대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 22 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 22, No. 1, 101-115. Feb 2012

유추에 의한 문제제기 활동을 통해 본 통계적 개념 이해

박 미 미* · 이 동 환** · 이 경 화*** · 고 은 성****

유사성을 근거로 하는 개연적 추론인 유추는 수학뿐만 아니라 물리 등의 여러 분야에서 개념 형성, 문제해결, 새로운 발견 등을 위해 사용되는 하나의 사고전략이다. 통계교육자들은 통계에서도 역시 유추가 유용한 사고전략으로 사용될 수 있다고 언급한다. 본 연구에서는 수학과는 다른 특성을 지닌 통계에서 학생들의 유추적 사고의 특징을 살펴본다. 이를 위해 수학영재학급 학생들을 대상으로 실생활 맥락이 담긴 통계문제를 기저문제로 제시하고 이와 유사한 문제를 만들도록 하였다. 학생들이 만든 문제는 기저문제의 통계적 맥락의 보존 여부 및 기저문제의 기본구조 유지 여부에 따라 다섯 가지 유형으로 분류되었다. 각 유형의 특징을 분석한 결과 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있었다. 통계에서는 기본구조가 유지되어도 통계적 맥락이 훼손되는 경우 그 문제의 의미를 찾을 수 없으나, 기본구조가 변형되었다 하더라도 통계적 맥락이 보존되는 경우 통계적 개념에 대한 재개념화에 기여할 수 있다는 가능성을 확인하였다.

Ⅰ. 서론

유사성을 근거로 하는 개연적 추론인 유추는 수학적 발견의 풍부한 원천일 뿐만 아니라 문제해결의 주요 전략 중 하나이다(Polya, 1954). 수학의 역사는 유추가 수학적 발견 및 문제해결에 유용한 도구임을 보여준다. 예를 들어, 칸토어는 집합론의 주요 개념을 발견하고 정의하고 체계화하는 과정에서 유추를 사용하였다. 또한 오일러는 유한개의 항으로 표현되는 다항방정식의 근에 성립하는 성질을 무한개의 항을 갖는 삼각방정식에 적용하는 대담한 유추를 통해 무한급수의 합을 구하였다(이경화, 2009a, pp.357-359). 유추의 교육적 활용에 주목한 수학교육자들은 유추를 고전적 유추, 문제 유추, 교수학적 유추 등으로 구분하고 있는데(English, 2004), 이는 유추가 수학을 학습하고 지도하는데 있어 다방면으로 활용 가능한 유용한 사고 도구임을 말해준다. 최근에는 수학적 능력이 뛰어난 수학영재 학생들의 유추 능력에 주목한 연구들이 이루어지고 있다(신보미, 2011; 양기열 · 이의진, 2011; 이경화, 2009b; 최남광 · 유희찬, 2009; Klavir & Gorodetsky, 2009; Lee & Sriraman, 2011). 이들 연구는 수학영재 학생들의 사고 특징 중 하나로 유추적 사고 과정에 주목하면서, 수학적 개념이해 및 문제해결에서 유추의 활용 가능성을 제시해준다.

학교수학에서 통계는 수학 교과의 하위 영역 중 하나로 지도된다. 그러나 통계학자들은 통계를 수학의 한 분야가 아닌 통계 자체 내에 핵심

* 서울대학교 대학원 (gump28@snu.ac.kr, 제1저자)
** 한국과학창의재단 (dhlee@kofac.re.kr)
*** 서울대학교 (khmath@snu.ac.kr)
**** 서울대학교 대학원 (kes-7402@hanmail.net, 교신저자)

개념을 갖는 독립적인 학문으로 간주한다(Moore, 1998; Snee, 1990; Wild & Pfannkuch, 1999). 이들은 올바른 통계의 지도를 위해 수학과 다른 통계 고유의 특징에 주목해야 한다고 주장한다. 이들에 따르면, 수학과 구별되는 통계가 가지는 특징 중 하나는 탐구의 대상이 되는 자료가 맥락을 지닌 수라는 점이다. delMas(2004), Moore와 Cobb(2000), Rossman과 Chance, Medina(2006)는 수학적 추론과 통계적 추론의 본질을 설명하면서 수학적 추론과는 다른 통계적 추론의 특성을 명확히 드러내고자 시도하였다. 또한 delMas(2004)는 수학에서처럼 통계에서도 유추를 활용하여 통계의 추상적 개념과 과정에 대한 학생들의 이해를 증진시킬 수 있다고 주장하였다. Martin(2003) 역시 통계적 개념을 지도할 때 유추를 활용한 지도가 효과적인 접근이 될 수 있다고 주장한다. 그러나 통계에서 유추가 어떻게 발현되는지 또는 통계학습에서 유추가 어떠한 측면에 기여할 수 있는지 학생들의 사고 과정을 조사하거나 교수학습에 적용시킨 연구는 많지 않다.

본 연구에서는 통계에서 유추적 사고를 요구하는 활동이 제시되었을 때 발현되는 학생들의 사고를 조사한다. 이를 위해 수학영재학급 학생들을 대상으로 통계문제를 기저문제로 하는 유추에 의한 문제제기 활동을 제시한 후, 학생들이 만든 문제를 분석하였다. 수학영재 학생들은 수학적 문제해결 능력, 기호화 능력, 일반화 능력, 수학적 발견 능력 및 자발적으로 문제를 해결하고 새로운 문제를 제기하려는 성향에서 일반학급 학생들과 차이를 보인다(고은성 · 이경화 · 송상헌, 2008; 김민정 · 이경화 · 송상헌, 2008; 김지원 · 송상헌, 2004; 나귀수 · 이경화 · 한대희 · 송상헌, 2007; Greenes, 1981). 본 연구에서는 이러한 특성을 지니는 수학영재학급 학생들이 유추를 활용해 개발한 문제의 분석을 통해 통계에서 발현되는 학생들의 유추적 사고의 특징에는 어떠한 것이 있는지 살펴본다. 그리고 분석결과를 통해 유추에 의한 문제제기 활동이 통계교육에서 갖는 시사점에 대해 논의한다.

II. 이론적 배경

1. 유추의 의미와 수학에서의 유추

일반적으로 유추는 기저(base)가 되는 한 체계에서 목표(target)가 되는 다른 체계로의 구조적 정보의 전이로 정의된다. 여기서 전이는 두 체계 간의 관계적 대응을 발견하는 사상과정을 필요로 하는데, 이러한 사상을 만들기 위해 기저의 구조를 명확히 이해하고 기저와 목표 간의 대응을 인식할 수 있어야 한다(English, 1997, p.198). 유추의 핵심은 유사성을 바탕으로 이루어지는 관계비교에 있다. Gentner(1989)는 문제에 서술된 대상의 속성과 대상의 관계를 기준으로 유사성을 표면 유사성(surface similarity)과 구조적 유사성(structural similarity)으로 구분하였다. 표면 유사성은 공유된 대상 간에 나타나는 유사성이고, 구조적 유사성은 대상과 대상의 관계구조에서 나타나는 유사성이다.

수학에서 다루는 비례적 추론, 동형사상, 준-동형사상 등은 수학적으로 명확하게 정의되어 도구화된 유추이다. 학교수학과 학문수학의 초석을 이루는 비례적 추론은 유추보다 더 고도화된 수학적 사고이며, 동형사상은 구조의 전이를 나타내는 수학화된 유추, 준-동형사상은 구조의 체계적인 축소 번역으로서 수학화된 유추이다(이승우, 2001, pp.26-31). Fischbein(1987)은 수학에서 사용되는 유추를 수학 내적인 유추와 외적인 유추로 나누어 제시하였다. 수학 내적인 유추는 수학 개념이나 연산이 확장될 때 개입하거나 기호적, 대수적 표현 및 직관적, 기하학적 표

현 간의 해석에서 나타나는 유추를 말한다. 수학 외적인 유추는 Cuisenaire 막대와 같은 구조화된 교구나 수·도형의 그림 표현과 같은 수학 외적 모델로부터 수학 개념에 대한 유추이다.

2. 유추에 의한 문제제기

학교수학에서 사용할 수 있는 문제제기 상황에 대해 연구한 Stoyanova와 Ellerton(1996)은 문제제기 상황을 자유 문제제기 상황(free problem posing situation), 반구조화된 문제제기 상황(semi-structured problem posing situation), 구조화된 문제제기 상황(structured problem posing situation)으로 구분하여 제시하고 있다. 여기에서 구조화된 문제제기 상황은 특정 문제를 기반으로 문제제기 활동이 이루어지는 상황을 의미한다.

Kilpatrick(1987)과 Polya(1962)는 구조화된 문제제기 상황에서 사용할 수 있는 다양한 전략 중 하나로 유추를 제시하였다. 유추를 활용한 문제제기 활동은 주어진 문제(기저문제)와 유사한 새로운 문제를 만드는 과제를 통해 구체화 될 수 있다. 이경화(2009b)는 수학의 내용영역과 수학적 활동요소 및 고전적 유추 과제의 형태(A:B::C:D)를 고려하여 유추를 위한 과제의 형태를 5가지로 제시하였다. 각 과제들은 의도적으로 주목해야 하는 내용 및 제시하는 조건에 따라 그 형태가 결정된다. 유추에 의해 연산의 원리를 발견하거나 용어 혹은 개념을 확장하는 과제, 유사한 성질을 파악하여 유사한 정리를 발견하게 하는 과제, 이미 알고 있는 문제해결방법과 유사한 방법을 이용하여 문제를 해결하는 과제, 이미 경험한 아이디어와 유사한 것을 이용하여 정리를 증명하게 하는 과제 등이 유추과제의 예이다(p.48). 이경화(2009b)가 제시한 과제형태에 따라 유추에 의한 문제제기 과제의 형태는 'A:?::?:?'와 같이 표현된다. 이 때, A는 주어진 문제(기저문제)이다. 성공적인 문제제기가 이루어지기 위해 학생들은 주어진 기저문제 A에 포함되어 있는 대상 및 각 대상간의 관계를 파악할 수 있어야 한다. A에 포함된 대상과 대상간의 관계가 파악되고 나면, 이를 토대로 기저문제 A와 구조적으로 유사한 새로운 문제의 형성으로 나아가게 된다.

문제제기의 효용성에 주목한 수학교육자들은 문제제기 활동이 가지는 수학 교수·학습에의 시사점을 다양하게 제시하고 있다. 특히 유추에 의한 문제제기는 학생들이 이미 가지고 있는 지식과 새로운 문제를 자연스럽게 관련짓게 하고. 새로운 문제의 해결방법을 활발하게 탐색하게 한다. 또한 유추를 통해 스스로 문제를 제기하는 경우에는 이미 문제가 제기되는 맥락을 파악하고 있는 상태이므로, Polya가 제시한 문제해결의 4단계 중 첫 번째 단계인 '문제이해' 과정이 생략될 수 있다(이승우, 2001, p.93). 따라서 유추에 의한 문제제기는 문제해결을 촉진하는 문제해결 전략 중 하나로 사용될 수 있다.

Hashimoto(1987)는 유추에 의한 문제제기 활동이 학생들의 수학 개념에 대한 이해를 기술해주는 유용한 교수학적 도구로 사용될 수 있다고 언급하였다(Stoyanova & Ellerton, 1996, p.520에서 재인용). 또한 학생들이 직접 만든 문제를 통해 학생들의 다양한 사고 및 전략을 파악할 수 있다. 예를 들어, Bull과 Montgomery, Kimball(1999)은 유사한 문제를 제기하는 활동은 내적 관계를 구성하는데서 나타나는 인지적 유연성 및 정교성과 관련되므로 문제제기자의 창의적 사고를 평가하기에 적합하다고 주장하였다(Klavir & Gorodetsky, 2009, p.225에서 재인용). 이에 따라 Klavir와 Gorodetsky(2009)는 숙련된 학생들(the experts)과 수학 영재 학생들의 창의성을 비교·평가하기 위해 유사한 문제를 제기하는 과제를 사용한 바 있다.

3. 통계 및 통계적 사고의 특징

수학과 통계는 추상적인 개념이나 관계에 대한 추론을 요구한다는 점에서 유사해 보이지만, 맥락이 미치는 영향에서 차이를 보인다. 수학에서 맥락은 필수적인 역할을 하지 않는다. 모델을 추상화하는 초기 단계에서 학생들의 수학적 구조에 대한 이해를 돕기 위해 친숙한 맥락을 사용할 수는 있으나, 수학적 대상에 대한 정신모델이 적절하게 구성된 이후 문제를 맥락화하는 것은 불필요하다. 더욱이 추상적인 패턴을 찾는 학문인 수학에서 맥락은 수학의 본질이 되는 구조를 찾는데 방해가 될 수 있으므로 맥락을 제거하는 것이 필요하다. 그러므로 수학적 탐구는 실세계 맥락과는 독립적으로 수학적 대상을 이해할 수 있는 능력을 필요로 한다(delMas, 2004, p.84).

맥락에 독립적인 수학과는 다르게 통계에서 모델의 추상화는 항상 맥락에서 출발한다. 그리고 모델의 선택 및 구성에서 모델의 타당성은 맥락에 비추어 판단된다. 통계에서 자료로 제시되는 수는 단순한 수가 아니라 맥락을 지닌 수이므로, 통계자료의 분석을 통해 나타나는 패턴은 맥락과 상호작용을 하게 된다(Cobb & Moore, 1997). 그러므로 통계적 사고자가 주어진 자료에 적용한 분석과 판단 결과를 정당화할 때, 이 정당화는 맥락과 독립적으로 이루어질 수 없으며 구체와 추상 사이에서의 상호작용을 필요로 한다. 이러한 점에서 통계적 추론은 맥락과 독립적인, 즉 객관적인 세계와 독립적인 수학적 추론과는 다르다(delMas, 2004).

Moore(1990)는 통계에서 맥락이 절차를 만들어 내는 역할을 하게 되고, 의미의 근원이 되며, 얻은 결과에 대한 해석의 토대가 되어야 한다고 주장한다(Gal, 2004, p.64에서 재인용). 통계적 소양에 대해 연구한 Gal(2004) 역시 통계적 메시지를 적절하게 해석하기 위해서는 메시지를 맥락 속에서 다루는 능력이 필요하다고 주장하면서, 성인이 가져야 하는 통계적 소양으로 맥락적 지식을 포함시키며 통계에서 맥락의 중요성을 강조하였다(p.64).

맥락 의존적인 통계 고유의 특성은 통계에서 제시되는 개념들의 이해에도 영향을 미친다. 통계에서 제시되는 개념들은 수학적 지식만으로는 온전히 이해될 수 없다. 예를 들어, Marnich(2008)는 산술평균의 이해는 수학적 지식뿐만 아니라 통계적 지식을 필요로 한다고 설명한다. 산술평균에 대한 수학적 지식은 절차적인 지식과 개념적인 지식으로 구성되고, 이 때 개념적 지식은 산술적 이해와 대수적 이해로 나눌 수 있다. 그리고 산술평균에 대한 통계적 지식은 산술평균이 자료 집합을 요약하는 대푯값임을 이해하게 될 때 획득되는 것으로, 맥락에 영향을 받는 지식이다. 즉, 산술평균의 완전한 이해를 위해서는 산술평균의 계산, 수학적 관련성, 통계적 측면의 이해가 통합되어야 한다(Marnich, 2008, p.25).

Marnich의 주장에 따르면 '10, 6, 4, 5, 8의 평균을 구하시오.'와 같은 문제는 통계문제가 아니라 수학문제가 된다. 이 문제를 해결하기 위해서는 산술평균 알고리즘을 알고 적용시키는 산술적 이해가 필요하다. 그리고 보상의 원리가 이 알고리즘과 관련이 있음을 이해해야 한다. 그러나 이것이 통계문제로서 그 역할을 하기 위해서는 주어진 수 '10, 6, 4, 5, 8'이 나타나는 맥락이 제시되어야 한다. 그리고 문제해결자가 적절한 통계적 사고를 했다고 평가받기 위해서는 제시된 통계적 맥락에서 최빈값 또는 중앙값이 아닌 산술평균이 왜 문제해결의 가장 적절한 도구인지를 판단해 낼 수 있어야 한다. 즉, 통계문제가 포함하고 있는 맥락을 고려하여 적절한 도구를 선택해서 사용해야 한다. 이 때 선택된 산술평균과 같은 도구를 맥락을 제거하고 그 자체만으로 생각한다면 이는 통계적 이

해보다는 수학적 이해를 한 것에 더 가깝다.

III. 연구방법

1. 연구대상 및 절차

본 연구는 총 42명의 중학교 2학년 수학영재 학급 학생들을 대상으로 진행되었다. 이 중 27명의 학생은 서울시 소재 대학부설 과학영재교육원 수학분과 심화반의 교육생이고, 15명의 학생은 청주시 소재 대학부설 과학영재교육원 수학분과 심화반의 교육생이다. 각 학생들은 초등학교 6학년 겨울방학 중에 치러진 영재교육원 선발시험에서 우수한 성적으로 입학한 학생들로, 뛰어난 수학적 문제해결능력을 보유한 것으로 판명된 학생들이다. 그리고 각 학생들 모두 하나의 차시가 3시간으로 이루어진 총 4차시의 수업에서 확률과 통계 영역의 내용을 학습하였다. 본 연구에서 분석이 되는 내용은 이들 중 하나의 차시에서 다루었던 학습내용으로, 2명의 연구자가 동일한 지도안을 이용해 두 영재교육원의 수업을 각각 진행하였다.

수업의 목표는 동일한 통계 자료에서 평균이 다르게 계산되는 상황이 발생하는 모호성의 원인을 밝히고, 이를 통해 분산과 같은 새로운 통계적 개념의 역할을 깨닫게 하는 것이었다. 수업 중 학생들은 실생활 맥락에서 얻은 다양한 통계 자료를 접하였고, 각 자료에서 제시된 산술평균과 가중평균 중에서 주어진 자료 및 자료의 맥락에 더 적합한 평균을 선택하고 선택의 이유를 설명해야 했다. 학생들의 의견이 다를 때에는 수업을 이끄는 교사가 서로 다른 의견을 갖는 학생 중 한(혹은 두)명을 발표하게 하여 함께 의견을 공유하도록 하였다. 이러한 방법을 통해 학생들은 동료 학생들의 의견에 대하여 확인할 수 있었다. 모든 활동을 마친 후에는 [그림 Ⅲ-1]의 문제를 기저문제로 제시하고 이와 유사한 문제

A학교에서는 방과후학교 수학수업 5개를 5명의 선생님이 가르치고 있다. 5개 반의 수강생은 각각 20명, 10명, 10명, 5명, 5명으로 총 50명이다. A학교는 학부모에게 방과후학교 수학수업의 학급당 수강생수를 알려주기 위해 평균을 다음과 같이 계산해서 $\frac{20+10+10+5+5}{5}=10$명이라고 발표하였다.

수학을 전공한 학부모가 수업을 듣고 있는 학생들에게 자신의 반 학생들이 몇 명인지를 물어보았다. 20명은 한 반의 정원이 20명이라고 대답했고, 10명이라고 대답한 학생은 20명, 5명이라고 대답한 학생은 10명이었다. 이 학부모는 학생들의 대답을 토대로 학급당 수학생 수를 다음과 같이 계산하였다.

$$\frac{20\times20+10\times10+10\times10+5\times5+5\times5}{20+10+10+5+5}=13$$

이 학부모는 A학교의 방과후학교 수학수업의 학급당 수강생 수를 13명이라고 생각하였다.

학교에서 발표한 평균과 학부모가 계산한 평균의 결과가 다르게 나왔다. 이 가운데 어떤 값이 올바르다고 생각하는가?

[그림 Ⅲ-1] 본 연구에서 사용한 기저문제

를 만들도록 하였다. 본 연구에서 분석한 주된 자료는 학생들이 만든 유사 문제이다. 본 연구를 위해 학생들에게 유사 문제 만들기 수업을 별도로 진행하지는 않았다.

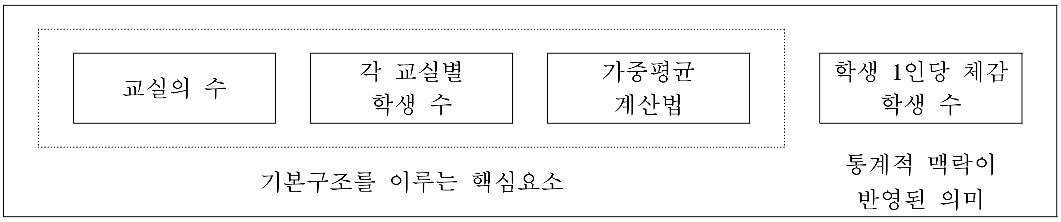
2. 과제 및 자료 분석

[그림 Ⅲ-1]은 본 수업의 문제제기 활동을 위해 사용된 기저문제이다. 이는 동일한 자료에 산술평균과 가중평균을 적용하고 있으며, 서로 다른 결과를 제시하고 있다. 그래서 주어진 상황에 적절한 평균, 즉 가중평균이 제시된 문제 상황에 더 적절함을 판단해야 한다. 본 연구에서는 학생들에게 이와 유사한 문제를 만들도록 요구하였다. 즉, 산술평균과 가중평균 모두를 문제해결 방법으로 제시할 수 있지만 가중평균이 더 적절한 상황이 되도록 새로운 문제를 만들도록 요구하였다.

기저문제와 유사한 문제를 만들기 위해 학생들은 먼저 기저문제의 구조, 즉 기저문제를 이루고 있는 핵심요소 및 각 핵심요소 간의 관계 구조를 파악해야 한다. 기저문제의 구조는 [그림 Ⅲ-2]와 같이 도식화 할 수 있다. [그림 Ⅲ-2]의 왼쪽에 제시된 세 가지(교실의 수, 각 교실의 학생 수, 평균계산법) 요소는 기저문제의 기본구조를 구성하는 핵심요소이다. 그리고 가장 오른쪽에 제시된 요소(한 학생이 느끼는 체감 학생 수)는 기저문제에서 직접적으로 제시된 것은 아니지만 주어진 맥락을 통해 파악해야 하는 것으로, 기저문제의 맥락을 반영하여 해석된 가중평균의 의미이다.

기저문제의 맥락에서는 한 교실에 배정된 학생의 수가 중요한 것이 아니라 교사가 관리하는 학생의 수, 즉 학생 개개인이 교사의 관심과 지도를 얼마나 받을 수 있는지가 중요하다. 따라서 이 때 제시된 ‘가중평균’은 ‘개별 학생이 느끼는 체감 학생 수’라는 의미를 담고 있다. 통계에서 각 핵심요소들의 관계구조는 맥락의 영향을 받게 되므로 기저문제에서 제시된 맥락을 앞으로 ‘통계적 맥락’이라 지칭한다. 유추에 의한 문제제기가 이루어지기 위해서는 기저문제의 기본구조를 파악하는 것 뿐만 아니라 기저문제의 통계적 맥락을 파악하는 것이 선행되어야 한다.

연구에 참여한 42명의 수학영재학급 학생들 중 문제를 만들지 않은 2명의 학생을 제외하고 40명의 학생이 기저문제와 유사한 문제를 만들어 제시하였다. 본 연구에서는 위 학생들이 만든 40개의 문제를 분석하였다. 분석결과, 학생들이 제시한 유사 문제는 <표 Ⅳ-1>과 같이 다섯 가지 유형으로 분류되었다. 이 때, 제시한 범주들은 기존의 틀을 사용한 것이 아니라 연구자들이 분석한 기저문제의 구조를 바탕으로 학생들의 반응에 대하여 귀납적 분석을 통해 도출한 결과들이다(Denzin & Lincoln, 1994; Goetz & LeCompte, 1984).



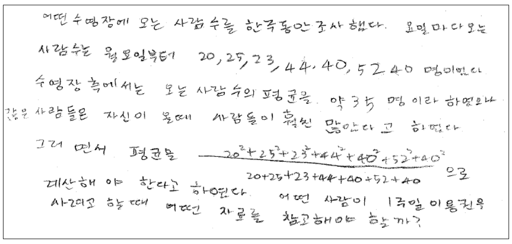
[그림 Ⅲ-2] 기저문제의 구조

<표 Ⅳ-1> 유추를 사용해 개발한 학생들의 문제 분석 결과

문제 유형	내용		학생 수 (퍼센트)
유형1	통계적 맥락 보존	기본구조 유지	21 (52.5%)
유형2		기본구조 변형	6 (15.0%)
유형3	통계적 맥락 훼손	기본구조 유지	1 (2.5%)
유형4		기본구조 확장	2 (5.0%)
유형5	통계적 맥락 및 기본구조 훼손		10 (25.0%)
총합			40 (100.0%)

Ⅳ. 연구결과

40명의 학생이 기저문제와 유사한 문제를 개발하였다. 학생들의 문제는 먼저, 기저문제의 통계적 맥락을 보존한 경우와 통계적 맥락을 훼손한 경우로 구분할 수 있었다. 통계적 맥락을 보존한 경우에는 기저문제의 기본구조를 유지한 경우(유형1)와 기본구조를 변형한 경우(유형2)로 구분할 수 있었는데, 각각 21명과 6명의 학생이 이 유형에 해당되는 문제를 개발하였다. 기저문제의 통계적 맥락을 훼손한 경우에는 기저문제의 기본구조를 유지한 경우(유형3)와 기본구조를 확장한 경우(유형4)로 구분할 수 있었는데, 각각 1명과 2명의 학생이 이 유형에 해당되는 문제를 고안하였다. 마지막으로 통계적 맥락과 기본구조 모두를 훼손한 경우가 있었는데, 10명의 학생이 이 유형에 속하는 문제를 제시하였다. 각 유형에 해당하는 학생 수 및 비율은 <표 Ⅳ-1>과 같다.



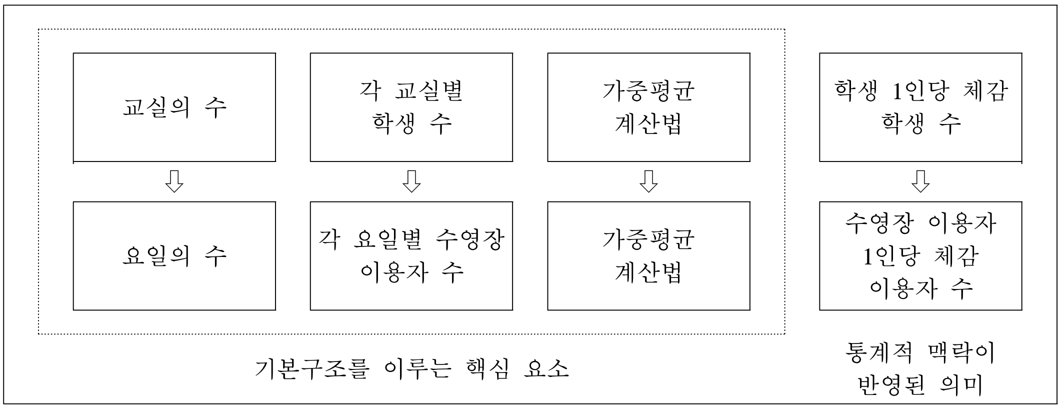
[그림 Ⅳ-3] 통계적 맥락 보존 및 기본구조 유지의 예

1. 유형1: 통계적 맥락 보존 및 기본구조 유지

유형1에 속하는 학생들은 기저문제의 통계적 맥락을 보존하면서 동시에 기저문제의 기본구조를 유지하는 동형문제를 유사 문제로 제시하였다. 총 21명(52.5%)의 학생들이 유형1에 속하는 문제를 개발하였다. [그림 Ⅳ-3]은 유형1에 해당하는 문제의 예를 보여준다.

[그림 Ⅳ-3]의 문제를 만든 학생은 기저문제의 방과후 학교 수업상황을 수영장을 이용하는 상황으로 변형하고 기저문제의 기본구조를 유지하여 새로운 문제를 만들었다. 즉, 기저문제의 기본구조와 동형인 문제를 유사 문제로 제시하였다. 그리고 기저문제에서 제시된 '가중평균'의 의미를 '학생 1인당 느끼는 체감 학생 수'로 파악하고 이와 유사한 의미를 갖는 문제 상황을 제시하였다. [그림 Ⅳ-3]에서 제시된 '가중평균'의 의미는 '수영장을 이용하는 사람 1인당 체감하는 이용자의 수'이다. "많은 사람들은 자신이 올 때 사람들이 훨씬 많았다고 하였다"라는 학생의 표현을 통해 이 학생이 기저문제에서 통계적 맥락을 적절하게 파악하고, 이를 유추하여 새로운 문제를 만들었음을 알 수 있다.

[그림 Ⅳ-4]는 이 학생이 제기한 문제를 분석함으로써 통계에서 발현될 수 있는 유추의 형태를 구조화한 것이다. 통계에서 다루어지는 자료는 맥락을 지닌 수이기 때문에 교실의 수, 각



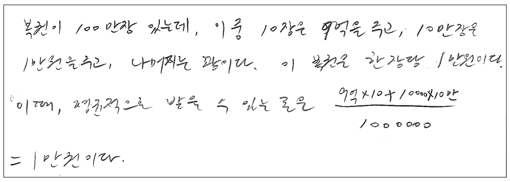
[그림 Ⅳ-4] [그림 Ⅳ-3] 문제의 구조화

교실의 학생 수, 수를 가공하는 알고리즘 등과 같은 자료와 연결되는 표면적인 요소뿐만 아니라 자료가 의미를 가질 수 있게 해주는 통계적 맥락이 하나의 관계구조에 포함되어야 한다. 이 때에서야 비로소 적절한 유추를 했다고 간주할 수 있다.

2. 유형2: 통계적 맥락 보존 및 기본구조 변형

유형2에 속하는 학생들은 기저문제의 통계적 맥락을 보존하면서 기본구조를 변형한 문제를 유사 문제로 제시하였다. 총 6명(15%)의 학생들이 유형2에 속하는 문제를 개발하였다. [그림 Ⅳ-5]는 유형2에 해당하는 예를 보여준다.

[그림 Ⅳ-5]의 문제를 만든 학생은 새로운 문제 상황을 복권의 당첨금과 당첨금별 복권의 수가 제시되었을 때 복권의 평균 당첨금을 계산하는 상황으로 변형하였다. 이는 기저문제의

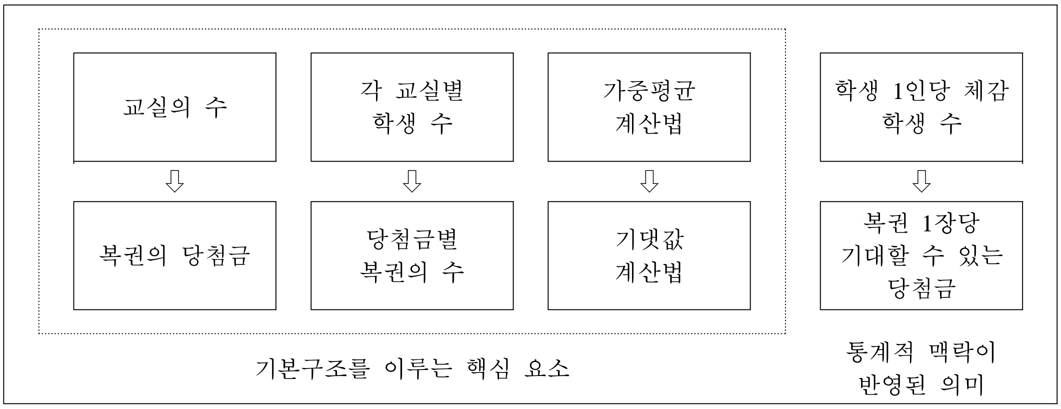

복권이 100만장 있는데, 이중 10장은 9억을 주고, 10만장은 1만원을 주고, 나머지는 꽝이다. 이 복권은 한장당 1만원이다. 이때, 평균적으로 받을 수 있는 돈은 $\frac{9억\times10+10000\times10만}{1000000}$ = 1만원이다.

[그림 Ⅳ-5] 통계적 맥락 보존 및 기본구조 변형의 예

기본구조를 변형하여 복권의 당첨금을 확률변수로, 각 당첨금에 대한 복권의 비율을 각 확률변수에 대한 확률값으로 설정하여 가중평균의 계산과정을 기댓값 계산과정으로 해석한 것이다. 가중평균을 구할 때 사용되는 가중치는 확률변수에 대응하는 확률과 같다. 즉, 확률변수의 기댓값은 그 확률변수가 취하는 값의 가중평균으로 볼 수 있다.[2] 이 학생은 이렇게 가중평균을 포함하는 기저문제의 기본구조를 기댓값을 포함하는 기본구조로 변형하여 제시한 것이다. 또한 이 학생이 만든 새로운 문제의 '기댓값'의 의미는 '복권 1장당 기대할 수 있는 당첨금'으로, 기저문제의 통계적 맥

---

2) 자료값 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$과 각 자료값의 가중치 $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$에 대하여 가중평균은 $\frac{w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}$으로 계산된다. 각 자료값을 확률변수로 보았을 때, 이 확률변수의 기댓값 E[X]= $x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$ $(p_1+p_2+\ldots+p_n=1)$ 이다. 이 때, p_n은 $\frac{w_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}$ 으로 볼 수 있다. 그러므로 가중평균은 기댓값(E[X])으로 해석될 수 있다.



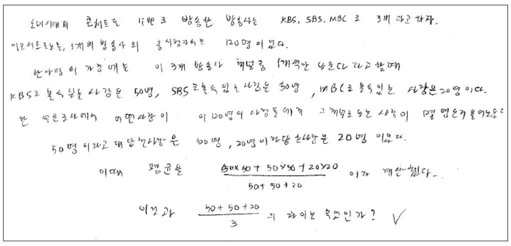
[그림 Ⅳ-6] [그림 Ⅳ-5] 문제의 구조화

락을 유지한 것으로 볼 수 있다. [그림 Ⅳ-6]은 [그림 Ⅳ-5]의 문제를 구조화하여 나타낸 것이다.

3. 유형3: 통계적 맥락 훼손 및 기본구조 유지

유형3에 속하는 학생들은 기저문제의 기본구조를 유지하였으나 통계적 맥락을 훼손한 문제를 유사 문제로 제시하였다. 1명(2.5%)의 학생이 유형3에 속하는 문제를 개발하였다. [그림 Ⅳ-7]은 유형3에 해당하는 문제의 예를 보여준다.

[그림 Ⅳ-7] 문제를 만든 학생은 기저문제에서 제시된 '교실의 수'와 '각 교실의 학생 수'를 '방송사의 수'와 '각 방송사 별 시청자의 수'로 대응시켜 기저문제와 기본구조가 동일한 동형문제를 유사 문제로 개발하였다. 이 학생이 제시한 문제 상황은 가정에서 텔레비전을 시청한 후 시청자 수에 대하여 설문조사를 하는 상황이다. 그러나 이 문제 상황에서 제시된 '평균'은 기저문제에서 제시된 '평균'이 갖는 '학생 1인당 체감 학생 수'라는 의미를 담고 있지 못하다. 즉, 기저문제의 통계적 맥락을 훼손시키고 있다. 가정에서 텔레비전을 보고 있는 시청자들은 자신과 같은 방송을 보고 있는 시



[그림 Ⅳ-7] 통계적 맥락 훼손 및 기본구조 유지의 예

청자의 수에 특별한 영향을 받지 않는다. 즉 같은 방송을 보고 있는 시청자의 수가 많던 적던 그것은 크게 의미가 없다. 따라서 제시된 평균의 의미는 '시청자 1인당 체감하는 시청자 수'라는 의미로 해석되지 않는다. 본 문제는 기저문제의 기본구조를 동일하게 유지한 동형문제이지만, 기저문제의 통계적 맥락을 유추하지 못해 이를 훼손시킨 문제의 예가 된다.

4. 유형4: 통계적 맥락 훼손 및 기본구조 확장

유형4에 속하는 학생들은 기저문제의 기본구조를 확장시켰으나 통계적 맥락을 훼손한 문제를 유사 문제로 제시하였다. 2명(5%)의 학생이 유형3에 속하는 문제를 개발하였다. [그림 Ⅳ-8]은 유형4에 해당하는 문제의 예를 보여준다.

여러개의 봉투 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 안에 구슬이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$개가 있다.
$x_1, x_2, \cdots, x_n$을 안다고 하자. 구슬개수의 산술평균은 $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ 이다. 또 $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ 이라는
값을 보자. 이것이 산술평균보다 좋은 점을 수학적으로 설명하여라.

"여러 개의 봉투 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 안에 구슬이 $x_1, x_2, \ldots, x_n$개가 있다. $x_1, x_2, \ldots, x_n$를 안다고 하자. 구슬 개수의 산술평균은 $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ 이다. 또 $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$ 이라는 값을 보자. 이것이 산술평균보다 좋은 점을 수학적으로 설명하여라."

[그림 Ⅳ-8] 통계적 맥락 훼손 및 기본구조 확장

[그림 Ⅳ-7]의 문제를 만든 학생은 기저문제의 '교실의 수'와 '각 교실의 학생 수'를 '봉투의 수'와 '봉투 안에 담긴 구슬의 수'로 대응시키고, 각 요소를 일반화한 문제를 유사 문제로 제시하였다. 이는 각 요소와 관련하여 제시된 수를 일반화하는 것을 통해 기저문제의 기본구조를 확장한 것으로 볼 수 있다. 그러나 이 학생이 만든 문제는 두 평균이 맥락 속에서 갖는 의미를 생략해 버림으로써 통계적 맥락을 제거하는 결과를 초래하였다. 통계적 맥락이 훼손됨으로써 '가중평균'의 의미를 해석하기 어렵게 만든 것이다. 제시된 문제에서 핵심이 되는 내용을 일반화하려는 경향은 수학영재 학생들이 보여주는 특징 중의 하나이다(이정연 · 이경화, 2010; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Sriraman, 2003). 수학에서 일반화는 특수한 것에서 어떠한 사실을 이끌어 내거나 유도하여 공통성질을 추출함으로써 타당한 영역을 확장하는 역할을 한다. 또한 이러한 일반화는 수학적 대상들의 성질과 대상 사이의 관계로부터 정신 구조를 형성하는 구성적인 과정인 추상화와도 관련이 된다(Dreyfus, 1991, p.35). 맥락을 제거하는 것으로부터 시작되는 수학에서의 일반화와 추상화(delMas, 2004)는 고등한 수학적 사고의 하나이지만, 맥락이 하나의 핵심요소로 작용하는 통계에서 맥락의 의미가 제거된 일반화는 그 힘을 발휘하지 못하게 된다. 이와 같은 예는 통계에서의 수가 맥락 의존적임을 간과하였음을 보여주는 것으로, 수학문제에서 구조를 파악하는데 뛰어난 수학영재 학생들도 통계에서 맥락이 각 요소에 미치는 영향 및 이에 따라 요소들의 의미가 달라지고 있다는 것을 간과할 수 있음을 보여준다.

5. 유형5: 통계적 맥락 및 기본구조 훼손

40명의 학생 중 10명의 학생은 기저문제의 통계적 맥락뿐만 아니라 기본구조를 훼손시킨 문제를 유사 문제로 제시하였다. 이 유형의 예는 주로 문제가 성립해야 하는 기본 요건인 주어진 것, 구해야 하는 것 등과 같은 기본적인 조건을 만족시키지 못한 문제를 제시하였다. [그림 Ⅳ-9]는 유형5에 해당하는 문제의 예를 보여준다. 이 학생의 경우 기저문제를 구성하는 기본적인 요소가 무엇인지를 파악에도 어려움이 있었던 것으로 판단된다.

문제 1: 어떤 영화관에 관람실이 5개 있다. 영화관에 오늘 관람인에게 평균적으로 1000명이 왔다고 하였다. 하지만 학생 A가 영화관에 간 결과 관객이 1000명보다 않아보였고, 수십명의 친구들에게 물어본 결과도 같았다 따라서 A는 영화관에 평균인원을 1000명보다 많게 하라고 항의를 하였다.

[그림 Ⅳ-9] 통계적 맥락 및 기본구조 훼손의 예

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서는 수학영재학급 학생들에게 실생활 맥락이 담긴 통계문제를 기저문제로 제시하고 이와 유사한 문제를 만들도록 하였다. 학생들이 만든 문제를 기저문제의 통계적 맥락의 보존 여부 및 기저문제의 기본구조 유지 여부에 따라 다섯 가지 유형으로 분류하였다. 기저문제의 통계적 맥락을 보존하는 능력은 통계적 개념 이해가 단지 알고리즘 또는 고립된 개념이나 절차가 아니라 맥락과의 관련에 기초한 이해를 필요로 한다. 기저문제의 기본구조를 유지하기 위해서는 관련 개념에 대하여 피상적으로가 아니라 심층적으로 파악해야 한다. 이 두 가지는 유추에 의한 문제제기에 의하여 학생들의 통계적 개념 이해 수준을 파악하게 하는 근거가 된다고 볼 수 있다.

유형1과 유형2에 속하는 학생들의 경우 제시된 문제 상황에서 산술평균이 무엇을 의미하는지, 가중평균이 무엇을 의미하는지, 그리고 두 평균이 갖는 의미의 차이가 무엇인지 올바르게 이해하고 있는 것으로 판단된다. 그래서 유사한 문제를 제시하도록 요구하는 본 연구에서, 산술평균과 가중평균 모두를 사용할 수 있지만 가중평균의 적용이 더 적절한 문제 상황을 올바르게 제시할 수 있었다.

유형3과 유형4에 속하는 학생들의 경우 산술평균의 알고리즘과 가중평균의 알고리즘의 구성 및 계산에 대해서는 알고 있지만, 그 알고리즘을 적용시켜 얻은 결과가 무엇을 의미하는지에 대해서는 올바로 이해하지 못한 것으로 판단된다. 즉 산술평균에 의해 얻어진 학급당 학생 수와 가중평균에 의해 얻어진 학급당 학생수가 갖는 의미의 차이를 이해하지 못한 것으로 판단된다. 이는 통계교육에서 평균을 지도할 때 알고리즘의 원리뿐만 아니라 그것이 맥락과 결합될 때 어떠한 의미를 갖는지에 대해서도 강조하여 지도될 필요가 있음을 시사한다.

유형5에 속하는 학생들은 기저문제의 통계적 맥락뿐만 아니라 기본구조를 훼손시킨 문제를 유사 문제로 제시하였다. 40명의 수학영재학생 중 10명의 학생이 유형5에 속하였다. 이 유형에 해당하는 학생들은 주로 문제가 성립해야 하는 기본 요건인 주어진 것, 구해야 하는 것 등이 충분히 제시되지 않은 문제를 제시하였다. 이러한 결과를 통해 수학영재학급 학생들에게 유추에 의한 문제제기 활동이 익숙하지 않은 낯선 활동이었음을 추측할 수 있다. 또한 수학문제에서 제시된 맥락을 다루는 것과 통계문제에서 제시된 맥락을 다루는 것이 서로 다르다는 것으로부터 기인하였다고 추측할 수 있다. 수학에서는 맥락을 점차적으로 제거해 나가면서 요소와 요소들 사이의 관계에 주목하지만, 통계에서는 요소와 요소들 사이의 관계를 파악할 수 있어야한다. 또한 이들이 맥락과 어떠한 관련성을 맺고 있는지 파악할 수 있어야 한다. 이렇게 맥락을 고려하면서 요소와 요소들 사이의 관계를 파악하고 이를 만족하는 것을 새롭게 제시하는 활동이 수학영재학급 학생들에게도 쉽지 않은 과제였을 것으로 추측된다. 유형5에 속하는 학생들의 사고를 해석하기 위해서는 좀 더 심층적인 연구가 필요한 것으로 판단된다.

각 유형의 학생들이 제시한 문제들의 비교를 통하여 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 통계 단원을 지도할 때, 통계적 맥락에 대한 이해, 맥락에 비춘 재해석을 중시해야 한다. 통계문제가 통계적으로 의미를 갖기 위해서는 사용되는 알고리즘이나 개념이 맥락에 부합되어야 한다. 본 연구의 분석대상인 40명의 학생 중 13명(32.5%)의 학생들은 통계적 맥락이 훼손된 문제(유형3, 유형4, 유형5)를 유사 문제로 제시하였다. 이는 연구자들이 예상했던 것보다 높은 수치

로, 학생들이 통계에서 유사한 문제를 제기할 때 통계적 맥락도 함께 유추해야 함을 인식하지 못하였거나 간과하였기 때문인 것으로 생각된다. 특히 기저문제의 기본구조를 유지하거나 확장하는 문제를 제기한 학생들(유형3과 유형4)은 기저문제와 새로 만든 문제를 구성하는 요소간의 표면 유사성에만 주목하고 요소간의 관계를 규정짓는 맥락의 역할에 주목하지 못한 것으로 보인다. 유사성의 종류를 표면 유사성과 구조적 유사성으로 구분한 Gentner(1983)는 기저문제와 새로운 문제가 공유하는 해법원리나 주요 구성요소 간의 인과적인 관계를 파악하는 경우를 구조적 유사성을 인식한 경우로 보고 있다(박현정 · 이종희, 2006, p.117에서 재인용). 통계영역에서 구성요소간의 관계는 맥락의 의미를 파악하는 것으로부터 규정된다는 것임을 인식하고 통계에서의 유추에서 맥락이 중요한 역할을 함을 강조할 필요가 있다.

둘째, 유추에 의한 문제제기 활동은 통계개념에 대한 학생들의 재개념화 및 이해정도를 확인해 볼 수 있는 기회를 제공하였다. 수학영재학급 학생들은 유형2와 같이 가중평균을 기댓값이라는 통계개념과 연결 지을 수 있었다. 이는 유추에 의한 문제제기가 학생들의 개념 간의 연결을 이끌고 학생들의 재개념화 정도를 드러내주는 기회를 제공했음을 보여주는 것이다. 또한 학생들의 산술평균과 가중평균의 의미에 대한 이해 정도를 보여주었다. 제시된 기저문제는 이미 수업 중 함께 해결하고 논의하면서 다루었던 문제로, 문제에서 제시된 두 가지 평균의 의미와 적절성 판단 여부에 대해 논의한 문제였다. 그럼에도 불구하고 일부 학생들의 경우 이 개념들이 내면화되지 않았음을 학생들이 개발한 문제를 분석한 결과를 통해 알 수 있었다. 이는 유추에 의한 문제제기 활동이 기존에 학습한 개념의 이해 정도 및 개념의 재개념화 정도를 파악할 수 있는 기회를 제공할 수 있음을 시사한다.

본 연구는 학생들이 글로 제시한 내용을 분석하여 통계에서 유추적 사고가 어떠한 형태로 나타날 수 있는지, 개념 이해와 어떠한 관련을 맺는지 살펴보았다. 그러나 제한된 정보만으로 결론을 일반화하는 데에는 한계가 있다. 각 유형마다 해당되는 학생들의 사고 과정에 대한 좀 더 세밀한 정보를 얻고, 이를 통계교육에 활용하기 위해서는 과제 기반 면담(task-based interview)이나 소리 내어 말하기(thinking aloud) 등과 같은 다양한 방법을 이용하여 후속연구를 진행할 필요가 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

고은성 · 이경화 · 송상헌(2008). 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할. **학교수학, 18**(1), 63-78.

김민정 · 이경화 · 송상헌(2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **학교수학, 10**(1), 23-42.

김지원 · 송상헌(2004). 한 수학영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례 연구. **수학교육학연구, 14**(1), 89-110.

나귀수 · 이경화 · 한대희 · 송상헌(2007). 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법. **학교수학, 9**(3), 397-408.

박현정 · 이종희(2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 115-138.

신보미(2011). 수학 영재들의 확률 문제 해결 과정 분석: 유추적 사고를 중심으로. **영재교육연구, 21**(1), 231-249.

양기열 · 이의진(2011). 수학영재학생들의 유추를 통한 이차곡면의 탐구활동 분석. **영재교육연구, 21**(2), 269-286.

이경화(2009a). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구, 19**(3), 355-369.

이경화(2009b). 영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결. **수학교육학연구, 19**(1), 45-61.

이승우(2001). **학교 수학에서의 유추와 은유**. 서울대학교 석사학위논문.

이정연 · 이경화(2010). Simpson의 패러독스를 활용한 영재교육에서 창의성 발현 사례 분석. **수학교육학연구, 20**(3), 203-219.

최남광 · 유희찬(2009). 영재교육에서 유추를 통한 데카르트 정리의 도입가능성 고찰. **수학교육학연구, 19**(4), 479-491.

Bull, K. S., Montgomery, D., & Kimball, S. L. (1999). Stimulating creativity. In *Online teaching: An instructional hypertext*. Stillwater, OK: Oklahoma State University. Retrieved June 5, 2000, from http://home.okstate.eduqhomepages.nsf/toc/EPSY5213_Reading_11b.

Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.

delMas, R. C. (2004). Mathematical and statistical reasoning. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp.79-95). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (1997). Children's reasoning processes in classifying and solving computational word problems. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp.191-220). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D. (2004). *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp.47-78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy, *Cognitive Science*, 7, 155-170.

Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and Analogical Reasoning* (pp. 199-241). Cambridge, N.Y.: Cambridge University Press.

Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. Orlando, FL: Academic Press.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Reacher*, 28(6), 14-17.

Hashimotto, Y. (1987). Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. In Becker, J. P. & Miwa, T. (Eds), *Proceedings of the U. S.-Japan Seminar on Mathematical Problem Solving* (pp.94-119).

Carbon dale, IL: Southern Illinois University.
Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp.123-147). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
Klavir, R., & Gorodetsky, M. (2009). On excellence and creativity: a study of gifted and expert students. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp.221-242). Sense Publishers.
Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.
Lee, K., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 123-140.
Marnich, M. A. (2008). *A Knowledge Structure for the Arithmetic Mean: Relationships between Statistical Conceptualizations and Mathematical Concepts*. Unpublished Doctoral dissertation, University of Pittsburgh.
Martin, M. A. (2003). "It's like... you know": The use of analogies and heuristics in teaching introductory statistical methods. *Journal of Statistics Education*, 11(2). http://www.amstat.org/publications/jse/v11n2/martin.html
Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In L.A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp.95-137). Washington, DC: National Academy Press.
Moore, D. S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 1253-1259.
Moore, D. S. & Cobb, G. W. (2000). Statistics and mathematics: Tension and cooperation. *The American Mathematical Monthly*, 107(7), 615-630.
Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
Rossman, A., Chance, B., & Medina, E. (2006). Some important comparisons between statistics and mathematics, and why teachers should care. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance: Sixty-eighth Yearbook* (pp.323-333). Reston, VA: NCTM.
Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician*, 44(2), 116-121.
Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations: The problem-solving experiences of four gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151-165.
Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp.518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australia.
Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.104.376&rep=rep1&type=pdf

Understanding of Statistical concepts Examined through Problem Posing by Analogy

Park, Mimi (Graduate School of Seoul National University)
Lee, Dong-Hwan (Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity)
Lee, Kyeong-Hwa (Seoul National University)
Ko, Eun-Sung (Graduate School of Seoul National University)

Analogy, a plausible reasoning on the basis of similarity, is one of the thinking strategy for concept formation, problem solving, and new discovery in many disciplines. Statistics educators argue that analogy can be used as an useful thinking strategy in statistics as well. This study investigated the characteristics of students' analogical thinking in statistics. The mathematically gifted were asked to construct similar problems to a base problem which is a statistical problem having a statistical context. From the analysis of the problems, students' new problems were classified into five types on the basis of the preservation of the statistical context and that of the basic structure of the base problem. From the result, researchers provide some implications. In statistics, the problems, which failed to preserve the statistical context of base problem, have no meaning in statistics. However, the problems which preserved the statistical context can give possibilities for reconceptualization of the statistical concept even though the basic structure of the problem were changed.

* Key Words : analogy(유추), problem posing(문제제기), statistics(통계), arithmetic mean(산술평균), weighted mean(가중평균)

논문접수 : 2012. 1. 6
논문수정 : 2012. 2. 9
심사완료 : 2012. 2. 20