블랙리터만 모형을 이용한 섹터지수 투자 전략*

송정민** · †이영호*** · 박기경**

Sector Investment Strategy with the Black-Litterman Model

Jungmin Song** · †Youngho Lee*** · Gigyoung Park**

■ Abstract ■

In this paper, we deal with a sector investment strategy by implementing the black-litterman model that incorporates expert evaluation and sector rotation momentum. Expert evaluation analyzes the relative performance of the industry sector compared with the market, while sector rotation momentum reflects the price impact of significant sector anomaly. In addition, we consider the portfolio impact of sector cardinality and weight constraints within the context of mean-variance portfolio optimization. Finally, we demonstrate the empirical viability of the proposed sector investment strategy with KOSPI 200 data.

Keywords : Black-Litterman Model, Sector Investment Strategy, Sector Rotation Momentum Strategy, Integer Programming, Portfolio Optimization

논문접수일 : 2011년 11월 01일 논문수정일 : 2011년 12월 16일 논문게재확정일 : 2012년 01월 10일

* 이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No.2011-0011400). 이 논문은 2011년도 2단계 두뇌한국(BK)21사업에 의하여 지원됨.

** 고려대학교 정보경영공학전문대학원

*** 고려대학교 산업경영공학부

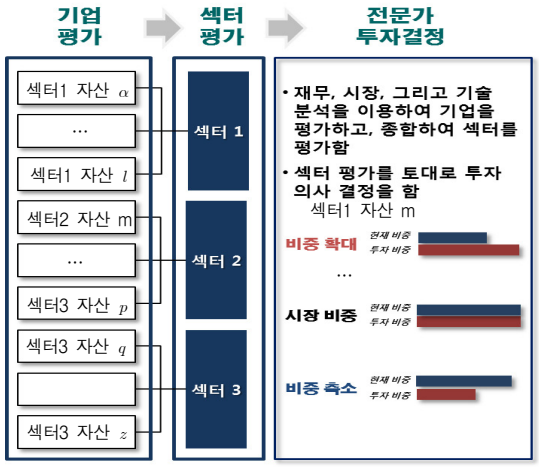
† 교신저자

1. 서 론

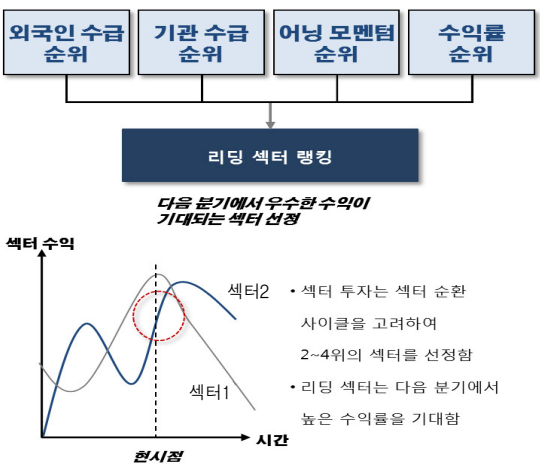
이 논문은 섹터 펀드(Sector Fund) 설계를 위한 최적화 모형을 개발한다. 섹터 펀드는 동일 업종 기업군으로 분류한 섹터 지수에 투자하는 금융 상품이다[3]. 섹터 지수의 특징은 동일 섹터에 포함된 자산의 유사성과 섹터 특이현상이 있다. 섹터 내 자산의 공분산은 대부분 0보다 크고 유사한 패턴을 보이며 섹터 단위로 투자할 경우 섹터 특이현상으로 목표 지수의 평균 수익률보다 높은 수익률을 얻을 수 있다. 섹터 특이 현상은 시장에 반영되어 있는 정보 외 산업 전망과 경기 순환과 같은 주식 시장 외적인 정보를 이용하여 확인할 수 있다. 따라서 이 논문은 주식 시장 외적인 정보로 전문가 평가와 주가 모멘텀 분석을 이용하여 산업 라이프 사이클을 고려한 섹터 지수 투자 전략을 개발한다. 전문가 평가는 애널리스트 투자 의견으로 <그림 1> (a)와 같이 재무분석, 시장분석, 그리고 기술분석을 이용하여 섹터를 분석한다.

전문가 평가에 대한 연구는 성과 검증을 중심으로 진행되어 Jegadeesh et al.[10]는 애널리스트 추천 종목이 모멘텀과 양의 상관관계에 있고 거래량과 성장률이 높아서 고수익을 얻게 됨을 보였다. Fabre and Snape[7]는 애널리스트 투자 추천이 주식 시장 참여에서 중요한 고려 대상이라고 주장하였다. 한편, 주식 가격 모멘텀 측정 방법은 이동 평균, 섹터 순환, 그리고 변동성을 이용한 모멘텀 전략이 있다[14]. 이 논문은 산업 라이프 사이클을 고려한 섹터 순환 모멘텀 전략을 적용한다. 섹터 순환 모멘텀 전략은 <그림 1>(b)와 같이 섹터 별로 구분한 주식에서 외국인 수급 순위, 기관 수급 순위, 어닝 모멘텀 순위, 그리고 수익률 순위를 조합하여 높은 과거 수익률 순위 패턴을 찾아 리딩 섹터 순위를 결정한다. 리딩 섹터 순위는 섹터 순환 사이클을 고려하여 2위부터 4위 섹터를 선정한다. 1위 섹터는 산업 라이프 사이클 측면에서 성숙기에 도달한 경우가 많아 성장 가능성이 낮다. 그러나 2위부터 4위 섹터는 성장기에 도달한 경우가 많아 다음 분기에서 높은 수익을 기대할 수 있다[1].

주식의 모멘텀 효과에 대한 연구는 모멘텀을 확인하는 연구 중심으로 발전하였다. Cleary and Inglis[6]는 미국과 캐나다 주식 시장에서 모멘텀 전략 효과를 발견하였다. 미국과 캐나다 주식시장은 거래비용이 낮을수록 모멘텀 전략 효과가 큰 것으로 나타났다. Rouwenhorst[15]는 유럽 12개국의 주식시장에 모멘텀 전략을 적용하였다. 시장 규모에



(a) 전문가 평가



(b) 섹터 순환 모멘텀 전략

〈그림 1〉 섹터 펀드 투자 전략

관계없이 유럽 12개국의 주식시장에서 모멘텀 전략 효과가 나타났고 규모가 큰 회사보다 작은 회사에서 모멘텀 전략 효과가 더 크다는 사실을 입증하였다. 그러나 기존 연구는 주식시장에서 모멘텀 효과를 입증했으나 자산 배분 모형에 주식 시장의 특성을 고려한 모멘텀 전략을 적용하는 연구는 적다. 이 논문은 블랙리터만 모형에 섹터 지수 특징을 고려한 모멘텀 전략 적용 방안을 제시한다.

블랙리터만 모형은 균형기대 수익률과 투자자 전망을 결합하여 계산한 기대수익률을 Markowitz [12]가 개발한 평균 분산 모형의 모수로 활용하여 최적 포트폴리오를 구성한다. 블랙리터만 모형 연구는 균형기대수익률과 투자자전망 연구 중심으로 발전하였다. Bevan and Winkelmann[4]은 균형기대수익률을 일정한 샤프 비율에 맞게 계산하는 과정을 제안하였다. Krishnan and Mains[11]는 공분산과 경기침체 리스크를 고려한 효용함수를 개발하여 수익률과 공분산 이외 요소를 반영하는 방법을 제시하였다. 투자자 전망 기존연구는 전망행렬 생성과 전망 변동성을 중심으로 이루어졌다. Blummer [5]는 전망 신뢰도를 고려하여 전망행렬을 구성하였다. He[9]는 애널리스트 추천 종목을 이용하여 전망행렬을 생성하는 방법을 제안하였다. 그러나 평균을 사용함으로 인해 데이터가 작을 경우 개별 애널리스트의 의견을 정확히 반영할 수 없는 문제점을 가지고 있다. Mulvey et al.[13]은 모멘텀을 이용하여 전망행렬을 생성하는 방법을 제안하고 평균 분산모형, 블랙리터만 모형, Grauber-Hakansson 모형, 그리고 로버스트 최적화 모형(Robust Optimization Model)에 모멘텀 전략을 적용하여 성과를 비교하였다. 네 가지 모형 중 평균 분산 모형이 가장 큰 성과를 얻는 결과를 얻었으나 평균 분산 모형은 과거 데이터 평균과 분산만을 이용하고 일부 자산에 배분 집중현상이 나타나 현실 문제 적용이 어렵다. 또한 단순한 모멘텀 측정 방법을 사용하고 투자에 유용한 시장 외적인 정보를 고려하지 않았다. 따라서 이 논문은 현실 문제의 정량적 분석과 정성적 분석을 통해 얻은 주식시장 내외적 정보를 블랙리터만 모형에 반영하여 목표 지수보다 나은 성과를 제시한다. 또한 거래 비용 절약 효과와 안정적인 펀드 수익을 얻기 위해 섹터 선택 개수와 섹터 비중의 상한과 하한의 영향을 제시한다.

논문 구성은 다음과 같다. 제 2장에서 블랙리터만 모형을 소개하고, 제 3장은 블랙리터만 모형을 이용한 섹터 투자 전략을 제시하며 제 4장은 블랙리터만 모형을 이용한 섹터 펀드 최적화 모형을 제시한다. 그리고 제 5장은 실험 결과를 제시하고, 제 제 6장에서 결론과 향후 연구 과제를 기술한다.

2. 블랙리터만 모형

블랙리터만 모형은 자산배분 모형으로 시장에 내재된 균형기대수익률과 투자자 전망을 반영하여 전망 결합 기대수익률을 산출한다. 균형기대수익률(Π)은 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\Pi = \lambda \Sigma w_{mkt} \tag{1}$$

식 (1)에서 λ는 위험회피계수, Σ는 과거 수익률의 공분산, 그리고 w_{mkt}는 시장의 자산 별 시가총액 비중을 나타낸다. 블랙리터만 모형에서 균형기대수익률에 투자자 전망을 반영하는 방법은 절대 전망과 상대 전망이 있다. 투자자 전망은 식 (2)와 같이 정의한다.

$$P \cdot E(r) = Q + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \Omega) \tag{2}$$

식 (2)에서 P는 투자자 전망 행렬, $E(r)$은 기대수익률, Q는 투자자 전망에서 산출된 기대 수익률, ε은 투자자 전망 오차항, 그리고 Ω는 오차항의 공분산 행렬을 나타낸다. 투자자 전망 오차항은 투자 전망의 불확실성을 나타내고 오차항이 독립이고 정규분포를 따르며 시장 전망에 대한 불확실성이 표본 공분산에 비례한다고 가정하면 식 (3)과 같이 나타난다[16].

$$\Omega = \left(\frac{1}{c} - 1\right) P \Sigma P^T \tag{3}$$

식 (3)에서 c는 전망에 대한 신뢰도, P는 투자자 전망 행렬, 그리고 Σ는 수익률의 공분산 행렬을 나타낸다. 기대 수익률은 $\Pi = E(r)+u$로 나타내며 Π는 균형기대수익률을 나타낸다. u는 오차를 나타내는데 오차 평균은 0이고 분산은 $\tau\Sigma$이다. 일반적 최소 자승법(Generalized Least Square Estimation)을 이용하여 기대수익률($\hat{E}(r)$)을 추정하는 과정은 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned}\hat{E}(r) &= \left[(I\ P^T)\begin{pmatrix}\tau\Sigma & 0\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}I\\ P\end{pmatrix}\right]\left[(I\ P^T)\begin{pmatrix}\tau\Sigma & 0\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Pi\\ q\end{pmatrix}\right]\\ &= \left[(\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}\begin{pmatrix}I\\ P\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}\begin{pmatrix}\Pi\\ q\end{pmatrix}\right]\\ &= \left[(\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P^T\Omega^{-1}q\right]\\ &= \Pi+\left[\Sigma P^T\left[P\Sigma P^T+\frac{\Omega}{\tau}\right]^{-1}\right][q-P\Pi] \qquad (4)\\ &= \Pi+\left[\Sigma P^T\left[P\Sigma P^T+\Omega'\right]^{-1}\right][q-P\Pi]\end{aligned}$$

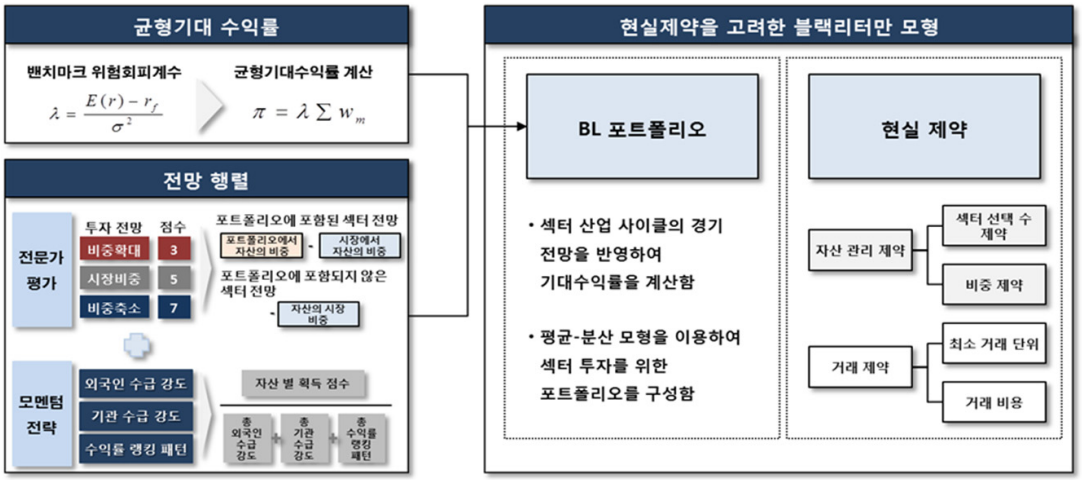
3. 블랙리터만 모형을 이용한 섹터투자전략

이 논문은 애널리스트 추천과 섹터 순환 모멘텀 전략을 블랙 리터만 모형에서 전망행렬로 이용한다. 블랙리터만 모형은 평균 분산 모형을 기반으로 시장에 내재된 균형기대수익률과 투자자 전망을 반영하여 전망 결합 기대수익률을 산출한다. 평균 분산 모형은 과거 수익률과 위험을 고려한 자산 배분 모형으로 자산의 투자 전망을 반영하기 어렵고 일부 자산에 투자 비중을 많이 배분하는 문제가 있다. 블랙리터만 모형은 균형기대수익률을 사용하여 이러한 문제를 해결하였으며 베이지안 방법(Bayesian Approach)을 이용하여 투자 전망을 수익률에 반영한다. <그림 2>는 섹터 투자를 위한 블랙리터만 모형 프레임 워크를 나타낸다.

균형기대수익률은 위험회피계수, 과거수익률에서 얻은 공분산 행렬, 그리고 시장 비중을 식 (1)과 같이 계산한다. 위험회피계수는 식 (5)와 같이 무위험자산 수익률에 대한 초과수익률을 목표지수 분산으로 나눈 값으로 리스크 단위당 기대할 수 있는 초과수익을 의미한다.

$$\lambda = \frac{E(r)-r_f}{\sigma^2} \qquad (5)$$

식 (5)에서 $E(r)$은 시장 포트폴리오의 평균 수익률, r_f는 무위험 자산의 수익률, 그리고 σ^2는 시장 포트폴리오 일별(Daily) 수익률의 분산을 나타낸다. 무위험 자산의 수익률은 국고채 3년 만기 수익



〈그림 2〉 섹터 투자를 위한 블랙리터만 모형 프레임 워크

률의 일일 수익률 0.0015를 사용한다. 블랙리터만 모형은 위험회피계수를 이용하여 시장에 내재된 투자자 위험회피 성향을 수치화한다. 전망행렬은 전문가 평가와 모멘텀 전략을 사용한다. 전문가 평가를 블랙리터만 모형의 전망행렬로 구성하기 위해 He[9]가 제안한 구성 방법을 이용한다. 전문가 평가로 에프엔가이드[8]에서 발표한 2010년 5개 우수 증권사 중 월별 포트폴리오 수익률이 가장 높은 대우증권 월별 포트폴리오를 이용하고 <표 1>과 같이 대우증권 월별 포트폴리오를 신뢰도 계산에 사용하여 전문가 평가에 대한 전망행렬을 구성한다.

<표 1>에서 신뢰도 추정에 사용한 포트폴리오는 대우증권 월별 포트폴리오의 기간을 나타내며 신뢰도 검증에 사용한 포트폴리오는 블랙리터만 모형에서 추정한 신뢰도를 식 (3)에 적용하여 얻은 포트폴리오를 나타낸다. 대우증권 월별 포트폴리오의 신뢰도를 계산하기 위해 데이터 별로 사용한 포트폴리오의 평균과 표준편차를 이용하여 모평균을 검정한다. 모분산이 알려지지 않은 경우이므로 검정통계량은 식 (6)과 같이 t 검정통계량을 사용한다.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \tag{6}$$

식 (6)에서 $\overline{X}$는 모델 포트폴리오 수익률과 KOSPI 수익률의 차의 평균을 나타내고 s는 모델 포트폴리오 수익률과 KOSPI 수익률의 차의 표준편차를 나타낸다. 그리고 n은 관측 횟수를 나타내고 모델포트폴리오의 목표가 시장 수익률 초과이므로 μ_0는 0의 값을 가진다. 따라서 귀무가설은 $\mu \leq \mu_0$, 대립가설은 $\mu > \mu_0$, 그리고 기각역은 $t \geq t(n-1, \alpha)$로 설정한다. 이때 가설을 기각하는 값인 유의수준(α)을 전문가 평가 전망의 신뢰도로 사용한다. 전문가 평가는 정량적 분석과 정성적 분석을 고려하여 자산에 투자 전망을 비중확대, 시장비중, 그리고 비중축소로 추천한다. 개별 섹터에 대한 투자전망 값으로 비중확대는 3점, 시장비중을 5점, 그리고 비중축소는 7점을 부여한다. 전문가의 투자 전망은 목표지수를 기준으로 추천을 하기 때문에 목표지수 수익률과 포트폴리오 수익률을 비교하기 위한 상대 전망행렬을 구성한다. 따라서 포트폴리오 내 자산을 매수(Long) 포트폴리오로 지정하고 시장 지수를 매도(Short) 포트폴리오로 지정한다. 포트폴리오에 포함된 섹터 전망은 포트폴리오에서 자산 비중 값과 시장에서 자산 비중 값의 차로 계산하고 포트폴리오에 포함되지 않은 섹터 전망은 자산 시장 비중의 음의 값으로 계산한다. 예를 들어 6개의 자산 중 매수 포트폴리오에 자산 1과 2, 유지 포트폴리오에 자산 3과 4, 그리고 매도 포트폴리오에 자산 5와 6이 있을 경우 전망행렬(P_e)은 식 (7)과 같이 정의한다.

$$P_e = \begin{bmatrix} w_{1P} - w_{1m} & w_{2P} - w_{2m} & -w_{3m} & -w_{4m} & -w_{5m} & -w_{6m} \\ -w_{1m} & -w_{2m} & w_{3P} - w_{3m} & w_{4P} - w_{4m} & -w_{5m} & -w_{6m} \\ -w_{1m} & -w_{2m} & -w_{3m} & -w_{4m} & w_{5P} - w_{5m} & w_{6P} - w_{6m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

〈표 1〉 전문가 평가 신뢰도 기록

Set	신뢰도 추정에 사용한 데이터 기간	신뢰도 검증에 사용한 데이터 기간	신뢰도
1	2009년 01월~2010년 12월	2011년 01월 02일~2011년 01월 31일	97.5%
2	2009년 01월~2011년 01월	2011년 02월 01일~2011년 02월 28일	95.0%
3	2009년 01월~2011년 02월	2011년 03월 02일~2011년 03월 31일	95.0%
4	2009년 01월~2011년 03월	2011년 04월 01일~2011년 04월 29일	97.5%
5	2009년 01월~2011년 04월	2011년 05월 02일~2011년 05월 31일	97.5%
6	2009년 01월~2011년 05월	2011년 06월 01일~2011년 06월 30일	97.5%

식 (7)에서 w_{ip}는 포트폴리오에 포함된 자산 i의 비중을 나타내고 w_{im}은 시장에서 자산 i의 비중을 나타낸다. 전망에 대한 기대수익률(Q_e)은 식 (8)과 같이 각 포트폴리오 수익률과 벤치마크 지수의 수익률의 차를 사용한다.

$$Q_e = \begin{pmatrix} r_1 - r_b \\ r_2 - r_b \\ r_3 - r_b \end{pmatrix} \quad (8)$$

식 (8)에서 r_1은 매수 포트폴리오 기대수익률, r_2는 유지 포트폴리오 기대수익률, r_3는 매도 포트폴리오 기대수익률, 그리고 r_b는 목표지수 수익률을 나타낸다. 포트폴리오 기대 수익률은 각 포트폴리오 전망값과 과거 데이터 평균 수익률의 곱으로 계산한다. 기존 블랙리터만 모형 연구에서 사용하는 전망행렬 생성은 오차가 발생하여 정확한 전망을 모형에 반영하기 어렵다. 이에 대한 해결책으로 전망 행렬에 주가의 상승이나 하락추세의 지속성을 측정하는 모멘텀을 적용하는 방법이 제시되었다. Mulvey et al.[13]는 모멘텀을 이용하여 전망행렬을 구성 할 때 수익률 랭킹을 고려하여 투자 대상 자산에서 기대수익률이 가장 높은 10% 자산을 Win 그룹으로 지정하고 나머지 90% 자산을 Lose 그룹으로 구분하였다. 한편, 이 논문은 한국 주식 시장의 특징을 고려하여 외국인 수급 순위, 기관 수급 순위, 그리고 수익률 순위를 고려한 모멘텀 전략을 사용한다. 외국인 수급과 기관 수급은 과거 데이터를 이용하여 검증한 1개월과 3개월을 이용한다[1]. 외국인 수급은 식 (9)와 같이 정의한다.

$$\text{외국인 수급} = \frac{\text{최근 1개월 섹터의 외국인 순매수}}{\text{최근 1개월 전체 시장의 외국인 순매수}} - \text{최근 1개월 섹터 시장 비중} \quad (9)$$

기관 수급은 식 (10)과 같이 정의한다.

$$\text{기관 수급} = \frac{\text{최근 3개월 섹터의 기관 순매수 합계}}{\text{최근 3개월 전체 시장의 기관 순매수 전체 합계}} - \text{최근 1개월 섹터 시장 비중} \quad (10)$$

외국인과 기관이 특정 섹터를 시장비중보다 더 많이 매수하면 향후 전망이 좋음을 의미하고 외국인과 기관 매수가 많은 상위 섹터는 이후 상승할 가능성이 높다. 각 섹터는 측정 값이 큰 순서로 정렬하고 두 번째와 세 번째 섹터에 외국인 수급은 2점, 기관 수급은 1점을 부여한다. 수익률 순위는 최근 1개월, 3개월, 6개월, 그리고 12개월 수익률이 가장 높은 섹터의 다음 달 성과를 파악하여 패턴을 찾아내는 방식이다. 수익률은 식 (11)과 같이 정의한다.

$$\text{수익률} = \frac{\text{주식 매도 가격} - \text{주식 매수 가격}}{\text{주식 매수 가격}} \quad (11)$$

계산한 1개월, 3개월, 6개월, 그리고 12개월 수익률 순위가 가장 높은 섹터에 각각 1점을 부여하고 각 섹터가 얻은 점수의 합으로 최종 수익률 점수를 계산한다. 모멘텀 전략을 반영한 전망행렬(P_m)은 식 (12)와 같이 절대 전망행렬로 구성한다.

$$P_m = \left\{ \frac{a_1 + b_1 + c_1}{\sum_{i=1}^{n} s_i} \quad \frac{a_2 + b_2 + c_2}{\sum_{i=1}^{n} s_i} \quad \frac{a_3 + b_3 + c_3}{\sum_{i=1}^{n} s_i} \quad \cdots \quad \frac{a_n + b_n + c_n}{\sum_{i=1}^{n} s_i} \right\} \quad (12)$$

식 (12)에서 a_i는 자산 i가 획득한 외국인 수급 순위 점수, b_i는 자산 i가 획득한 기관 수급 순위 점수, c_i는 자산 i가 획득한 최종 수익률 순위 점수, 그리고 s_i는 자산 i가 획득한 외국인 수급 순위 점수, 기관 수급 순위 점수, 그리고 최종 수익률 순위 점수의 합을 나타낸다. 전망에 대한 기대수익률은 식 (13)과 같이 모멘텀 전망행렬의 기대 수익률(r_m)을 이용한다.

$$Q_m = (r_m) \quad (13)$$

식 (13)에서 모멘텀 전망행렬의 기대 수익률(r_m)은 각 섹터의 모멘텀 전망행렬 값과 과거 데이터의 평균 수익률의 곱의 합으로 계산한다.

자산 관리 제약에는 섹터 선택 수 제약과 비중 제약이 있다. 섹터 선택수 제약은 포트폴리오를 효율적으로 운영하기 위해 필요하고 비중 제약은 극단적으로 높거나 낮은 자산 비중 배분을 방지한다. 거래 제약은 최소 거래 단위 제약과 거래비용 제약이 있으며 최소 거래 단위 제약은 개별 자산을 거래할 때 최소 거래 단위를 고려한다. 그리고 거래비용 제약은 거래량이 증가할수록 거래 비용 증가비율이 감소하는 제약이다. 이 논문은 포트폴리오 관리를 위한 현실 제약 중 자산 관리 제약만을 고려한다. 블랙리터만 수익률은 균형기대수익률과 전문가 평가와 모멘텀 전략을 결합한 투자자 전망을 식 (4)에 대입하여 계산한다.

4. 블랙리터만 수익률을 이용한 섹터 펀드최적화 모형

이 논문은 현실제약조건을 고려하기 위해 섹터 펀드 최적화 모형과 현실제약을 고려한 섹터 펀드 최적화 모형을 제시한다. 섹터 펀드 설계문제 정의에 필요한 집합과 모수는 다음과 같다.

N : 섹터 지수 집합 $N = \{1, \cdots, n\}$
$\hat{E}(r_i)$: 섹터 지수 $i \in N$의 수익률
$(\hat{E}(r_i) = \Pi + [\Sigma P^T [P\Sigma P^T + \Omega']^{-1}][Q - P\Pi])$
λ : 위험회피계수
$\widehat{\sigma_{ij}}$: 섹터 지수 $i \in N$와 $j \in N$의 수익률 공분산
a : 섹터 지수 선정 개수
l_i : 섹터 지수 $i \in N$의 비중 하한$(0 \le l_i \le 1)$
u_i : 섹터 지수 $i \in N$의 비중 상한$(0 \le u_i \le 1)$

섹터 펀드 설계에 필요한 의사 결정 변수는 다음과 같다.

w_i : 섹터 지수 $i \in N$의 비중
x_i : 섹터 지수 $i \in N$를 선택하면 1, 그렇지 않으면 0

섹터 펀드 설계 문제에서 최적화 모형은 포트폴리오 수익률과 위험의 최대 차를 목적식으로 한다. 이 논문에서 섹터 펀드 최적화 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{E}(r_i) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \widehat{\sigma_{ij}} \\ \text{Subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \qquad (14) \\ & w_i \ge 0, \ i = 1, 2, \cdots, n . \end{aligned}$$

섹터 펀드 최적화 모형에서 식 (14)는 포트폴리오를 구성하는 섹터 비중의 합이 1임을 나타낸다. 위험회피계수는 식 (5)의 계산값을 이용한다. 현실제약을 고려한 섹터 펀드 최적화 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{E}(r_i) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \widehat{\sigma_{ij}} \\ \text{Subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \qquad (15) \\ & l x_i \le w_i \le u x_i, \ i = 1, 2, \cdots, n , \qquad (16) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \ i = 1, 2, \cdots, n , \\ & w_i \in \mathrm{R}, \ i = 1, 2, \cdots, n . \end{aligned}$$

식 (15)는 포트폴리오에 포함된 섹터 개수를 나타낸다. 식 (16)은 포트폴리오를 구성하는 섹터 비중의 하한과 상한을 제한한다. 현실제약을 고려한 섹터 펀드 최적화 모형을 이용하여 섹터 선택 개수와 섹터 비중의 하한과 상한 변화 효과를 분석한다. 섹터 선택 개수는 3, 5, 그리고 7개로 지정하여 결과를 비교 분석한다. 섹터 비중의 하한과 상한은 섹터 선택 개수가 3, 5, 그리고 7일 때는 상한 35%와 하한 10%를 실험하고 섹터 선택 개수 7일 때 상한 20%, 하한 5%와 상한 15%, 하한 10%를 추가로 실험한다.

5. 실험결과와 분석

이 논문은 섹터 펀드 최적화 모형을 실험하기 위해 KOSPI 200 섹터 지수를 사용한다. KOSPI 200 섹터 지수는 KOSPI 지수에서 누적 시가 총액 70%

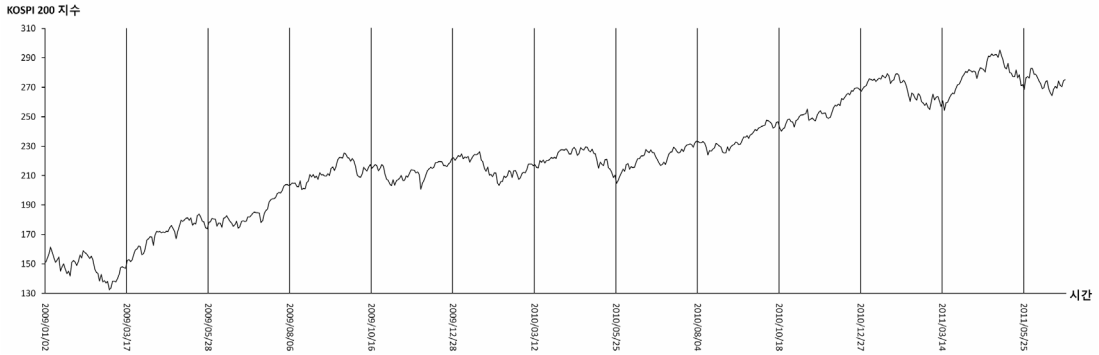
~85%를 차지하고 연간 거래량이 상위 85%에 속하는 종목으로 구성한다. 따라서 KOSPI 200 섹터 지수에 포함된 종목으로 KOSPI 지수를 추적하는 포트폴리오 구성이 가능하고 적은 투자자금과 거래비용으로 KOSPI 지수 대비 높은 수익률을 얻을 수 있다. KOSPI 200 섹터 지수는 KOSPI 200 건설/기계, KOSPI 200 조선/운송, KOSPI 200 철강/소재, KOSPI 200 에너지/화학, KOSPI 200 정보통신, KOSPI 200 금융, KOSPI 200 필수소비재, 그리고 KOSPI 200 자유소비재로 구성되어 있다[2].

<표 2>는 실험에 사용하는 In-Sample, Out-Sample, 그리고 기간 별 주가 변화 상황을 나타낸다. In-Sample 실험 데이터는 모수 추정에 사용하고 Out-Sample 실험 데이터는 모수 검증에 사용한다. In-Sample 실험 데이터는 Out-Sample 실험 데이터에 따라 과거 3, 6, 12, 24, 36개월 KOSPI 200 섹터 지수의 일일 수익률을 사용한다. <그림 3>은 실험 데이터의 주가 변화를 나타낸다. In-Sample 실험 데이터는 모두 상승기이고 Out-Sample 실험 데이터는 월 별로 상승기, 횡보기, 그리고 하락기를 모두 포함하며 일일 수익률을 사용한다. 주가 모멘텀은 일일 또는 주간 주가 변화로 확인이 어렵고 전문가 전망은 매달 초 혹은 말에 발표하므로 매달 포트폴리오 구성을 달리하여 실험한다. 그리고 포트폴리오 보유 기간에 따른 변화를 살펴보기 위해 포트폴리오 보유기간 2개월과 3개월을 추가로 실험한다.

<표 3>은 KOSPI 200 섹터지수 시가총액과 비중을 나타낸다. KOSPI 200 섹터지수 시가총액과 비중을 식 (1)에 대입하여 KOSPI 200 섹터지수 별 균형기대수익률을 계산한다. 이 논문의 블랙리터만 모형은 Microsoft Office Excel 2010을 이용하여 구현하였고 섹터 펀드 최적화 모형은 최적화 사용패키지인 CPLEX 12.1 이용하여 풀었다. 그리고 실험 결과는 Pentium Dual-Core CPU 2.50 Ghz, 4Gbyte RAM PC를 이용하였다.

〈표 2〉 KOSPI 200 실험 데이터

Set	In-Sample	Out-Sample
1	Out-Sample 시작일 이전 3, 6, 12, 24, 36개월	2011년 01월 03일~2011년 01월 31일
2		2011년 02월 01일~2011년 02월 28일
3		2011년 03월 02일~2011년 03월 31일
4		2011년 04월 01일~2011년 04월 29일
5		2011년 05월 02일~2011년 05월 31일
6		2011년 06월 01일~2011년 06월 30일



〈그림 3〉 실험 기간의 KOSPI 200 지수 변화

〈표 3〉 KOSPI 200 섹터 지수 시가총액과 비중

Out-Sample 데이터	시가총액	건설기계	조선운송	철강소재	에너지화학	정보통신	금융	필수소비재	자유소비재
2011년 1월	금액 (백억 원)	52,635	82,246	72,138	121,300	251,572	152,972	113,873	149,602
	비중(%)	5.3	8.3	7.2	12.2	25.3	15.4	11.4	15.0
2011년 2월	금액 (백억 원)	56,054	87,469	71,103	137,874	255,479	146,612	106,801	146,335
	비중(%)	5.6	8.7	7.1	13.7	25.4	14.5	10.6	14.5
2011년 3월	금액 (백억 원)	47,503	76,507	70,869	122,136	242,033	140,855	100,764	143,510
	비중(%)	5.0	8.1	7.5	12.9	25.6	14.9	10.7	15.2
2011년 4월	금액 (백억 원)	52,711	85,413	78,858	150,744	245,082	148,888	103,966	166,371
	비중(%)	5.1	8.3	7.6	14.6	23.8	14.4	10.1	16.1
2011년 5월	금액 (백억 원)	54,302	91,285	77,020	165,134	247,143	148,807	105,995	186,197
	비중(%)	5.1	8.5	7.2	15.4	23.0	13.8	9.9	17.3
2011년 6월	금액 (백억 원)	50,586	86,708	72,513	164,327	239,580	136,063	109,245	191,687
	비중(%)	4.8	8.3	6.9	15.6	22.8	13.0	10.4	18.2

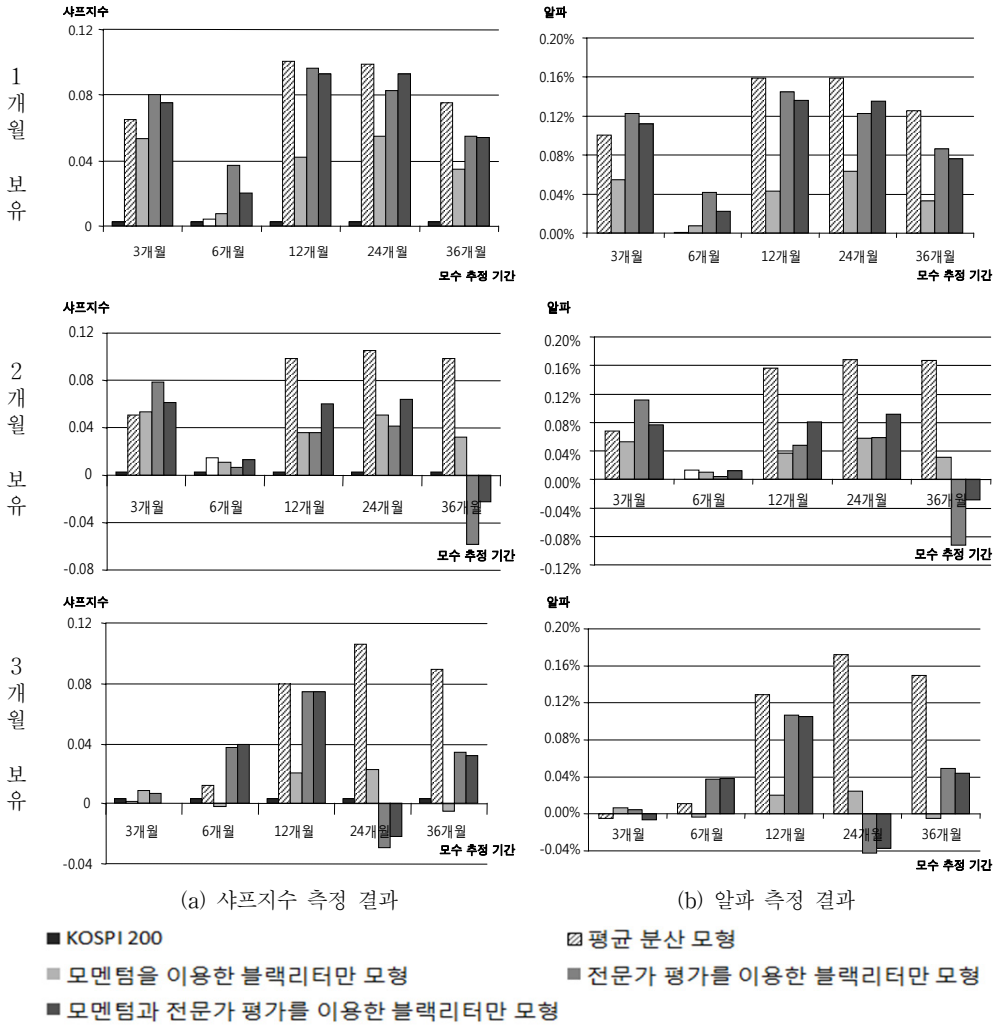
실험 방법은 섹터 펀드 최적화 모형에 In-sample 데이터 기간별로 추정한 평균 수익률, 모멘텀 전략을 전망 행렬에 반영한 블랙리터만 수익률, 전문가 평가를 전망 행렬에 반영한 블랙리터만 수익률, 그리고 모멘텀 전략과 전문가 평가를 전망행렬에 반영한 블랙리터만 수익률을 이용한 포트폴리오를 1개월, 2개월, 그리고 3개월 보유한 결과를 비교 분석한다.

<그림 4>(a)는 섹터 펀드 최적화 모형 이용하여 얻은 포트폴리오의 샤프지수 측정 결과를 나타낸다. 샤프 지수는 위험자산에 투자해서 얻은 초과수익 정도를 나타내는 지표로 지수가 클수록 투자 성과가 우수하며 식 (17)과 같이 정의한다.

$$\text{샤프지수} = \frac{r_p - r_f}{\sqrt{var(r_p - r_f)}} \qquad (17)$$

식 (17)에서 r_p는 포트폴리오 수익률, r_f는 무위험 자산의 수익률을 나타낸다. 포트폴리오를 1개월 보유할 경우 모수 추정 기간 12개월에서 모멘텀을 이용한 블랙리터만 모형을 제외한 모든 모형에서 제일 높은 포트폴리오 성과를 얻었다. 그리고 모든 모수 추정기간에서 모멘텀을 이용한 포트폴리오가 가장 나쁜 성과를 얻었으며 전문가 평가를 이용한 포트폴리오와 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 포트폴리오는 비슷한 성과를 얻었다. 또한 모든 모형이 목표지수보다 높은 성과를 얻었다. 포트폴리오 보유기간이 1개월보다 길면 포트폴리오 성과가 낮아지고 성과 순위가 불규칙적으로 변화하는 것으로 나타났다. 그리고 모수 추정 기간이 짧을수록 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형의 성과가 다른 모형보다 높은 성과를 얻었다.

<그림 4>(b)는 섹터 펀드 최적화 모형 이용하여 얻은 포트폴리오의 알파 측정 결과를 나타낸다. 알파는 벤치마크 대비 초과 수익 정도를 나타내는 지표로 지수가 클수록 벤치마크 보다 투자 성과가 우수하고 식 (18)과 같이 정의한다.

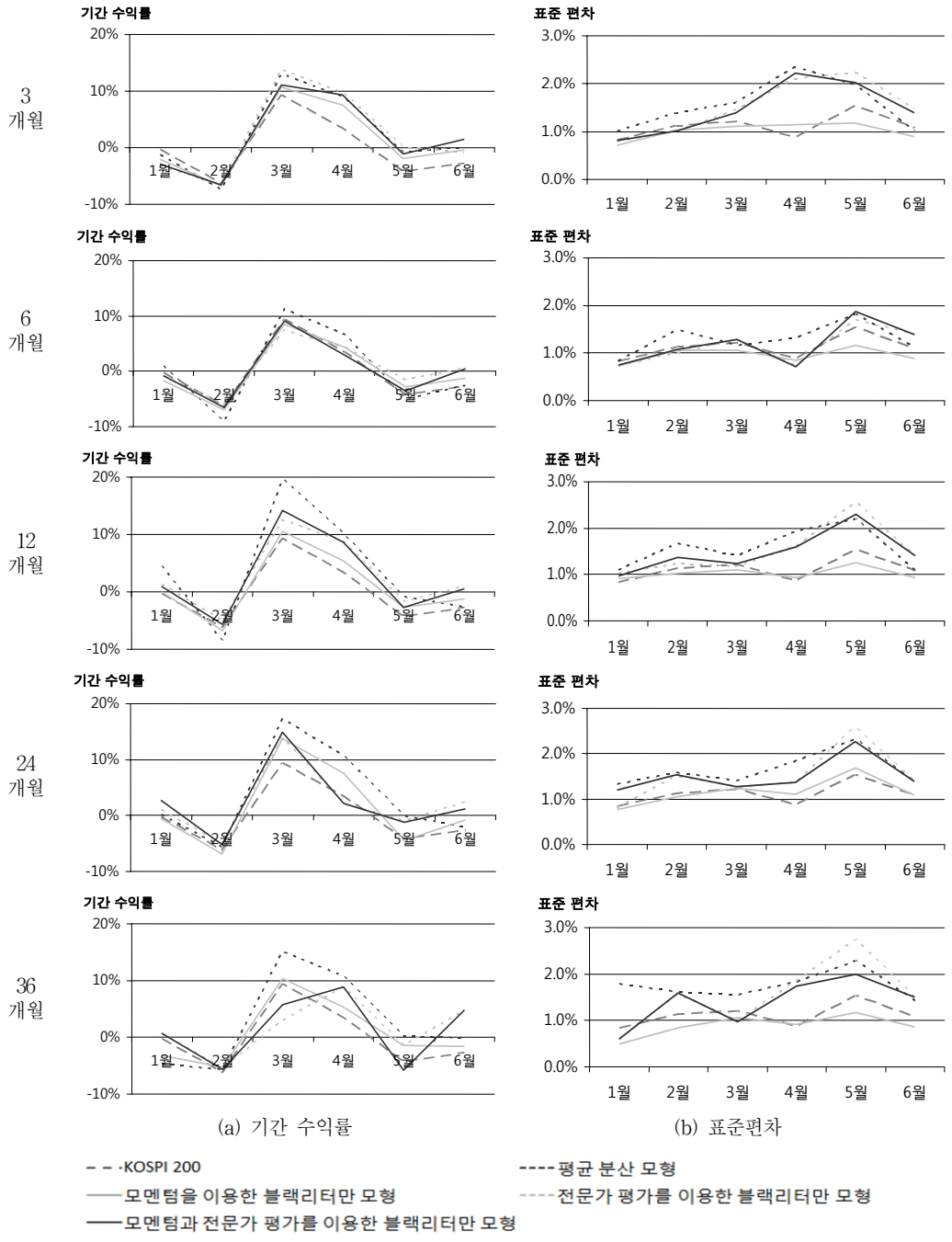


〈그림 4〉 모수 추정기간과 포트폴리오 보유 기간에 따른 포트폴리오 성과

$$\alpha_p = r_p - \beta_p r_b \tag{18}$$

식 (18)에서 r_p는 포트폴리오 수익률, r_b는 벤치마크 수익률, 그리고 β_p는 벤치마크 수익률에 대한 포트폴리오 수익률의 추적 정도를 나타낸다. 샤프지수 결과와 같이 포트폴리오를 1개월 보유할 경우 모수 추정 기간 12개월에서 모멘텀을 이용한 블랙리터만 모형을 제외한 모든 모형이 제일 높은 초과수익률을 얻었다. 또한 모든 모수 추정기간에서 모멘텀을 이용한 포트폴리오가 가장 나쁜 성과를 얻었으며 전문가 평가를 이용한 포트폴리오와 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 포트폴리오는 비슷한 성과를 얻었다. 샤프 지수와 알파 측정 결과, 포트폴리오를 1개월 보유할 경우 전문가 평가와 모멘텀을 모두 이용한 포트폴리오의 성과는 전문가 평가를 이용한 포트폴리오의 성과보다 낮고 모멘텀을 이용한 포트폴리오의 성과보다 높았다. 그리고 포트폴리오 보유 기간이 길어질수록 전문가 평가를 이용한 포트폴리오 성과가 다른 포트폴리오 성과보다 낮아졌다. 즉, 포트폴리오 보유기간이 짧

고 모수 추정기간이 짧을수록 전문가 평가를 반영한 블랙리터만 모형의 성과가 높고 포트폴리오 보유기간이 길수록 전문가 평가를 반영한 블랙리터만 모형의 성과가 낮아지나 모멘텀을 추가로 반영



〈그림 5〉 모수 추정기간에 따른 포트폴리오의 월별 기간수익률과 표준편차

할 경우 상대적으로 높은 성과를 얻었다. 이는 블랙리터만 모형에서 증권사 월별 포트폴리오를 전문가 평가로 이용하여 포트폴리오 보유기간이 1개월 이상일 경우 새로운 정보를 모형에 반영할 수 없기 때문이다.

<그림 5>(a)는 KOSPI 200과섹터 펀드 모형을 이용하여 얻은 포트폴리오를 1개월 보유할 경우월별 기간 수익률을 나타낸다. 월 별 기간 수익률 측정 결과 모수 추정기간 6개월에서 4월, 모수 추정기간 24개월에서 4월, 그리고 모수 추정기간 36개월에서 3월과 5월을 제외한 결과에서 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 포트폴리오가 모멘텀을 이용한 포트폴리오와 전문가 평가를 이용한 포트폴리오 수익률의 사이 값을 가지거나 더 높은 수익률을 가졌다. 또한 Out-Sample 기간 동안 누적 기간 수익률은 In-Sample 기간 3개월 12개월 그리고 36개월에서는 전문가 평가를 이용한 포트폴리오가 가장 높은 수익을 얻었고 6개월과 24개월에서는 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 포트폴리오가 가장 높은 수익을 얻었다.

<그림 5>(b)는 KOSPI 200과 섹터 펀드 모형을 이용하여 얻은 포트폴리오를 1개월 보유할 경우 일일 수익률의 표준편차를 나타낸다. 다른 모형보다 섹터 선택 개수가 적은 모멘텀을 이용한 포트폴리오의 표준편차가 낮은 것으로 나타났다. 그리고 전문가 평가를 이용한 포트폴리오와 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 포트폴리오는 섹터 선택 개수가 5 또는 6개로 비슷하지만 전문가 평가를 이용한 포트폴리오의 표준편차가 큰 경우가 많았다.

<표 4>는 각 모형의 포트폴리오 성과가 가장 높은 모수 추정기간 12개월에서 상한 35%, 하한 10%일 경우, 섹터 선택 개수 변화에 따른 포트폴리오의 결과를 나타낸다. 현실제약을 고려한 섹터 펀드 최적화 모형에서 모멘텀을 이용한 블랙리터만 모

〈표 4〉 섹터 선택 개수 변화에 따른 포트폴리오 결과

평균 분산 모형									
섹터 선택 개수	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
3	0.16%	1.45%	0.098	-0.090	-0.586	-3.00%	3.68%	0.14%	1.083
5	0.14%	1.44%	0.088	-0.024	-0.238	-3.63%	4.14%	0.12%	1.113
7	0.05%	1.09%	0.037	-0.069	-0.461	-2.33%	2.49%	0.04%	0.919
모멘텀을 이용한 블랙리터만 모형									
섹터 선택 개수	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
3	0.04%	1.08%	0.025	0.169	-0.528	-2.22%	2.65%	0.03%	0.842
5	0.05%	1.09%	0.032	-0.056	-0.447	-2.55%	2.56%	0.03%	0.909
7	0.10%	1.32%	0.061	-0.077	-0.237	-3.36%	3.56%	0.08%	1.078
전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형									
섹터 선택 개수	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
3	0.21%	1.55%	0.123	-0.123	0.233	-4.43%	4.67%	0.18%	1.176
5	0.14%	1.45%	0.086	-0.163	0.033	-3.84%	4.13%	0.12%	1.126
7	0.10%	1.34%	0.066	-0.135	-0.221	-3.42%	3.57%	0.08%	1.087
모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형									
섹터 선택 개수	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
3	0.17%	1.46%	0.107	-0.152	-0.164	-3.40%	3.92%	0.15%	1.108
5	0.14%	1.43%	0.090	-0.163	-0.100	-3.76%	3.90%	0.12%	1.111
7	0.10%	1.33%	0.063	-0.124	-0.322	-3.25%	3.39%	0.08%	1.076

형은 섹터 선택 개수가 증가할수록 샤프지수와 알파가 증가하였으나 다른 모형에서는 섹터 선택 개수가 증가할수록 샤프지수와 알파가 감소하였다. 모멘텀을 이용한 블랙리터만 모형은 현실제약을 고려하지 않을 때 섹터 선택 개수가 7 또는 8개를 선택하였으며 섹터 선택 개수가 증가할수록 포트폴리오 성과가 높아진다. 평균 분산 모형, 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형, 그리고 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형은 현실제약을 고려하지 않을 때 섹터 선택 개수가 5 또는 6개를 선택하였으며 선택 개수를 증가할수록 포트폴리오 성과가 낮아진다. 또한 모멘텀과 전문가 평가를 반영한 블랙리터만 모형은 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형과 비슷한 성과를 얻었으나 포트폴리오 위험을 나타내는 표준편차가 더 낮았다.

<표 5>는 모수추정기간 12개월에서 섹터 선택 개수가 7개일 때, 상환과 하한의 변화에 따른 포트폴리오 결과를 나타낸다. 현실 제약을 고려한 섹터 펀드 최적화 모형실험에서 섹터 선택 개수가 7개일 경우, 상한이 증가할수록 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형의 포트폴리오 성과가 우수해졌다. 그리고 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형은 전문가 평가보다 작은 위험에서 높은 초과수익을 얻는 경우가 나타났다. 또한 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 포트폴리오는 섹터 선택 비중의 상한과 하한을 제한하더라도 모든 경우에서 모멘텀을 이용한 포트폴리오보다 높은 초과수익을 얻었다.

6. 결 론

이 논문은 블랙리터만 모형을 이용한 섹터지수 투자 전략을 제시한다. 섹터지수 특징을 분석하고 투자 전략에 따른 블랙리터만 모형 모수 계산 방법과 모멘텀 전략과 전문가 평가를 통합한 블랙리터

〈표 5〉 상한과 하한 변화 따른 포트폴리오 결과

평균 분산 모형										
상한	하한	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
15%	10%	0.09%	1.26%	0.062	-0.072	-0.429	-3.03%	3.11%	0.07%	1.029
20%	5%	0.06%	1.19%	0.039	-0.136	-0.322	-3.00%	2.92%	0.04%	1.002
35%	10%	0.10%	1.32%	0.061	-0.077	-0.237	-3.36%	3.56%	0.08%	1.078
모멘텀을 이용한 블랙리터만 모형										
상한	하한	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
15%	10%	0.04%	1.14%	0.025	-0.099	-0.376	-2.72%	2.75%	0.03%	0.973
20%	5%	0.05%	1.12%	0.029	-0.049	-0.477	-2.58%	2.68%	0.03%	0.957
35%	10%	0.05%	1.09%	0.037	-0.069	-0.461	-2.33%	2.49%	0.04%	0.919
전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형										
상한	하한	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
15%	10%	0.08%	1.22%	0.050	-0.131	-0.323	-2.99%	2.93%	0.06%	1.009
20%	5%	0.09%	1.29%	0.062	-0.127	-0.055	-3.42%	3.41%	0.07%	1.050
35%	10%	0.10%	1.34%	0.066	-0.135	-0.221	-3.42%	3.57%	0.08%	1.087
모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형										
상한	하한	평균 수익률	표준편차	샤프지수	왜도	첨도	최소 수익률	최대 수익률	알파	베타
15%	10%	0.07%	1.20%	0.047	-0.110	-0.394	-2.88%	2.84%	0.05%	0.997
20%	5%	0.10%	1.27%	0.068	-0.142	-0.038	-3.42%	3.41%	0.08%	1.034
35%	10%	0.10%	1.33%	0.063	-0.124	-0.322	-3.25%	3.39%	0.08%	1.076

만 전망 행렬 구성 방법을 제시하였다. 또한 포트폴리오 최적 비중을 산출하기 위해 섹터 펀드 최적화 모형을 제시하였다. 모수 추정기간과 포트폴리오 보유기간이 짧을수록 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형과 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형의 포트폴리오 성과가 다른 모형보다 우수하였고 평균 분산 모형은 모수 추정 기간이 길수록 다른 모형보다 우수한 포트폴리오 성과를 얻었다. 그리고 현실 제약을 추가하였을 경우 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형과 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형이 우수한 포트폴리오 성과를 보였다. 또한 모멘텀과 전문가 평가를 이용한 블랙리터만 모형은 전문가 평가를 이용한 블랙기터만 모형보다 낮은 위험을 가지며 포트폴리오 성과가 비슷하거나 우수하였다. 포트폴리오 연구결과는 유망 업종에 대한 투자 배분과 포트폴리오 자산 관리 방법으로 사용될 수 있고 채권, 파생상품, 그리고 부동산으로 관리 자산 영역을 확장할 수 있다. 따라서 현업에서 섹터 펀드 투자를 위해 논문에서 제시한 모형을 사용하여 섹터 펀드 투자 전략을 구성하고 펀드 이익을 창출할 수 있다.

추후 연구 과제로 최소거래 단위 제약과 거래비용 제약을 고려하는 모형을 이 논문의 확정 모형으로 고려할 수 있다. 또한 ETF(Exchanged Traded Fund)와 같은 섹터 지수 투자 상품에 대한 연구가 필요하다. 그리고 블랙리터만 모형에서 CVaR(Conditional Value at Risk)와 MAD(Mean Absolute Deviation)와 같은 새로운 위험 지표를 사용하는 모형 연구를 추진할 예정이다.

참 고 문 헌

[1] 대신증권, “Leading Sector Rotation Strategy,” 「Quant Strategy」, 2011.

[2] 한국거래소, KOSPI 200 섹터지수, http://www.krx.co.kr/m1/m1_4/m1_4_3/m1_4_3_8/UHPKOR01004_03_08_01.html.

[3] 한국경제신문, 「경제용어사전」, http://www.hankyung.com/dic/cp/popMain.php.

[4] Bevan, A. and K. Winkelmann, "Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model : Three Years of Practical Experience," Goldman Sachs Fixed Income Research Paper, 1998.

[5] Blummer, T., "Black-Litterman Model with Explicit View Confidence," Working Paper, 2011.

[6] Cleary, S. and M. Inglis, "Momentum in Canadian Stock Return," *Revue Canadienne des Sciences de l'Administraition*, Vol.15, No.3 (1998), pp.279-291.

[7] Fabre, J. and M. Snape, "Liquidity Surrounding Sell-Side Equity Analyst Recommendation Revisions on the Australian Securities Exchange," University of Sydney, 2007.

[8] FnGuide, 「2010 우수 증권사」 http://www.fnguide.com/Analyst/best_house_01.asp.

[9] He, P.W., "The Investment Value of Australian Security Analyst Recommendations : An Application of the Black-Litterman Asset Allocation Model," The University of Sydney, 2009.

[10] Jegadeesh, N., W. Kom, S. Krische, and C. Lee, "Analysing the Analysts : When Do Recommendations Add Value?," *Journal of Finance*, Vol.59, No.3(2004), pp.1083-1124.

[11] Krishnan, H. and N. Mains, "The Two-Factor Black-Litterman Model," *Risk Magazine*, 2005, pp.69-73.

[12] Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol.7, No.1(1952), pp.77-91.

[13] Mulvey, J.M., W.C. Kim, and M. Bilgili, "Linking Momentum Strategies with Single-Period Portfolio Models," Handbook of Portfolio Construction : Contemporary Applications of Markowitz Techniques, 2008.

[14] MyPlanIQ, "Value and Momentum Strategies for Asset Allocation and Stock Investment," 2009, http://seekingalpha.com/article/153245-value-and-momentum-strategies-for-asset-allocation-and-stock-investment.

[15] Rouwenhorst, K.G., "International Momentum Strategies," *Journal of Finance*, Vol.53, No.1 (1998), pp.267-284.

[16] Walters, J., "The Black-Litterman Model in Detail," Harvard Management Company, 2009.