정다각형은 초등학교, 중학교에서 볼록 정다각형을 중심으로 다루어지고 있는데, 본 연구에서는 학교에서 다루어지는 정다각형에 대한 학습내용을 기초지식으로 설정하고, 이를 기초로 정다각형 외연의 확장 과정을 체계적으로 탐색하였다. 특히 기하프로그램을 활용한 귀납적 탐구과정이 기하학습 내용 확장에 유의미한 방향을 제시해 줄 수 있다는 구체적 사례를 제시하였다. 본 연구결과를 통해, 정다각형에 대한 심화학습 자료 개발 및 기하 연구를 위한 바람직한 탐구 방향 제시가 기대되어진다.

주요용어 : 정다각형, 오목정다각형, 심화프로그램, 수학영재교육, 교수-학습자료

I. 서론

평면 기하에 대한 연구는 가장 오래된 연구 분야 중의 하나이며, 중등학교 수학영재교육에서 매우 중요한 역할을 하고 있고, 그 중요성은 날로 증대되고 있다(강숙희·장영숙·박숙희·정태희·임희준, 2000). Freudenthal(1973)은 기하는 '공간을 파악하는 것으로, 우리가 이 공간 속에서 살고, 호흡하고, 활동하기 위해서는 그 공간을 알고, 탐구하고, 정복할 수 있어야 한다'고 강조한다. 또한 한인기와 김문섭(2007)은 평면 도형을 기반으로 하는 공간 도형에 대해 '우리를 둘러싼 주변 환경 자체이기 때문에 수학화의 일차적인 대상이 된다'고 언급하였는데, 이는 곧 평면 도형 역시 수학을 학습하는 학습자가 다루어야 할 가장 기초적인 인식의 대상이 될 수밖에 없음을 시사해 주고 있다. 따라서 학생들이 평면 도형에 대한 창의적 사고력을 기르고, 올바르게 표현하도록 지도하는 것은 수학교육의 중요한 과제 중의 하나라고 할 수 있다.

하지만, 한인기(1999)는 많은 학생과 교사들이 수학적 활동, 특히 평면 기하의 학습이나 탐구에서 그리 유쾌한 경험을 제공받지 못한다고 지적한다. 그 이유는 다양하겠지만, 기하학적 개념들, 증명 과정, 연역적 논증 과정이 방정식, 함수 단원의 문제에 비해 상대적으로 어렵게 인식되고 있기 때문이다. 실제 대수적인 문제와 달리, 평면 기하와 관련된 정리나 문제들은 그 해결 과정 혹은 증명 과정이 알고리즘화 되기 어려울 뿐만 아니라, 논증 과정에 대

1) 이 논문은 2011년도 대구가톨릭대학교 교내 연구비 지원에 의해 수행된 연구임.
2) 대구가톨릭대학교 (eukeuk@cu.ac.kr)

한 근거를 제시하는 것도 쉬운 일이 아니다.

평면 기하 학습에서 발생하는 이러한 어려움을 극복하기 위해서는 평면 기하를 좀 더 깊이 있게 알아야 할 필요가 있다고 지적되고 있는데(한인기, 1999), 이는 평면 기하에 대한 지식은 폭넓게 아는 것이 중요한 것이 아니라, 이미 우리가 알고 있는 기하 지식들을 체계화하고, 이것을 통해 우리의 생각을 기하적 언어로 표현할 수 있는 깊이 있는 탐구 활동이 필요함을 의미한다. 이러한 의미에서 서보억과 김진호와 김용대(2011)는 다양한 평면도형에 대한 탐구 활동이 3대 작도불능문제의 해결에도 유의미한 도움이 됨을 구체적으로 제시하고 있고, 평면 기하를 탐구하기 위한 방법적인 측면에서 강옥기 외(2012)는 스스로 탐구하고 발견하는 활동을 강조하고 있으며, 이러한 발견은 수학자료에 대한 탐색 및 문제 파악, 관찰 탐색, 규칙성 발견 및 개념 정리, 적용 및 응용 등의 단계를 거쳐야 한다고 제안하고 있다. 또한 NCTM(1989)은 평면 도형 학습에 컴퓨터 그래픽 프로그램을 사용한다면, 평면 도형에 대한 시각화를 바탕으로 학습자 스스로 수학적 지식을 추측하고, 추측한 그 사실을 확인하는 능동적 학습 환경이 제공될 수 있음을 지적하고 있다.

평면 기하 내용 중 정다각형과 관련된 국내 연구를 분석해 보면, 첫째, 정다각형의 작도와 관련된 연구로 김석룡(1989), 한인기(2008) 등의 연구가 있었으며, 둘째, 정다각형에서 대각선의 길이간의 관계에 대한 연구를 조인주(2006) 등이 수행하였고, 셋째, 오목다각형 중에서 별다각형의 종이접기에 대한 연구를 김민석(2004) 등이 수행하였다. 이를 종합하면, 볼록한 정다각형의 작도 및 대각선의 성질 규명, 오목한 정다각형 중 별 정다각형의 종이접기 방법 등에 대한 연구가 수행되었음을 알 수 있다. 유익승과 한인기와 신현용(2006), 한인기(2007), 서보억과 권영인(2007) 등이 평면 기하를 소재로 지식 확장에 대한 몇 몇 연구가 수행되었지만, 학교수학에서 다루고 있는 볼록한 정다각형을 출발점으로 삼아, 정다각형의 외연을 확장한 체계적인 연구는 아직 없는 것으로 나타났다.

따라서 본 연구에서는 평면 도형의 중요한 탐구 주제이며, 일상생활에서 가장 흔히 접할 수 있는 정다각형을 기초로 하여, 정다각형의 외연 확장 과정을 탐색하는 문헌연구이다. 이러한 목적을 달성하기 위해 본 연구는 첫째, 수학교과서에서 다루어지고 있는 정다각형에 대한 학습내용을 수학기초지식으로 설정하고, 이에 대한 분석을 바탕으로 정다각형의 외연 확장을 위한 개념적 틀을 추출할 것이다. 둘째, 이를 바탕으로 TI(Texas Instrument)사의 Cabri Geometry II(이하, Cabri)라는 동적기하프로그램을 활용하여 정다각형 외연의 확장 과정을 구체적으로 탐색한다. 이를 통해 정다각형에 대한 심화학습을 위한 교수-학습 자료 개발 및 평면 기하 학습을 위한 의미있는 연구방향 제시가 기대되어진다.

II. 정다각형에 대한 문헌 분석

우리 주변을 살펴보면 다양한 종류의 다각형들이 있다. 직사각형 모양을 한 책상, 정팔각형 모양의 창문, 정삼각형 모양의 창살처럼 볼록한 다각형이 있는가 하면, 별 모양과 같이 오목한 다각형도 있다. 이번 절에서는 정다각형 외연의 확장을 위한 기초적인 분석 과정으로, 초등학교, 중학교 교과서, Euclid 원론 및 여러 문헌에 대한 탐색 결과를 제시한다.

1. 수학교과서 분석

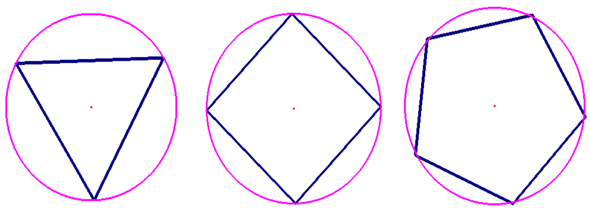
정다각형은 초등학교 4학년 도형 영역에서 정삼각형, 정사각형의 개념과 그 성질을 학습한 다음, 간단한 다각형과 함께 정다각형을 학습하고 있다. 이때, 정다각형은 '변의 길이가 모두 같고, 각의 크기가 모두 같은 다각형'으로 정의하고 있다. 중학교 1학년 기하 영역에서는 평면 도형의 성질 단원에서 내각과 외각의 크기를 학습한 다음, 정n각형에서 한 내각의 크기와 한 외각의 크기를 학습하고 있다(교육인적자원부, 2007). 따라서 초등학교와 중학교에서 다루고 있는 정다각형은 다음 두 가지 조건을 만족하는 다각형을 의미한다(유희찬 외, 2008). 예를 들면, 정삼각형은 세 변의 길이가 같고 세 각의 크기가 모두 60°인 다각형이고, 정사각형은 네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 모두 90°인 다각형이며, 정오각형은 다섯 변의 길이가 같고 다섯 각이 모두 108°인 다각형이다.

조건 1. 다각형을 이루는 모든 변의 길이는 같다. 조건 2. 각 꼭짓점에서 만들어지는 내각의 크기는 모두 같다.

2. Euclid 원론에서 정다각형

원론 1권에는 23개의 정의가 제시되어져 있다. 이 정의 중에서 정의 20(정삼각형에 대한 정의), 정의 21(정사각형에 대한 정의)이 정다각형과 관련이 있다. 또한 원론의 첫 번째 명제가 정삼각형을 작도하는 명제이고, 명제 45가 주어진 선분위에 정사각형을 작도하는 명제이다. 원론에서 정다각형이 가장 많이 언급된 곳은 제 4권이다. 제 4권은 총 7개의 정의와 16개의 명제가 있는데, 이 모든 명제가 원과 관련시켜 정다각형을 다루고 있다. 특히, 원에 내접 혹은 원에 외접하는 정다각형에 대한 명제가 주를 이루고 있다. 예를 들어, 명제 2는 정삼각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 6은 정사각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 11은 정오각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 15는 정육각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 16은 정십오각형을 원에 내접시키는 방법을 다루고 있다. 원론에 대한 분석을 바탕으로, 정다각형 외연 확장을 위한 개념적 틀 세 번째를 조건 3과 같이 추출하였다.

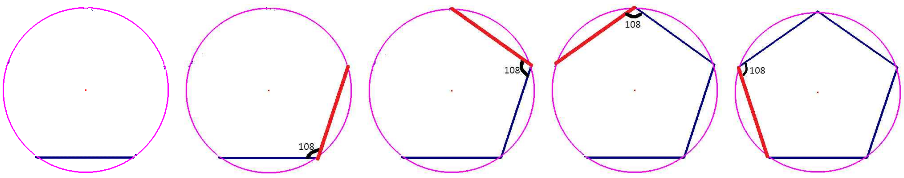
조건 3. 모든 다각형은 원에 내접시킬 수 있다.



[그림 1] 정다각형

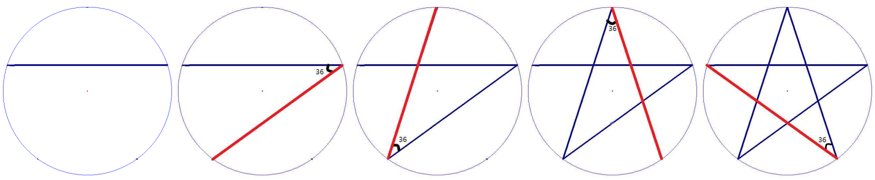
3. 오목한 정다각형

학교수학에서는 원에 내접하는 볼록한 정다각형만을 다룬다. 하지만, 박한식(1991), Coxeter(1973), Grünbaum(2003) 등은 오목한 정다각형도 존재하고 있음을 명확히 하고 있고, 그 교육적 가치를 언급하고 있다. 이들 문헌에 대한 효과적인 분석을 위해 정다각형이 되기 위한 조건 1과 조건 2를 적용시켜 보자. 위의 두 조건 중에서 정다각형을 만들기 위해 의미 있는 조건은 조건 2이다. 조건 1에서 언급한 변의 길이는 정다각형을 형성하는데 큰 의미가 없다. 왜냐하면, 변의 길이에 상관없이 서로 닮음인 정다각형을 얻기 때문이다. 하지만 조건 2에서 언급한 각의 크기는 정다각형의 종류를 결정하기 때문에 매우 의미 있는 조건이다. 실제로, 그림 2와 같이 한 변의 길이를 결정한 상태에서 한 내각의 크기를 $108°$로 일정하게 유지하면 정오각형을 그릴 수 있다.



[그림 2] 정5각형 그리는 과정

동일한 방법으로 한 각의 크기가 $36°$인 정다각형은 그림 3과 같이 그릴 수 있다.



[그림 3] 정5/2각형 그리는 과정

박한식(1991)은 이와 같은 별 모양의 다각형을 오목인 정다각형이라고 하였고, 그 이름을 정5/2각형이라고 명명하고 있다. 이러한 이름 붙이기의 근거는 매우 간단하다. 정n각형에서 한 내각의 크기를 d_n이라고 하면, $d_n = 180(n-2)/n$인데, $d_n = 36$일 때 n의 값을 계산하면 $5/2$가 되기 때문이다.

III. 정다각형의 외연 확장을 위한 탐구 절차

학교수학에서 정n각형이라고 할 때, n의 값의 범위는 3이상의 자연수이다. 하지만 다양한 문헌에서는 n의 값이 확장될 수 있음을 확인할 수 있다. 즉, 정다각형이라고 부를 수 있는 외연이 확장될 수 있음을 알 수 있다. 그렇다면, 이러한 확장이 학교수학의 범주에서 가능한지에 대해 알기 위해, 학교에서 학습하는 정다각형의 학습 내용을 출발점으로 하여 확

장된 정다각형을 다룰 수 있는지 탐색해야 한다. 즉, n의 수로 가능한 수의 범주는 어디까지이며, 어떠한 패턴을 가지는지 탐구할 필요가 있다. 본 연구에서는 이러한 탐구의 원활한 진행을 위해 동적 기하프로그램을 사용하였고, 탐구의 효율성을 위해 연구 수행 과정과 절차를 체계적으로 설정하였다.

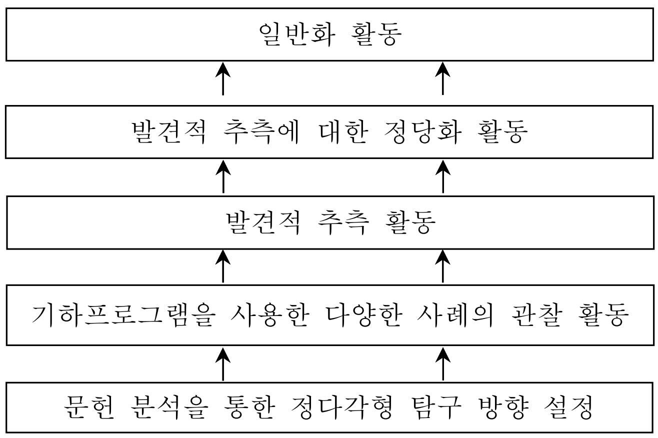
1. 동적 기하프로그램

새로운 지식의 형성과 발견을 위해서 다양한 경험은 매우 중요하다. 정다각형 외연의 확장을 위한 탐구 활동을 원활하게 진행하기 위해서는 다양한 정다각형에 대한 관찰과 실험이 필수적이다. 이러한 정다각형에 대한 경험을 풍부하게 하고, 다양한 사례를 얻기 위해 본 연구에서는 기하프로그램을 사용하였다.

본 연구에서 사용한 기하프로그램은 TI(Texas Instrument)에서 개발한 Cabri이다. Cabri는 인간의 작도활동에 잘 부합되도록 설계된 기하프로그램으로 정다각형의 작도와 도형의 다양한 변형이 비교적 쉬워 본 연구의 진행에 가장 적합한 것으로 판단되었다.

2. 탐구 활동의 절차

지식의 확장 과정은 곧 지식의 발견 과정이다. 수학에 존재하는 두 가지 논리, 즉 발견의 논리와 정당화의 논리 중에 발견과 관련된 논리는 귀납적 과정을 통해 성취된다. 본 연구 목적인 정다각형 외연 확장은 지식의 발견과 밀접한 관계를 가지고 있으므로, 이러한 목적 달성과 탐구의 성공적 수행을 위해 귀납적 탐구활동이 절대적으로 요구된다고 하겠다. 따라서 본 연구의 성공적 수행을 위해 Taba(1967)가 제시한 귀납적 탐구 모델을 도입하였으며, 이를 바탕으로 그림 4와 같이 탐구 절차를 재구성하였다.



[그림 4] 탐구 절차

IV. 정다각형 외연 확장을 위한 탐구 활동

이번 절에서는 앞에서 설정한 탐구절차에 따라 정다각형 외연 확장의 탐구과정을 구체적으로 살펴본다.

1. 탐구 방향 설정

문헌 분석에서 얻은 세 가지 조건으로부터 탐구의 기본 방향을 세 가지로 설정하였다.

첫째, 정다각형의 모든 꼭짓점은 동일한 원 위에 있어야 하므로 원에 내접하는 정다각형을 관찰한다.

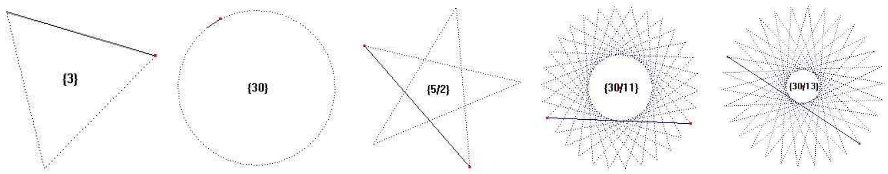
둘째, 정다각형을 구별하는 기준이 되는 정다각형의 꼭짓점 및 변의 개수에 초점을 두고 고찰한다.

셋째, 정다각형을 구별하는 또 다른 기준인 한 내각의 크기에 관심을 두고 탐구한다.

2. 기하프로그램을 사용한 정다각형의 다양한 관찰 활동

본 연구에서는 Cabri 기하프로그램을 사용하여 정다각형에 대한 관찰 활동 및 사례를 수집하여 정리하였다. 서보억(2005)은 Cabri에 대해 컴퓨터과학, 수학교육학, 수학, 인공지능, 심리학, 교사들의 합동 연구로 개발되었다고 언급하면서, 인간의 작도활동과 가장 유사한 방법으로 실행된다고 보고 있다.

Cabri를 이용해 정다각형을 그리는 활동을 수행하면 그림 5와 같이 볼록한 정다각형은 3각형에서 30각형까지 그릴 수 있고, 오목한 정다각형은 5각형부터 30각형까지 그릴 수 있다.

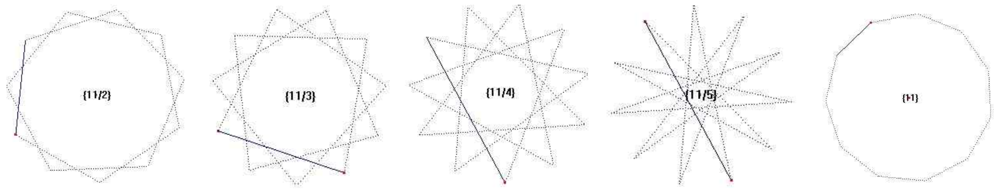


[그림 5] Cabri로 그린 여러 정다각형

그림 5에서 몇 가지 특이한 점이 관찰되어진다. 관찰결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 볼록인 정다각형은 최소한의 각(변)의 수가 3이지만, 오목인 정다각형은 5이다. 둘째, 볼록인 정n각형은 n의 값으로 자연수를 가지지만, 오목인 정n각형은 n의 값으로 $5/2$,, $30/11$, $30/13$처럼 유리수값을 가진다. 셋째, 오목인 정다각형에서는 각의 개수는 서로 같지만, 모양이 서로 다른 다각형이 존재한다. 예를 들어, 그림 6은 각의 개수는 11개로 동일하지만, 모양이 서로 닮음이 아닌 서로 다른 오목 정11각형 4개를 제시한 것이다. 넷째, 오목인 정다각형 내부에는 볼록인 정다각형 모양이 존재한다.

결과적으로 Cabri를 활용한 정다각형에 대한 다양하고 폭넓은 관찰활동과 경험활동은 새로운 수학적 개념 형성에 필요한 내적직관을 형성할 수 있었다.



[그림 6] Cabri로 그린 각이 11개인 오목한 정다각형

3. 다양한 작도 활동에 대한 관찰과 경험을 통한 발견적 추측 활동

앞 단계에서의 다양한 관찰과 경험은 새로운 수학적 사실을 유추하고 추측하는 활동으로 연결할 수 있었다. 예를 들어, 각의 개수에 따라 볼록과 오목인 정다각형은 모두 몇 개까지 존재할 수 있는가? 각 정다각형의 내각의 크기의 총합은 얼마이고, 한 내각의 크기는 얼마인가? 각의 개수가 같은 서로 다른 정다각형 사이에는 어떤 관계가 있는가? 와 같은 의문을 제기할 수 있다.

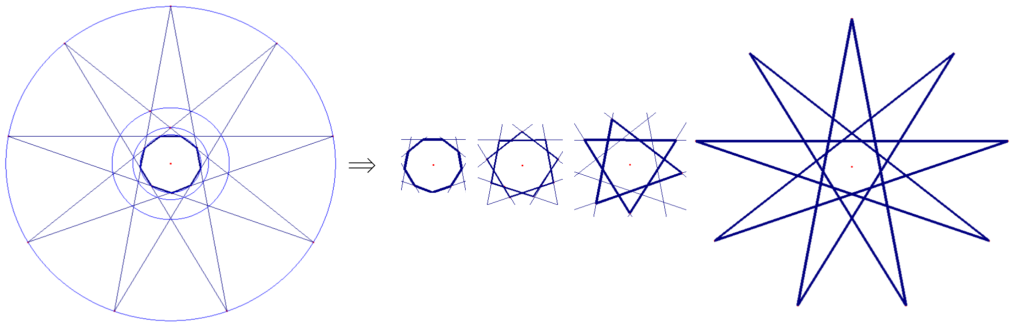
이러한 의문을 해결하기 위해 앞 단계에서 얻은 '오목인 정다각형 내부에 볼록인 정다각형이 존재한다'는 사실에 집중하였다. 정11/2각형은 정11각형의 각각의 변이 이웃하지 않지만 가장 인접한 한 변의 연장선과의 교점을 서로 연결하여 만들어지고, 정11/3각형은 정11각형의 각각의 변이 세 번째에 이웃하고 있는 한 변의 연장선과의 교점을 서로 연결하여 만들어지고, 11/4각형은 정11각형의 각각의 변이 네 번째에 이웃하고 있는 한 변의 연장선과의 교점을 서로 연결하여 만들어지고, 11/5각형은 정11각형의 각각의 변이 다섯 번째에 이웃하고 있는 한 변의 연장선과의 교점을 서로 연결하여 만들어진다는 사실을 발견하였다. 따라서 볼록인 정n각형을 출발점으로 하여 오목인 정n각형을 아래와 같은 절차를 통해 모두 생성할 수 있음을 추측할 수 있었다.

첫째, 정n각형을 그리고, 내접원의 중심 O를 잡는다. 둘째, 정n각형의 각각의 변을 연장한 직선을 긋는다. 셋째, n개의 직선이 만드는 교점들 중에서 원의 중심 O에서 동일한 거리에 있는 점들을 선분으로 서로 연결한다. 넷째, 앞 단계의 절차를 수행 가능한 단계까지 수행하고, 점 O를 중심으로 하는 동심원을 그린다. 다섯째, 볼록인 정다각형과 오목인 정다각형이 모두 생성되었는지 확인하고, 각각의 정다각형의 전체 내각의 총합과 한 내각의 크기를 구한다. 여섯째, 각각의 정다각형의 이름을 명명한다.

이제 정9각형과 정10각형을 예로 들어 구체적으로 어떻게 탐구활동을 진행하였는지 제시하고자 한다.

1) 정9각형 탐구

앞에서 제시한 절차에 따라 볼록한 정9각형을 이용하여 오목한 정9각형을 생성하면 그림 7과 같다.



[그림 7] 볼록한 정9각형으로부터 오목한 정9각형의 생성

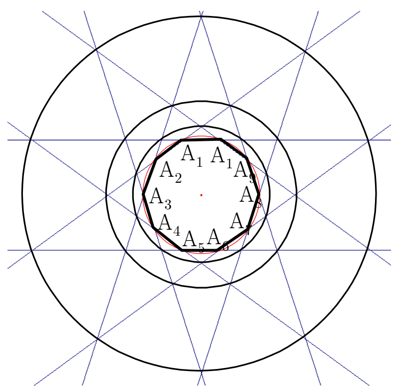
생성한 4 종류의 정다각형에 대한 내각의 크기의 총합, 한 내각의 크기를 각각 구하고, 박한식(1991)이 제시한 방식으로 이름을 명명하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 각이 9개인 정다각형의 분류와 명명

구분 \ 생성 순서(k)	1	2	3	4
내각의 크기의 총합	1260°	900°	540°	180°
한 내각의 크기	140°	100°	60°	20°
명명하기(정n/k각형)	정9각형	정9/2각형	정9/3각형 (정3각형 3개)	정9/4각형

2) 정10각형 탐구

앞에서 제시한 절차에 따라 볼록한 정10각형을 이용하여 오목한 정10각형을 생성하면 그림 8과 같다.



[그림 8] 볼록으로부터 오목한 정10각형의 생성

그림 8과 같이 생성한 4 종류의 정다각형에서, 내각의 크기의 총합, 한 내각의 크기를 각각 구하고, 박한식(1991)이 제시한 방식으로 이름을 명명하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 각이 10개인 정다각형의 분류와 명명

생성 순서(k) / 구분	1	2	3	4
내각의 크기의 총합	1440°	1080°	720°	360°
한 내각의 크기	144°	108°	72°	36°
명명하기(정n/k각형)	정10각형	정10/2각형 (정5각형 2개)	정10/3각형	정10/4각형 (정5/2각형 2개)

3) 추측 결과

이러한 활동을 통해 정다각형에 대한 추측결과를 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 정n/k각형에서 n은 원에 내접하는 꼭짓점의 개수 혹은 정다각형의 변(각)의 개수이다. 또한, k는 정다각형을 만드는 변 사이에 있는 변의 개수에 1을 더한 값 혹은 점 O를 중심으로 만들어지는 동심원의 순서에 따른 매긴 값이다. 둘째, 정n/k각형에서 n이 짝수일 때 내각의 합은 360°가 가장 작고, 홀수일 때는 180°가 가장 작다. k의 값이 1커질수록 내각의 총합은 360°씩 감소한다. 따라서 정n/k각형의 내각의 총합이 0°보다 커야하므로, 정다각형이 존재하기 위한 k의 범위는 $n/2 > k$이다. 셋째, 정n/k각형에서 k의 값에 따른 내각의 크기는 등차수열을 이룬다. 넷째, 정n/k각형에서 n/k의 기약분수를 p/q라고 할때, $p/q = N$가 자연수이면 정N각형 k개로 구성되어지고, p/q가 유리수이면 정p/q각형 k/q개로 구성된다.

4. 발견적 추측에 대한 정당화 및 일반화 활동

이번 단계에서는 앞 단계에서 얻은 추측이 참임을 어떻게 밝혔는지 그 과정을 구체적으로 제시한다. 서보억과 권영인(2008)은 일반화란 '구체적이고 특별한 내용들로부터 추상화하여 주어진 내용들 사이의 관계, 유사성 등을 찾아 본질적인 것이 무엇인지 결정하는 것'이라고 보았다. 또한 일반화는 공통된 요소를 추출하여 추상화한 후, 그 적용의 폭을 확장시켜 보다 강한 추상성을 갖는 개념이나 원리로 발전시키는 사고 활동이다.

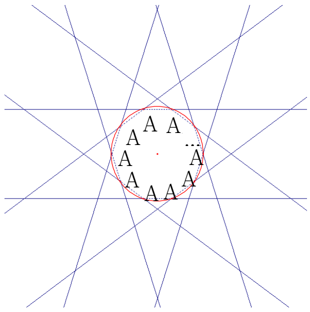
권성룡(2003)은 '수학은 본질적으로 증명에 관한 학문이므로 모든 수학적 활동의 결과는 비형식적이더라도 정당화되어질 필요가 있다'라고 주장하였다. 또한 NCTM(2000)은 학교수학에서 추론과 증명을 강조하며, 다양한 형태의 추론과 증명 방법들을 선택하고 사용하기를 권장한다. 발견적 추측에 대한 정당화 활동에서 수학적 정당화는 어떤 수학적 내용에 대해 수학적 논리를 따르는 형식적인 증명과 더불어 자기 주도적 지각 경험, 전문가나 도서의 권위에 의한 확신 등에 의해 본인이나 다른 사람을 납득시키기 위한 행위이다. 따라서 귀납적 탐구모형의 마지막 단계인 일반화 활동은 발견적 추측 결과에 대한 정당화 및 증명 활동을 통해 획득한 지식을 종합하고 보편화하는 단계라고 볼 수 있다.

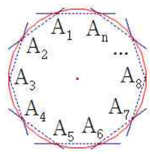
1) 정다각형의 내각의 크기의 총합

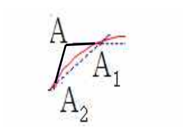
원에 내접하는 볼록한 정n각형(제1 정n각형)이 주어져 있다(그림 9, 그림 10의 점선). 정다각형의 꼭짓점이 원과 접하는 점을 각각 $\mathrm{A_1, A_2}$, $\cdots$, $\mathrm{A_n}$이라 하면, 제1 정n각형은 학교에서 학습한 정n각형이다. 이때, 한 내각의 크기를 ${}_n a_1$, 전체 내각의 크기의 총합을 ${}_n S_1$라 하자. ${}_n a_1$의 값을 구하기 위해 각 $\mathrm{A_1}$부분을 그림 11과 같이 확대해 보자(점 A는 두 변의 연장선의 교점). 그러면, $\angle \mathrm{AA_1A_2}$는 한 외각의 크기이므로 $2\pi/n$이고,

$${}_n a_1 = \pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi(n-2)}{n}$$

가 된다. 이로부터 ${}_n S_1 = \pi(n-2)$를 얻고, 이는 중학교 1학년에서 학습한 내용과 일치한다.



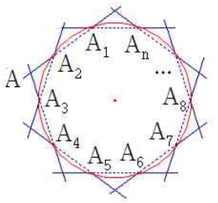




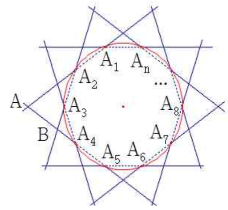
[그림 9] 정n각형과 변의 연장　　[그림 10] 제1 정n각형　　[그림 11] 각 $\mathrm{A_1}$의 크기

첫 번째, 원 위 n개의 점을 지나는 다각형을 Cabri를 이용하여 그려 보자. 그리고 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$와 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}$의 교점, $\overleftrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}$과 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{\mathrm{A_{i-1}A_i}}$와 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_iA_{i+1}}}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{\mathrm{A_{n-1}A_n}}$과 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_nA_1}}$의 교점, $\overleftrightarrow{\mathrm{A_{n-1}A_n}}$과 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_nA_1}}$의 교점, $\overleftrightarrow{\mathrm{A_nA_1}}$과 $\overleftrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$의 교점을 연속적으로 이어 다각형을 만들면, 그림 12와 같은 오목한 정n각형을 얻을 수 있었다. 앞으로 만들 새로운 정다각형과 구분하기 위해 이 정다각형은 제2 정n각형이라고 부르자.

제2 정n각형의 한 내각의 크기를 ${}_n a_2$, 전체 내각의 크기의 총합을 ${}_n S_2$라 하자. ${}_n a_2$의 값을 구하기 위해 그림 12에서 $\triangle \mathrm{AA_2A_3}$을 주의 깊게 보자. 삼각형의 외각의 크기에 대한 성질에 의해서 $\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{AA_2A_3} = \angle \mathrm{A_2A_3A_4}$이다. 그런데, $\angle \mathrm{AA_2A_3}$는 한 외각의 크기이므로 $2\pi/n$가 된다. 따라서 ${}_n a_2 = \angle \mathrm{A} = {}_n a_1 - 2\pi/n$가 된다. 즉, ${}_n a_2 = \pi(n-4)/n$이 되고, 이로부터 ${}_n S_2 = \pi(n-4)$를 얻을 수 있었다.



[그림 12] 제2 정n각형



[그림 13] 제3 정n각형

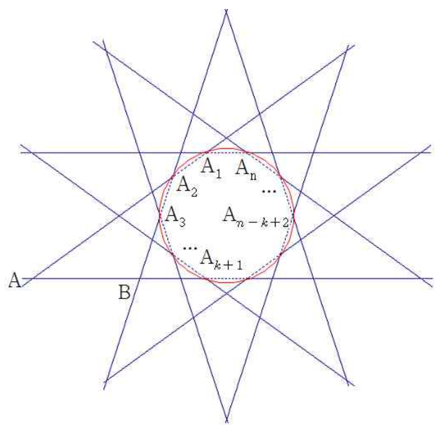
두 번째, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$과 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$의 교점, $\overleftrightarrow{A_3A_4}$과 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$과 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$과 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$의 교점을 연속적으로 이어 다각형을 만들어 보자. 그러면 그림 13과 같은 오목한 정n각형을 얻을 수 있고, 이 도형을 제3 정n각형이라고 부르기로 하자.

제3 정n각형의 한 내각의 크기를 ${}_na_3$, 전체 내각의 크기의 총합을 ${}_nS_3$라 하자. ${}_na_3$의 값을 구하기 위해 그림 13에서 $\triangle AA_2B$를 주의 깊게 보자. 삼각형의 외각의 크기에 대한 성질에 의해서 $\angle A + \angle AA_2B = \angle A_3BA_4$이다. 그런데, $\angle AA_2B$는 한 외각의 크기이므로 $2\pi/n$가 된다. 따라서 ${}_na_3 = \angle A = {}_na_2 - 2\pi/n$, 즉, ${}_na_3 = \pi(n-6)/n$를 얻을 수 있고, ${}_nS_3 = \pi(n-6)$을 얻는다.

세 번째, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$과 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$의 교점, $\overleftrightarrow{A_4A_5}$과 $\overleftrightarrow{A_7A_8}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$과 $\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}$과 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$의 교점을 연속적으로 이어 다각형을 만들어 보자. 그러면 새로운 오목한 정n각형을 얻을 수 있고, 이 도형을 제4 정n각형이라고 부르기로 한다.

이와 같은 방법을 반복적으로 실행하여 새로운 오목한 정n각형을 생성해 낼 수 있고, 임의의 단계에 이르게 된다.

$(k-1)$번째, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$과 $\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$의 교점, $\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$과 $\overleftrightarrow{A_{2k+1}A_{2k+2}}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$과 $\overleftrightarrow{A_{i+k}A_{i+k+1}}$의 교점, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_{n-k+1}A_{n-k+2}}$과 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$의 교점을 연속적으로 이어 다각형을 만들어 보자. 그러면 그림 14와 같은 오목한 정n각형을 얻을 수 있는데, 이 도형을 제k 정n각형이라고 부르기로 하자.



[그림 14]

제k 정n각형의 한 내각의 크기를 ${}_n a_k$, 전체 내각의 크기의 총합을 ${}_n S_k$라 하자. ${}_n a_k$의 값을 구하기 위해 그림 14에서 $\triangle \mathrm{AA_2B}$를 주의 깊게 보자. 삼각형의 외각의 크기에 대한 성질에 의해서 $\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{AA_2B} = \angle \mathrm{A_3BA_{k+1}}$이다. 그런데, $\angle \mathrm{AA_2B}$는 한 외각의 크기이므로 $2\pi/n$가 된다. 따라서 ${}_n a_k = \angle \mathrm{A} = {}_\mathrm{n} a_{k-1} - 2\pi/n$가 된다. 그런데, 앞의 규칙에 의해서

$$ {}_n a_{k-1} = \frac{\pi(n-2k+2)}{n} $$

를 얻을 수 있다. 따라서,

$$ {}_n a_k = \frac{\pi(n-2k+2)}{n} - \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi(n-2k)}{n} $$

이 되므로 ${}_n S_k = \pi(n-2k)$를 얻는다.

지금까지의 증명을 통해 아래와 같은 정의와 명제를 결론으로 도출할 수 있었다.

(정의 1) 원 위에 n각형의 점을 일정한 간격으로 찍고 k간격으로 선분을 선택하여 연속적으로 다각형을 만들 때, 생기는 다각형을 제k 정n각형이라고 부른다.(단, k는 자연수이다.)

(제k 정n각형 정리) 제k 정n각형에서 한 내각의 크기 ${}_n a_k$는 $\pi(n-2k)/n$이고, 전체 내각의 총합은 ${}_n S_k$는 $\pi(n-2k)$가 된다.

(따름정리) 원 위에 일정한 간격으로 n개의 점을 잡았을 때, 제k 정n각형이 만들어질 수 있는 k값의 범위는 $n > 2k$이다. 즉, $k < \frac{n}{2}$이어야 한다.

(증명) ${}_n S_k$은 0보다 크다. 즉, ${}_n S_k = \pi(n-2k) > 0$이므로 $n-2k > 0$이다. 즉, $k < n/2$이다.

2) 제k 정n각형에서 한 내각의 크기를 이용한 새로운 이름 붙이기 활동

일반적으로 우리가 알고 있는 볼록한 정다각형은 정n각형이라는 이름을 가지고 있다. 위에서 새롭게 만든 오목한 정다각형에도 이와 같은 방식으로('오목한'이라는 단어를 사용하지 않고) 명명하는 것이 더 일관성 있고, 외연의 확장이라는 입장에서 더 타당할 것이다. 실제로 $k=1$일 때, 볼록한 정다각형이고, $k \geq 2$이면 오목한 정다각형 모양을 가진다. 그런데, 볼록 정n각형은 유일하지만, 오목 정n각형은 유일하지 않다. 따라서 본 연구의 결과로부터 정의 2에 대한 타당성을 얻을 수 있다.

(정의 2) 제k 정n각형의 새로운 이름을 정n/k각형이라고 한다.

본 연구를 통해 볼록한 정다각형과 오목한 정다각형 모두 동일한 방식으로 명명할 수 있음을 수학적으로 명확히 하였다.

V. 요약 및 결론

본 연구는 학교수학에서 다루는 정다각형 외연을 확장하기 위한 방법 및 이에 따른 교수학습 과정을 체계화하기 위한 문헌 연구로, 첫째, 학교에서 학습하는 정다각형의 개념으로부터 외연을 확장하기 위한 개념적 틀을 추출하였고, 둘째, 동적기하프로그램을 활용하여 정다각형의 외연 확장의 절차를 설정하고, 그 과정을 상세히 기술하였다.

본 연구에서는 정다각형의 탐색을 위한 개념적 틀 세 가지를 첫째, 다각형을 이루는 모든 변의 길이는 같고, 둘째, 각 꼭짓점에서 만들어지는 내각의 크기는 모두 같으며, 셋째, 모든 다각형은 원에 내접시킬 수 있다로 추출하였다. 이 세 가지로부터 정다각형의 외연 확장을 위한 탐구활동을 다섯 개의 수행 단계로 세분화하여 진행하였다.

문헌 분석을 통한 정다각형의 탐구 방향 설정 단계에서는 문헌 분석에서 얻은 세 가지 조건으로부터 탐구의 기본 방향을 설정하였고, 이 기본 방향에 따라 수행한 연구 결과는 다음과 같다. 첫째, 볼록한 정다각형으로부터 오목한 정다각형을 기하학적으로 생성해 낼 수 있었다. 구체적으로 볼록한 정n각형을 그린 다음, 내접원의 중심 O를 잡고 정n각형 각각의 변의 연장선을 긋고 이들이 만나는 교점을 서로 연결하면, 오목한 정다각형을 모두 생성해 낼 수 있었다. 둘째, 볼록한 정n각형은 본질적으로 유일하지만, 오목한 정n각형은 유일하지 않았다. 즉, 오목한 정다각형은 각의 개수와 변의 개수는 서로 같지만 서로 닮음이 되지 않는 정다각형이 존재한다. 셋째, 정다각형의 이름 앞에 '볼록한'은 붙이지 않아도 한 개의 정n각형을 지칭하지만, '오목한'은 붙이지 않으면 한 대상을 지칭할 수 없다. 하지만 '오목한'이라는 용어를 사용하지 않고, 오목한 정n각형을 정n/k각형으로 명명할 수 있는 원리를 발견하였다. 이때, n은 각(변)의 개수이고, k는 볼록한 정n각형에서 오목한 정n각형을 생성해 낸 순서의 값이다. 넷째, 정n/k각형의 내각의 총합은 $\pi(n-2k)$이고 한 내각의 크기는 $\pi(n-2k)/n$이 된다. 이때 내각의 총합의 최솟값은 n이 짝수일 때는 $360°$이고, n이 홀수일 때는 $180°$이다. 다섯째, 정n/k각형에서 n이 일정하면, k의 값에 따른 한 내각의 크기는 등차수열을 이룬다. 예를 들어 $n=15$일 때, 한 내각의 크기를 a_k라고 하면, $a_1=156°$, $a_2=132°$, $a_3=108°$, $\cdots$이므로 일반항 $a_k=-24n+180°$ (단, $k \leqq 7$인 양의 정수)가 된다. 여섯째, 정n/k각형이 존재하기 위한 조건은 $n/k>2$인 (단, n,k는 자연수) 기약분수이어야 한다. 만약 n/k가 기약분수가 아니면, 한붓그리기가 불가능한 분리된 도형이 만들어진다.

본 연구 결과를 통해, 정다각형과 같이 학교에서 제한적으로만 다루어지고 있는 학습 주제에 대한 수학적 탐구 활동의 가능성과 더불어, 실제 탐구활동의 수행 방법 및 절차에 대한 체계적 이해가 가능하여졌다. 또한, 본 연구는 중학교 심화학습 자료뿐만 아니라 다양한 교수-학습 자료 개발 방법에 유의미한 연구 방향을 제시할 수 있었다.

참고문헌

강숙희·장영숙·박숙희·정태희·임희준 (2000). 작도 활동을 통한 기하학 탐구. 한국교육개발원 연구자료 CR2000-15-14.

강옥기·강윤수·고상숙·고호경·권나영·김구연·김래영·김민경·김응환·김익표·노선숙·서보억·신재

홍·이수진·이중권·정인철·한인기·허혜자·황우형 (2012). 수학교육학 신서. 서울: 교우사.
교육인적자원부 (2007). 2007년 개정 수학과 교육과정. 서울: 교육인적자원부.
권성룡 (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 초등수학교육, 제7권2호, 85-99.
김민석 (2004). 종이 띠에 의한 정다각형, 정별다각형 접기. 제주대학교교육과학연구소 백록논총, 6(2), pp.125-143.
김석룡 (1989). 종이접기에 의한 정다각형의 작도. 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.
박한식 (1991). 교직수학. 서울: 대한교과서주식회사.
서보억 (2005). 수학교육 소프트웨어 소개(5). 한국수학교육학회 뉴스레터, 제21권2호, 17-21.
김진호·김용대·서보억 (2011). 3대 작도 문제 해결을 위한 곡선과 기구. 서울: 교우사.
서보억・권영인 (2007). 코사인 법칙의 발달과정 분석과 논증을 통한 확장에 대한 연구. 한국수학사학회지, 제20권3호, 147-166.
서보억・권영인 (2008). 개인차를 고려한 중학교 기하 교수-학습 방법 개발. 수학교육, 제47권2호, 113-132.
유익승・한인기・신현용 (2006). 삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구. 수학교육논문집, 제20권1호, 9-18.
유희찬・류성림・한혜정・강순모・제수연・김명수・천태선・김민정 (2008). 중학교 수학 1. 서울: (주)미래엔 컬처그룹.
조인주 (2006). 정다각형에서 대각선 길이간의 관계 탐구. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.
한인기 (1999). 평면 기하학의 기초. 충북: 협신사.
한인기 (2007). 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구. 수학교육논문집, 제21권1호, 51-64.
한인기 (2008). 자와 컴퍼스의 방법에 제시된 정다각형의 작도 방법 연구. 한국수학사학회지, 제21권2호, 119-134.
한인기·김문섭 (2007). 바탕문제를 활용한 정사면체와 정육면체의 절단면 작도에 대한 연구. 수학교육, 제46권3호, 303-314.
Coxeter, H. S. M. (1973). Regular polytopes. NY: Dover Publication, Inc.
Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Netherlands: D. Reidel Publishing Co.
Grünbaum, B. (2003). Are your polyhedra the same as my polyhedra?. In B. Aronov , S. Basu, J. Pach, & M. Sharir (Eds), Discrete and Computational Geometry (pp. 461 - 488). NY: Springer.
Taba, H. (1967). Teacher's handbook for elementary social studied. Mass: Addison-wesley Publishing Co, Inc.
The National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Virginia: NCTM, Inc.
The National Council of Teachers of Mathematics (2000). Learning mathematics for a new century. Virginia: NCTM, Inc.

The Study on Extension of Regular Polygon Using Cabri Geometry II [3)]

Suh, Bo Euk[4)]

Abstract

Geometry having long history of mathematics have important role for thinking power and creativity progress in middle school. The regular polygon included in plane geometry was mainly taught convex regular polygon in elementary school and middle school. In this study, we investigated the denotation's extension of regular polygon by mathematical basic knowledge included in school curriculum.

For this research, first, school mathematical knowledge about regular polygon was analyzed. And then, basic direction of research was established for inquiry. Second, based on this analysis inductive inquiry activity was performed with research using geometry software(Cabri Geometry II).

Through this study the development of enriched learning material and showing the direction of geometry research is expected.

Key Words : Regular polygon, Concave regular polygon, Enriched program, Mathematics gifted education, Teaching material

---

3) This work was supported by the Catholic University of Daegu in 2011.

4) Catholic University of Daegu (eukeuk@cu.ac.kr)