

논문 2012-49SC-2-3

Taylor Series를 이용한 입력 시간지연 비선형 시스템 일반적인 이산화

(Taylor Series Based Discretization for Nonlinear Input-delay Systems)

박 유 진*, 임 대 영*, 정 길 도**

(Yu Jin Park, Dae Young Lim, and Kil To Chong)

요 약

본 논문에서는 입력에 시간지연이 있는 연속 비선형 시스템의 일반적인 이산화를 위해 높은 차수의 샘플링 보관법을 제안한다. 제안한 방법은 테일러 시리즈 확장, 샘플링 이론과 보관법의 조합을 기초로 한다. 새로운 이산화 방법의 수학적 구조에 대해 세부적으로 유도하였으며, 제안한 이산화 방법에 대한 성능을 2차 시스템에 대한 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

Abstract

A general discretization method for input-driven nonlinear continuous time-delay systems is proposed, which can be applied to general order sampling hold assumptions. It is based on a combination of Taylor series expansion and the theories of sampling and hold. The mathematical structure of the new discretization scheme is introduced in detail. The performance of the proposed discretization procedure is evaluated by two degrees of systems. The results show that the proposed scheme is applicable to control systems.

Keywords : Nonlinear System, General Order Hold, Taylor Series, Input Delay, Time Discretization.

I. 서 론

시간지연을 갖는 시스템은 생물학, 경제학, 생태학, 사회학 등 다양한 분야에 존재한다. 일반적인 시간지연 시스템에 대한 공학적인 분야는 통신망, 화학작용, 원격 시스템, 생물계, 잠수함 등이 있다^[1].

대부분의 산업과 공학시스템에서 발생하는 물리적인 지연은 제한된 정보처리의 수용성과 데이터 전송에서 발생한다. 또한, 시간지연은 시변/시불변, 확률적/해석적

등 시스템 연산에 따라 다양하게 발생한다^[2]. 시간지연 시스템을 다루는 공학 분야는 매우 광범위하다. 제안된 접근 방법들의 대부분이 시간지연 제어 시스템, 특히 안정성 분석과 확실 혹은 불확실한 시간지연 시스템을 다루고 있다^[4~5].

기존의 접근방법은 대부분 정확성을 위해 작은 시간 간격이 요구되나 물리적 또는 기술적인 제한으로 인해 큰 샘플링 주기가 불가피 하여 제어기 적용이 힘든 경우가 발생한다. 이러한 경우는 이산시간 근사화를 직접 사용하여 해결 할 수 있다^[7]. 관련 차수, 안정성, zero dynamics, equilibrium properties 그리고 최소위상 특성 등과 관련된 비선형 시스템에 대한 접근 방법은 테일러 방법의 이론에 의해 연구되었다^[5~8].

뿐만 아니라 샘플링 주기가 큰 시스템에 영차 홀더 (Zero-order hold)를 사용한 이산화 방법은 필요한 정도의 정확성을 만족시키지 못한다^[9]. 본 논문에서 제안된

* 정회원, ** 평생회원-교신저자, 전북대학교 전자정보공학부

(Electronics and Information Department, Chonbuk National University)

※ 이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행한 연구임(No. 2011-0027689) and (No. 2011-0004905)

접수일자: 2011년8월2일, 수정완료일: 2012년2월29일

방법은 이산화의 정확성을 향상 시키는 방법이며, 모든 차수 홀드에 적용되는 일반적인 이산화 방법이다.

제안된 방법은 Taylor-Lie series를 기반으로 하며 비선형 시스템의 시간 지연요소를 해결하는 수학적 해석방법을 제시 하였다^[6].

논문 구성으로는 II장에서 필요한 수학적 이론을 설명하고 III장에서는 비선형시스템 지연요소 극복을 위한 이산화에 관한 최근 기법을 살펴본다. IV장에서는 선형 시간지연의 이산화 방법에 대해 간단히 소개 하고, V장에서는 시간지연이 있는 비선형 시스템의 일반화된 이산화 방법을 유도하고 중요한 결과를 제시하였다. 또한 VI장에서는 제안한 이산화 방법을 이용한 시뮬레이션을 실시하여 알고리즘의 효율성을 검증하였다. 마지막으로 VII장에서는 본 연구에 대한 결론을 서술하였다.

II. 시간지연 시스템

단일 입력의 비선형 연속 시간 시스템에 대해서 다음과 같이 상태 공간 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t-D) \quad (1)$$

여기서, $x \in X \subset R^n$ 는 상태 벡터 이고, $u \in R$ 는 입력변수이며, D 는 시스템의 입력에 직접 영향을 주는 연속 시간지연을 의미한다. 그리고 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 X 의 상태벡터장에서 해석적이라 가정한다.

샘플링 간격이 $[t_k, t_{k+1}) = [kT, (k+1)T)$ 일 때, 시간 축은 $T = t_{k+1} - t_k > 0$ 의 등거리 간격으로 고려되고, T 는 샘플링 주기이다. 또한, 시스템이 식(1)과 같이 주어질 때 샘플링 간격동안에 샘플링 시간 함수의 입력이라 가정한다. 이 함수는 다양한 차수 홀더(different-order hold) 가정에 의해 정의 된다. 시간지연 D 는 식(2)와 같이 표현 할 수 있으며,

$$D = (q + \delta)T = qT + \gamma \quad (2)$$

여기서, $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\delta \in (0, 1)$, $0 < \gamma < T$ 이다. 그리고 식 (2)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\gamma = \delta T \quad (3)$$

시간지연 D 는 일반적으로 다양한 샘플링 주기와 시간 간격 γ 의 합으로 표시되며, 여기서 γ 는 샘플링 주기

보다 작다^[6]. γ 이 있기 때문에, 연역적 추론에 의해 확실한 샘플링 주기를 식(4), (5)와 같이 두 개의 간격으로 나누어야 한다.

$$I_1 = [kT, kT + \gamma) \quad (4)$$

$$I_2 = [kT + \gamma, kT + T) \quad (5)$$

ZOH, FOH, GOH의 기본적인 표현으로 시간지연이 있는 경우와 없는 경우에 대해 살펴본다.

1. 영차-오더 홀더(Zero Order Hold)

ZOH일 때 입력은 샘플링 간격동안 부분적으로 상수이다. 여기서 $D = 0$ 이고, $kT \leq t < kT + T$ 이며,

$$u(t) = u(kT) \equiv u(k) = constant \quad (6)$$

이다.

$D \neq 0$ 일 때, 샘플링 간격 내에 식(7)과 같이 분류되는 두 개의 값에 따라 지연된 입력 변수를 쉽게 확인할 수 있다.

$$u(t-D) = \begin{cases} u(kT - qT - T) \equiv u(k-q-1) & t \in I_1 \\ u(kT - qT) \equiv u(k-1) & t \in I_2 \end{cases} \quad (7)$$

2. 일차-오더 홀더(First Order Hold)

FOH일 때 입력은 샘플링 간격동안 부분적으로 선형이다. 여기서 $D = 0$ 이고, $kT \leq t < kT + T$

$$\begin{aligned} u(t) &= u(kT) + \frac{u(kT) - u[(k-1)T]}{T}(t - kT) \\ &\equiv u(k) + \frac{u(k) - u(k-1)}{T}(t - kT) \end{aligned} \quad (8)$$

$D \neq 0$ 일 때,

$$u(t-D) = \begin{cases} u_1(t) & t \in I_1 \\ u_2(t) & t \in I_2 \end{cases} \quad (9)$$

여기서:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u(k-q-1) \\ &+ \frac{u(k-q-1) - u(k-q-2)}{T}[t - kT + (t - \gamma)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$u_2(t) = u(k-q) + \frac{u(k-q) - u(k-q-1)}{T} [t - kT - \gamma] \quad (11)$$

$u'(k)$ 를 도함수 표현으로 나타내면 식 (12)와 같고

$$u'(k) = \frac{u(k) - u(k-1)}{T} \quad (12)$$

그러므로 식(10)과 식(11)은 식(13)과 식(14)로 다시 표현할 수 있다.

$$u_1(t) = u(k-q-1) + u'(k-q-1)[k - kT + (T-\gamma)] \quad (13)$$

$$u_2(t) = u(k-q) + u'(k-q)[k - kT - \gamma] \quad (14)$$

3. 일반차수 홀더(General Order Hold)

앞의 내용들을 바탕으로 GOH은 다음과 같이 표현된다. $D=0$ 이고, $kT \leq t < kT + T$ 일 때, $\beta(t) = t - kT$ 라 가정하면,

$$u(t) = u(k) + u'(k)\beta(t) + \frac{1}{2}u''(k)\beta^2(t) + \frac{1}{3!}u'''(k)\beta^3(t) + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(k)\beta^n(t) + R_n(\beta(t)) \quad (15)$$

여기서, $u^{(n)}(k)$ 는 $t = kT$ 일 때의 N 번째 $u(t)$ 이고,

$$\beta^n(t) = (t - kT)^n \quad (16)$$

$$R_n(\beta(t)) = \frac{u^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \beta^{n+1}(t) \quad (17)$$

이며, 여기서 $\zeta \in (0, \beta(t))$ 이다.

일반적으로 샘플링 시간은 1초보다 작게 하고 입력 신호는 연속함수에 대해 제한된다.

그러므로

$$\beta(t) < 1 \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\beta(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \beta^{n+1}(t) = 0 \quad (19)$$

식 (15)는 시간지연이 없는 입력 신호의 GOH표현이

고, $T \geq 1$ 인 경우에도 식(19)를 만족하는 둘 또는 그 이상의 등가의 샘플링 시간 간격에 대하여 쉽게 다룰 수 있다. GOH의 가정과 위의 표현기법에 따라 $D \neq 0$ 일 때, GOH 표현은 시스템 시간지연을 유도 할 수 있다.

그러므로 $q \neq 0$ 이고 $\gamma \neq 0$ 일 때 일반적인 표현은 편의상 다음과 같이 가정한다.

$$\beta_1(t) = t - D - (k-q-1)T = t - kT + (T-\gamma) \quad (20)$$

$$\beta_2(t) = t - D - (k-q)T = t - kT - \gamma \quad (21)$$

$$k_1 = k - q - 1 \quad (22)$$

$$k_2 = k - q \quad (23)$$

그러므로 $t \in I_1$ 일 때,

$$u(t - D) = u(k_1) + u'(k_1)\beta_1(t) + \frac{1}{2}u''(k_1)\beta_1^2(t) + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(k_1)\beta_1^n(t) + R_n(\beta_1(t)) \quad (24)$$

또한, $t \in I_2$ 일 때,

$$u(t - D) = u(k_2) + u'(k_2)\beta_2(t) + \frac{1}{2}u''(k_2)\beta_2^2(t) + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(k_2)\beta_2^n(t) + R_n(\beta_2(t)) \quad (25)$$

위의 식(24), (25)를 다음과 같이 가정하면,

$$\Delta_1(t) = u(k_1) + u'(k_1)\beta_1(t) + \frac{1}{2}u''(k_1)\beta_1^2(t) + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(k_1)\beta_1^n(t) + R_n(\beta_1(t)) \quad (26)$$

$$\Delta_2(t) = u(k_2) + u'(k_2)\beta_2(t) + \frac{1}{2}u''(k_2)\beta_2^2(t) + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(k_2)\beta_2^n(t) + R_n(\beta_2(t)) \quad (27)$$

시간지연 시스템을 위한 간소화된 GOH 표현은 식 (28)과 같다.

$$u(t-D) = \begin{cases} \Delta_1(t), & t \in I_1 \\ \Delta_2(t), & t \in I_2 \end{cases} \quad (28)$$

만약 $q \neq 0$ 이고 $\gamma = 0$ 이면, 시간 지연 D 는 샘플링 시간 T 의 정수 배가 되며, $t \in [kT, kT+T)$ 의 경우 식 (29)와 같이 표현된다.

$$u(t-d) = \Delta_2(t) \quad (29)$$

다음 3절에서는 시간 지연이 존재하지 않는 비선형 시스템의 이산화 방법을 살펴보고 이를 바탕으로 시간 지연이 존재하는 비선형 시스템의 이산화 방법을 유도하기로 한다.

III. 시간지연을 갖지 않는 비선형 제어 시스템

먼저, $D=0$ 인 지연이 없는 비선형 제어 시스템에 대해 식 (30)과 같이 상태공간 표현법을 고려한다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (30)$$

GOH 가정 하에 샘플링 간격 내에서 식 (30)의 해는 일정하게 수렴하는 확장 테일러 시리즈를 이용하여 샘플링이 가능하며, 테일러 시리즈 계수 값은 식 (30)의 오른쪽 항의 연속적인 부분 미분을 통해 쉽게 계산 된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T^l}{l!} \left. \frac{d^l x}{dt^l} \right|_{t_k} \\ &= x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} A^{[l]}(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $x(k)$ 는 시간 $t = t_k = kT$ 일 때, 상태 벡터 x 의 값이고 $A^{[l]}(x, u)$ 은 다음 식(32)에 의해 반복적인 방법으로 구해진다.

$$\begin{aligned} A^{[1]}(x, u) &= f(x) + ug(x) \\ A^{[l+1]}(x, u) &= \frac{\partial A^{[l]}(x, u)}{\partial x} (f(x) + ug(x)) \\ &\quad + \frac{\partial A^{[l]}(x, u)}{\partial u} \dot{u} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 $l = 1, 2, 3, \dots$ 이다.

그러므로 식(31)의 Exact Sampled-Data Representation(ESDR)은 N 차 테일러급수로부터 구해

진다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi_T(x(k), u(k)) \\ &= x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} A^{[l]}(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \end{aligned} \quad (33)$$

또한, 식(31)에서 샘플데이터의 N 차 근사 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi_T^N(x(k), u(k)) \\ &= x(k) + \sum_{l=1}^N A^{[l]}(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \end{aligned} \quad (34)$$

이때, Φ_T^N 의 T 는 샘플링 주기를 의미하고 N 은 식 (34)의 approximate sampled-data representation (ASDR) 단절 차수에 해당한다.

IV. 시간지연을 갖는 선형 제어 시스템

이제 입력에 일정한 시간지연을 갖는 비선형 연속 시간 시스템을 테일러 시리즈로 이산화 하는 방법을 고려해 보자. 제안된 이산화 절차의 개발에 대해 동기를 부여하고, 이를 선형 시스템 영역에서 적절하게 유추하기 위하여 먼저, 논문의 주된 결과를 시스템이 선형일 경우에서 가능한 이산화 절차를 정확하게 살펴보자.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t-D) \quad (35)$$

여기서 A 와 b 는 적절한 차원의 행렬로 어느 시간 구간 $I = [t_i, t_f)$ 에 대해 다음식이 성립한다.

$$x(t_f) = e^{A(t_f-t_i)} x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (36)$$

식 (28)과 같이 GOH 가정 하에 입력변수는 $[kT, kT+\gamma)$ 과 $[kT+\gamma, kT+T)$ 에서 각각 다르게 표현된다. 계속해서 식 (36)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(kT+\gamma) &= e^{A\gamma} x(kT) \\ &\quad + \int_{kT}^{kT+\gamma} e^{A(kT+\gamma-\tau)} b \Delta_1(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} x(kT+T) &= e^{A(T-\gamma)} x(kT+\gamma) \\ &\quad + \int_{kT+\gamma}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} b \Delta_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

여기서, $\Delta_1(\tau)$ 와 $\Delta_2(\tau)$ 는 식 (26)과 (27)에서 정의한 값이며, 식 (37)과 (38)은 다음과 같이 계산된다.

$$x(kT+T) = e^{A(T-\gamma)}e^{A\gamma}x(kT) + \int_{kT+\gamma}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}b\Delta_2(\tau)d\tau + e^{A(T-\gamma)} \int_{kT}^{kT+\gamma} e^{A(kT+\gamma-\tau)}b\Delta_1(\tau)d\tau \quad (39)$$

여기서, $\tau = kT - T + \gamma + \tau'$ 로 치환하면 다음과 같이 정리 된다.

$$e^{A(T-\gamma)} \int_{kT}^{kT+\gamma} e^{A(kT+\gamma-\tau)}b\Delta_1(\tau)d\tau = \int_{T-\gamma}^T e^{A(2T-\gamma-\tau')}b\Delta_1((k-1)T+\gamma+\tau')d\tau' = \int_{T-\gamma}^T e^{A(2T-\gamma-\tau)}b\Delta_1((k-1)T+\gamma+\tau)d\tau \quad (40)$$

다시 $\tau = kT + \gamma + \tau'$ 로 치환하면 다음과 같이 정리 된다.

$$\int_{kT+\gamma}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}b\Delta_2(\tau)d\tau = \int_0^{T-\gamma} e^{A(T-\gamma-\tau')}b\Delta_2(kT+\gamma+\tau')d\tau' = \int_0^{T-\gamma} e^{A(T-\gamma-\tau)}b\Delta_2(kT+\gamma+\tau)d\tau \quad (41)$$

그러므로 식 (39)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^{T-\gamma} e^{A(T-\gamma-\tau)}b\Delta_2(kT+\gamma+\tau)d\tau + \int_{T-\gamma}^T e^{A(2T-\gamma-\tau)}b\Delta_1((k-1)T+\gamma+\tau)d\tau = e^{AT}x(kT) + \Gamma_0 + \Gamma_1 \quad (42)$$

여기서,

$$\Gamma_0 = \int_0^{T-\gamma} e^{A(T-\gamma-\tau)}b\Delta_2(kT+\gamma+\tau)d\tau$$

$$\Gamma_1 = \int_{T-\gamma}^T e^{A(2T-\gamma-\tau)}b\Delta_1((k-1)T+\gamma+\tau)d\tau$$

이고 주목할 점은 $(k+1)T$ 일 때 상태 벡터는 kT

에서 평가된 상태에 의해 정의되고, 두 개의 부분구간 표현은 시간지연 D 와 식(28)로부터 얻어진다.

V. 시간지연을 갖는 비선형 제어시스템

앞서 언급한 선형 접근 방법에 의하여, 마찬가지로 비선형의 경우에도 유사한 방법이 적용된다. 실제로, $[kT, kT+\gamma)$ 의 부분구간에서 비선형 시스템에 대하여 테일러 시리즈의 이산화방법을 적용함으로써, $kT+\gamma$ 에서 평가된 하나의 상태벡터를 얻을 수 있다.

$$x(kT+\gamma) = \Phi_\gamma(x(kT), \Delta_1(kT)) \quad (43)$$

위 식에서, Φ_γ 은 식(31)으로부터 구할 수 있다. 그리고 다음의 테일러 계수는 식(32)를 통하여 반복적인 계산에 의해 얻어질 수 있다. $x(kT)$ 와 $\Delta_1(kT)$ 는 각각 시간 kT 에서 상태 벡터와 입력 값이다. 뿐만 아니라, 이 값들은 식(20), 식(22) 그리고 식(26)로부터 추정할 수 있다.

$$\Delta_1(kT) = u(k_1) + u'(k_1)(T-\gamma) + \frac{1}{2}u''(k_1)(T-\gamma)^2 + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(k_1)(T-\gamma)^n + \dots \quad (44)$$

유사하게, $[kT+\gamma, kT+T)$ 의 구간에서 테일러 이산화 방법을 적용하여 시간 $(k+1)T$ 에서 상태 벡터 $x(kT+\gamma)$ 와 시간 $kT+\gamma$ 에서 입력 값을 산출할 수 있다.

$$x(kT+T) = \Phi_{T-\gamma}(x(kT+\gamma), \Delta_2(kT+\gamma)) \quad (45)$$

그리고 식(21), 식(23) 그리고 식(27)에 따라,

$$\Delta_2(kT+\gamma) = u(k-q) = u(k_2) \quad (46)$$

이 된다. 식(33)을 기초로, 위의 식(43)과 식(45)은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$x(kT+\gamma) = x(kT) + \sum_{l=1}^{\infty} A^{[l]}(x(kT), \Delta_1(kT)) \frac{\gamma^l}{l!} \quad (47)$$

$$x(kT+T) = x(kT+\gamma) + \sum_{l=1}^{\infty} A^{[l]}(x(kT+\gamma), \Delta_2(kT+\gamma)) \frac{(T-\gamma)^l}{l!} \quad (48)$$

뿐만 아니라, 식(34)에 따라, 식(47)과 식(48)의 ASDR 방정식은 아래와 같이, N 차의 테일러 시리즈로부터 얻어진다.

$$\begin{aligned} x(kT + \gamma) &= \Phi_{\gamma}^N(x(kT), \Delta_1(kT)) \quad (49) \\ &= x(kT) + \sum_{l=1}^N A^{[l]}(x(kT), \Delta_1(kT)) \frac{\gamma^l}{l!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \Phi_{T-\gamma}^N(x(kT + \gamma), \Delta_2(kT + \gamma)) \quad (50) \\ &= x(kT + \gamma) \\ &\quad + \sum_{l=1}^N A^{[l]}(x(kT + \gamma), \Delta_2(kT + \gamma)) \frac{(T-\gamma)^l}{l!} \end{aligned}$$

$A^{[l]}$ 계수의 형태로 사상된 $\Phi_{T-\gamma}$ 는 부분구간 $[kT, kT + \gamma]$ 에서 정확하게 일치하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 계산은 MAPLE과 같은 프로그램을 사용하는 것이 편리하다.

연속적인 부분 구간의 계산을 위하여, 식(43)과 식(45)을 더해줌으로써, 원래의 시스템 식(1)의 샘플 데이터를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \Phi_T^D(x(kT), \Delta_1(kT), \Delta_2(kT + \gamma)) \\ &= \Phi_{T-\gamma}(\Phi_{\gamma}(x(kT), \Delta_1(kT)), \Delta_2(kT + \gamma)) \quad (51) \end{aligned}$$

위의 전개에서 N 차의 유한한 급수에 의하여 ASDR을 구할 수 있다.

$$x(kT + T) = \Phi_T^{N,D}(x(kT), \Delta_1(kT), \Delta_2(kT + \gamma)) \quad (52)$$

$$x(k + 1) = \Phi_T^{N,D}(x(k), \Delta_1(k), \Delta_2(k + \delta)) \quad (53)$$

VI. 시뮬레이션

본 논문에서 제안된 시간 이산화 방법은 테일러 시리즈와 일반적인 차수 추정방법을 합한 형태이다. 이 방법을 2차 시스템에 적용함으로써 유용성을 증명할 수 있다. 시뮬레이션으로는 서로 다른 샘플링 주기, 지연시간, 입력신호, 시스템형태, 다른 차수 홀드와 단절차수가 소개되었다. 동시에, 논문에서 제안된 시간-이산화 구조를 입증하기 위하여 사용되는 정확한 값을 얻기 위하여 매트랩 프로그램의 ODE 함수가 쓰였다. 제안된 방법에 의해서 얻어진 값들은 매트랩의 결과 값과 비교하였으며 정확도의 향상을 확인할 수 있다.

1. 2자유도의 기계시스템

이번 절에서는, 그림 1. 에서와 같이 질량, 스프링, 댐핑 요소와 진자로 이루어진 2자유도의 기계시스템을 살펴본다. 진자는 슬라이더에 고정된 질량에 달려있다. 질량은 슬라이드 가이드 상에서 움직임이 자유롭다. 질량의 움직임은 스프링에 의해 감쇠되고, 진자의 움직임 또한 경첩의 회전저항으로 감쇠된다. 이 시스템의 비선형 미분 방정식은 동역학 이론에 의해 아래와 같이 얻어진다.

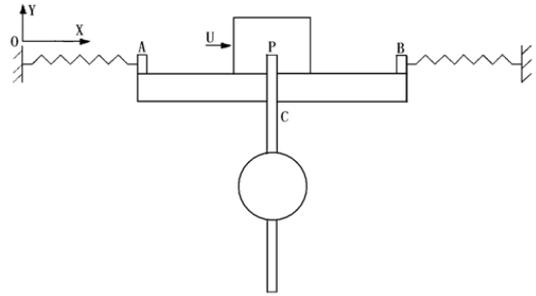


그림 1. 2자유도 시스템 개략도

Fig. 1. Schematic diagram of the pendulum system.

$$\begin{aligned} U &= (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1l(\cos\theta + \mu\sin\theta)\ddot{\theta} \quad (54) \\ &+ m_1l(\mu\cos\theta - \sin\theta)\dot{\theta}^2 - \mu(m_1 + m_2)g + 2k(x - l_0) \\ - M_0\theta &= m_1l\cos\theta\ddot{x} + (I_c + m_1l^2)\ddot{\theta} + m_1glsin\theta \end{aligned}$$

시스템의 상태방정식은 다음과 같이 상태 변수를 정의하고, (54)식을 이용하여 구할 수 있다.

$$X_1 = x, X_2 = \dot{x}, X_3 = \theta, X_4 = \dot{\theta} \quad (55)$$

위 상태변수에 의해 다음을 구할 수 있다.

$$\dot{X}_1 = X_2, \dot{X}_3 = X_4 \quad (56)$$

시스템의 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 & m_1l(\cos X_3 + \mu\sin X_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_1l\cos X_3 & 0 & I_c + m_1l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_2 \\ m_1l(\sin X_3 - \mu\cos X_3)X_4^2 - \mu(m_1 + m_2)g - 2k(X_1 - l_0) + U \\ X_4 \\ -M_0X_4 - m_1glsin X_3 \end{bmatrix} \quad (57) \end{aligned}$$

표 1. 진자 시스템의 파라미터
Table 1. Parameters for the pendulum system.

PARAMETERS	REMARK
$m_1 = 0.654kg$	Mass of slider
$k = 100N/m$	Spring coefficient
$l_0 = 0.025m$	Initial length of the spring
$I_c = 0.0014kg \cdot m^2$	Inertia about the center
$\mu = 0.2$	Coefficient of friction
$m_2 = 0.7925kg$	Mass of pendulum
$l = 0.2m$	Length of the rod
$g = 9.8m/s^2$	Gravity
$M_c = 0.2kg \cdot m \cdot deg/s^2$	Dry friction from the pendulum

이 시스템의 파라미터 값들은 표 1. 과 같다.

2자유도 시스템의 간략화 된 식(57)은 테일러 시리즈의 이산화 방법을 사용하여 구할 수 있고 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$X_i(k+1) = X_i(k) + \sum_{\ell=1}^N A_i^{[\ell]}(X(k), u_1(kT)) \frac{\gamma^\ell}{\ell!} + \sum_{\ell=1}^N A_i^{[\ell]}(X_i(k) + \sum_{j=1}^N A_i^{[j]}(X(k), u_1(kT)) \frac{\gamma^j}{j!}, u_2(kT + \gamma)) \frac{(T-\gamma)^\ell}{\ell!} \quad (58)$$

위의 식에서 $i=1,2,3,\dots$ 와 $A_i^{[\ell]} = (x, u)$ 항은 식(32)에 의해 반복적으로 계산된다. 시스템의 입력 U 는 $U = 14.5 + 0.5\sin(4\pi(t-D))$ 으로 가정하고 초기상태는 아래와 같다.

$$X(0) = 0.02, \dot{X}(0) = 0, \theta(0) = 45^\circ, \dot{\theta}(0) = 0 \quad (59)$$

2. CPU 시간의 비교

다양한 차수홀드 방법의 효과를 조사하기 위하여 비교연구가 수행되었다. 표 2.는 샘플링 주기가 0.1초, 입력 시간지연이 0.015초의 조건하에 시스템을 1초 동안 구동 시킨 결과이다. 표 2. 에서 볼 수 있듯이 차수 N이

표 2. 차수에 따른 CPU시간
Table 2. CPU Time for various truncation orders.

N	ZOH	FOH	SOH	TOH
1 ^o	0.080 ^o	0.270 ^o	0.280 ^o	0.381 ^o
2 ^o	0.140 ^o	0.280 ^o	0.371 ^o	0.411 ^o
3 ^o	0.290 ^o	0.441 ^o	0.541 ^o	0.570 ^o
4 ^o	0.881 ^o	0.971 ^o	1.051 ^o	1.161 ^o
5 ^o	4.266 ^o	4.466 ^o	4.777 ^o	4.807 ^o
6 ^o	28.442 ^o	28.641 ^o	28.771 ^o	32.847 ^o
7 ^o	251.48 ^o	251.82 ^o	255.42 ^o	284.82 ^o

증가함에 따라 CPU 시간이 증가함을 알 수 있다. 특히 N=4 에서 N= 5까지, N=6에서 N=7까지 CPU 시간은 크게 증가한다. 하지만, 주어진 단절차수 N 동안 CPU 시간은 ZOH부터 GOH까지 미미하게 증가한다.

본 논문에서 제안된 방법이 연속의 시간지연 문제를

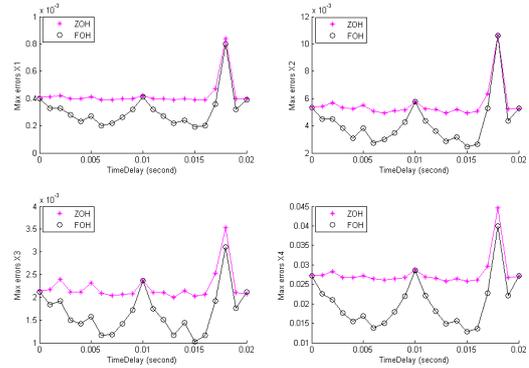


그림 2. 최대오차 시간지연의 영향 (T=0.01s)
Fig. 2. Effect of the maximum error delay time(T=0.01s).

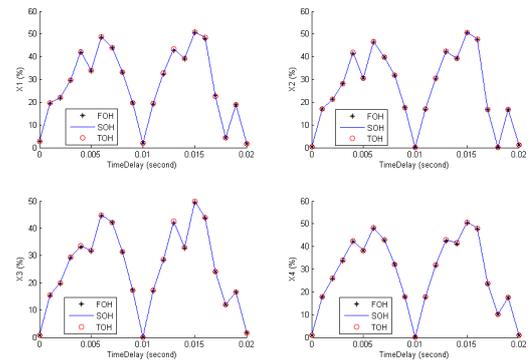


그림 3. 정확도의 향상 (ZOH와의 비교)
Fig. 3. Improvement of accuracy.

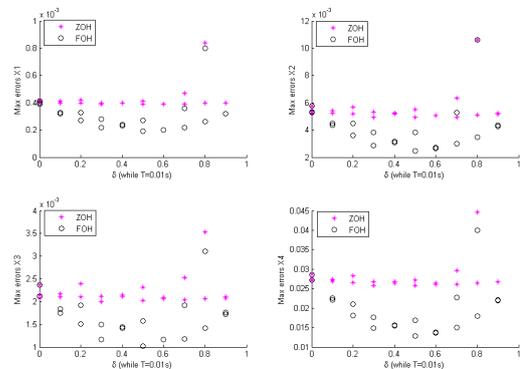


그림 4. δ (T = 0.01s) 에 따른 최대 오차
Fig. 4. The maximum error depends on δ (T = 0.01s).

해결하는데 국한된다고 할지라도, 주어진 샘플링 시간 동안 최대치 오차 시간지연의 영향을 아는 것이 필요하다.

그림.2~그림.4 는 샘플링 주기가 0.01초일 때의 시물레이션 결과를 보여준다. 그림 2에서 ZOH와 TOH가 시간지연이 0초에서 0.02초까지 증가할 때 최대오차가 변화하는 것을 알 수 있다. 하지만 그림 2. 와 그림 3.에서는 TOH의 성능이 ZOH의 성능보다 훨씬 뛰어난 것을 확인할 수 있다. FOH, SOH, 그리고 TOH의 성능은 비슷하게 나타난다.

VII. 결 론

본 논문에서는 입력에 시간지연이 존재하는 비선형 시스템의 이산화 구조에 기초한 일반차수홀드 추정 (general order hold assumption) 방법이 제안되었다. 관련된 알고리즘을 유도하였으며, 2차 비선형 제어시스템에 대하여 시물레이션을 실시함으로써, 이산화의 타당성을 검증하였다. 이 방법은 비선형 제어기 설계기술에 적용을 가능하게 하며 특히 샘플링을 짧은 시간에 수행할 수 없는 시스템의 이산화에 우수한 특성을 보인다.

시물레이션의 결과는 다음과 같이 요약된다.

(1) The order of the hold는 만족스러운 이산화 결과를 이루기 위하여 적절하게 선택되어야 한다. 높은 차수 추정 (a higher order assumption)이 항상 낮은 차수 추정보다 좋은 결과를 보이는 것은 아니다. 이것은 입력신호와 시스템의 타입에 따라 달라진다.

(2) 일반 차수홀드 추정 (a general order hold assumption)을 수행하는 동안에, 반드시 샘플링 시간이 증가함에 따라 오차가 증가하는 것은 아니다.

(3) CPU 시간은 제안된 방법의 단절(truncation)오차가 증가함에 따라 빠르게 증가한다. 하지만 확실한 단절차수를 수행하는 동안, CPU시간은 ZOH, FOH, SOH, 그리고 TOH에 대하여 매우 약하게 변화한다.

참 고 문 헌

[1] Emmanuel Moulay, Michel Dambrineb, Nima Yeganefar, Wilfrid Perruquetti, 2008, Finite-time stability and stabilization of time-delay systems. *Systems & Control Letters* 57, pp.561-566.
 [2] Park Ji Hyang, Chong Kil To, Kazantzis

Nikolaos and Parlos Alexander G, 2004, Time-Discretization of Nonlinear Systems with Delayed Multi-Input Using Taylor Series, *KSME International Journal*, Vol. 18 No. 7, pp. 1107-1120.
 [3] Park Ji Hyang, Chong Kil To, Kazantzis Nikolaos and Parlos Alexander G, 2004, Time-Discretization of Non-affine Nonlinear System with Delayed Input Using Taylor-Series, *KSME International Journal*, Vol. 18 No. 8, pp. 1297-1305.
 [4] Nilsson, J., 1998, Real-Time Control Systems With Delays, Ph.D. Dissertation, Dept. of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
 [5] Vaccaro, R. J., 1995, Digital Control, McGraw-Hill, New York.
 [6] Kazantzis, N., and Kravaris, C., 1999, Time-Discretization of Nonlinear Control Systems via Taylor Methods, *Comput. Chem. Eng.*, 23, pp. 763-784.
 [7] Nešić, D., Teel, A. R., and Kokotović, P. V., 1999, Sufficient Conditions for Stabilization of Sampled-Data Nonlinear Systems via Discrete-Time Approximations. *Syst. Control Lett.*, 38, pp. 259-270.
 [8] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li. 1991, Applied Nonlinear Control. Prentice Hall/Pearson.
 [9] Nikolaos Kazantzis, K.T.Chong, J.H.Park, Alexander G. Parlos 2005, Control-Relevant Discretization of Nonlinear Systems With Time-Delay Using Taylor-Lie Series. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.127 No.3, pp.153-159.
 [10] Kazantzis, N., and Kravaris, C., 1997, System-Theoretic Properties of Sampled-Data Representations of Nonlinear Systems Obtained via Taylor-Lie Series. *Int. J. Control*, 67, pp.997-1020.

저 자 소 개



박 유 진(정회원)
2010년 전북대학교 전자공학과
학사 졸업.
2011년 전북대학교 전자공학
석사 수료
2012년 전북대학교 전자공학
논문연구생.

<주관심분야 : 자동제어, 컴퓨터, 이산시간>



정 길 도(평생회원)-교신저자
1984년 Oregon Sate University
기계공학과 학사 졸업
1986년 Georgia Institute of Tech-
-nology 기계공학과 석사
졸업
1992년 Texas A&M University
기계공학과 박사 졸업

2012년 현재 전북대학교 전자정보공학부 교수
<주관심분야 : Marine Navigation, Time-Delay,
Robotics, 인공지능, Web 기술>



임 대 영(정회원)
2010년 전북대학교 전자공학과
학사 졸업.
2011년 전북대학교 전자공학
석사 수료
2012년 전북대학교 전자공학
논문연구생.

<주관심분야 : 자동제어, 인공지능, 조선 IT>