

파랑 에너지 감쇠가 있는 경우의 선형천수방정식 Linear Shallow Water Equations for Waves with Damping

정태화* · 이창훈**

Tae-Hwa Jung* and Changhoon Lee**

요 지: 선형의 천수방정식을 이용하여 에너지 감쇠가 있는 경우의 파랑특성을 분석하였다. 기하광학기법을 이용하여 위상속도 및 에너지속도를 이론적으로 유도하였으며 수치모형을 통하여 검증하였다. 에너지감쇠가 있는 경우 파고, 위상속도, 에너지속도 모두 변하면서 파랑변형에 영향을 끼쳤다. Euler의 접근법에 의하여 복소수 형태의 파수를 사용할 경우 에너지 감쇠가 클수록 위상속도는 감소하는 반면에 에너지속도는 위상속도보다 큰 값을 가지면서 꾸준히 증가하는 결과가 나왔다. Lagrange의 접근법에 의하여 복소수 형태의 각주파수를 사용할 경우 에너지 감쇠가 발생하는 파군이 에너지속도로 전파하는 사실을 확인할 수 있었다. 또한 파랑의 천수와 굴절이 발생하는 경우 두 경우 다 에너지속도의 영향을 받는 것을 이론으로 발견하였고, 경사면 위로 파랑이 전파하는 경우 이 사실을 수치실험으로 확인하였다.

핵심용어: 에너지감쇠, 선형의 천수방정식, 위상속도, 에너지속도, 천수, 굴절

Abstract: Wave characteristics in the presence of energy damping are investigated using the linear shallow water equations. To get the phase and energy velocities, geometric optics approach is used and then these values are validated through numerical experiments. Energy damping affects wave height, phase and energy velocities which result in wave transformation. When the complex wavenumber is used by the Eulerian approach, it is found that the phase velocity decreases as the damping increases while the energy velocity increases showing higher values than the phase velocity. When the complex angular frequency is used by the Lagrangian approach, the energy-damping wave group is found to propagate in the energy velocity. The energy velocity is found to affect shoaling and refraction coefficient which is verified through numerical experiments for waves on a plane slope.

Keywords: Energy damping, Linear shallow water equations, Phase velocity, Energy Velocity, Shoaling, Refraction

1. 서 론

심해에서 발생한 파랑은 천해로 진행하면서 다양한 요인들에 의하여 에너지 감쇠가 발생한다. 진흙 층 위를 지나는 경우 바닥 마찰이나 점성에 의하여 에너지 감쇠가 발생한다(Dalrymple and Liu, 1978; Winterwerp et al., 2007; Oveysy et al., 2009). 자갈이나 모래 등의 투수층을 지나는 경우 마찰, 난류의 관성저항과 부정류로 인한 관성저항으로 에너지 감쇠가 발생한다(Sollitt and Cross, 1972; Liu and Dalrymple, 1984; 이 등, 2007). 에너지 감쇠가 있는 해역에서 파고 뿐만 아니라 위상속도 및 에너지속도의 변화가 있는데 대부분의 연구가 파고의 감소에만 관심을 두었다. 그러나, 위상속도 및 에너지속도는 천수, 굴절 및 회절 현상 등에 영향을 주기 때문에 이러한 변화를 정확히 모의할 필요가 있다. 본 연구에서는 선형의 천수방정식을 이용하여 에너지 감쇠가 있는 경우, 파고감

쇠계수, 위상속도, 에너지속도 사이의 관계를 이론적으로 유도하고 수치실험을 통하여 검증하였다. 에너지 감쇠를 모의하는 방법은 크게 Euler 접근법에 기반을 둔 복소수 파수를 사용하는 방법과 Lagrangian 접근법에 기반을 둔 복소수 형태의 각주파수를 사용하는 방법이 있다. 해양 파동의 에너지 감쇠와 관련해서 대부분의 연구들은 복소수 형태의 파수를 사용하여 파의 감쇠를 고려하였으나 비동질의 방정식을 푸는 경우에는 각주파수를 복소수로 사용하는 경우도 있다 (Dixon et al., 1998; Venutelli, 2010). 본 연구에서는 두 가지 접근법을 모두 사용하여 에너지 감쇠를 모의하였으며 복소수 파수와 복소수 각주파수 사이의 상관성도 규명하였다. 일반적으로 천해에서 위상속도와 에너지속도가 동일하다고 알려져 있지만 에너지 감쇠가 있는 경우에는 특이하게도 에너지속도가 위상속도보다 항상 큰 결과가 나왔다.

*한밭대학교 토목환경도시공학부 토목공학전공 (Corresponding author: Tae-Hwa Jung, Division of Civil, Environment and Urban Engineering, Hanbat National University, San 16-1 Duckmyoung-dong, Daejeon, 305-719, Korea. thjung@hanbat.ac.kr)

**세종대학교 건설환경공학과 (Department of Civil and Environmental Engineering, Sejong University, 98 Gunja-dong, Gwangjin-gu, Seoul, 143-747, Korea. cleec@sejong.ac.kr)

2. 식의 유도

에너지 감쇠가 있는 경우의 선형 천수 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + g\nabla\eta + D\mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

여기서, η 는 수면변위, g 는 중력 가속도, $\mathbf{V}=(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 는 수평 미분연산자, $\mathbf{V}=(u, v)$ 는 수평 유속 벡터를 의미하며 D 는 에너지 감쇠계수를 나타낸다. 식 (1)을 시간 미분한 후에 식 (2)를 대입하여 정리하면 다음과 같은 식이 나오며

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\nabla \cdot (h\nabla\eta) - \nabla \cdot (Dh\mathbf{V}) = 0 \quad (3)$$

$\nabla D \approx 0$ 을 가정하면 최종적으로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\nabla \cdot (h\nabla\eta) + D\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

2.1 Euler 기법

파랑의 전파를 Euler 기법으로 표현할 경우 파수 벡터는 $\mathbf{k}=(\mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i)$ 와 같이 복소수로 표현되고, 각주파수는 ω 와 같이 실수로 표현된다. 따라서, 자유수면변위를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta = a_0 e^{-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = a e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (5)$$

이 식을 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$-\omega^2 a - g[\nabla \cdot (h\nabla a) + 2i\mathbf{k}_i h \cdot \nabla a + i\{\nabla \cdot (\mathbf{k}_r h)\}a - |\mathbf{k}_r|^2 ha] - i\omega Da = 0 \quad (6)$$

$a = a_0 e^{-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}}$ 의 관계식을 이용하여 식 (6)의 실수부를 정리하면 다음과 같이 되며

$$-\frac{\omega^2}{gh} - \frac{\nabla^2 a_0}{a_0} + \frac{2\mathbf{k}_i \cdot \nabla a_0}{a_0} - |\mathbf{k}_i|^2 + |\mathbf{k}_r|^2 = 0 \quad (7)$$

여기서 회절 효과를 무시하면, 최종적으로 다음과 같은 위상속도를 구할 수 있다.

$$|C|^2 = \frac{\omega^2}{|\mathbf{k}_r|^2} = gh \left(1 - \frac{|\mathbf{k}_i|^2}{|\mathbf{k}_r|^2} \right) \quad (8)$$

또한, 식 (6)의 허수 부분을 정리하면 아래의 식을 얻을 수 있으며

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{k}_r \frac{gh}{\omega} a_0^2 \right) + \left(-2\frac{gh}{\omega} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i + D \right) = 0 \quad (9)$$

이 식으로부터 에너지속도와 에너지 감쇠계수 D 를 결정할 수 있다.

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{k}_r \frac{gh}{\omega} = \frac{\mathbf{C}}{\begin{bmatrix} 1 - \frac{|\mathbf{k}_i|^2}{|\mathbf{k}_r|^2} \end{bmatrix}} \quad (10)$$

$$D = 2\frac{gh}{\omega} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{C}_e \quad (11)$$

또한, 식 (8)과 (11)을 이용하여 복소수 형태의 파수의 실수값과 허수값을 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$|\mathbf{k}_i| = \frac{\omega}{\sqrt{2gh}} \sqrt{1 + \left(\frac{D}{\omega}\right)^2 + 1} \quad (12)$$

$$|\mathbf{k}_r| = \frac{D}{\sqrt{2gh}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{D}{\omega}\right)^2}}} \quad (13)$$

Fig. 1은 에너지 감쇠계수의 값에 변화를 주면서 파수, 위상속도 및 에너지 속도의 변화를 도시한 결과이다. 식에서 아래첨자 0은 에너지 감쇠가 없는 경우의 값을 의미한다. 에너지 감쇠가 발생함에 따라 복소수 파수의 실수값 k_r 은 에너지 감쇠가 없는 경우(k_0)에서 출발하여 꾸준히 증가하였으며, 복소수 파수의 허수값 k_i 는 0에서부터 꾸준히 증가하였다. 에너지 감쇠가 작은 경우에는 $k_r > k_i$ 의 관계가 명확하게 나타났으나 감쇠가 크게 발생하면 두 값이 하나의 값으로 수렴하면서 증가하는 것을 볼 수 있다. 식 (12) 및 (13)을 통해서도 같은 결론을 내릴 수 있다. k_r 과 k_i 의 비를 계산하면 다음과 같이 되며 $D/\omega \rightarrow \infty$ 의 경우 1로 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

$$\frac{k_i}{k_r} = \frac{\frac{D}{\omega}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{D}{\omega}\right)^2}} < 1 \quad \text{and} \quad \lim_{D/\omega \rightarrow \infty} \frac{k_i}{k_r} = 1 \quad (14)$$

위상속도는 에너지 감쇠가 발생함에 따라 에너지 감쇠가 없는 경우의 위상속도 ($C_0 = \sqrt{gh}$)보다 작아지면서 감소하였다. 에너지 감쇠가 없는 경우의 에너지 속도는 위상 속도와 동일하지만 에너지 감쇠가 발생하는 경우에는 특이하게도 에너지 속도가 위상 속도보다 큰 값을 보이면서 꾸준히 증가하는 것을 볼 수 있다. 에너지속도의 증가비율이 위상속도의 감소비율보다 크기 때문에 에너지 감쇠가 있는 경우의 에너지속도는 에너지 감쇠가 없는 경우의 위상속도보다도 항상 크게 발생하였다. 이 역시 식 (8) 및 (10)을 통해서 이론적으로 확인이 가능하다. 식 (10)의 에너지속도를 C_e 로 표현하면 다음과 같이 된다.

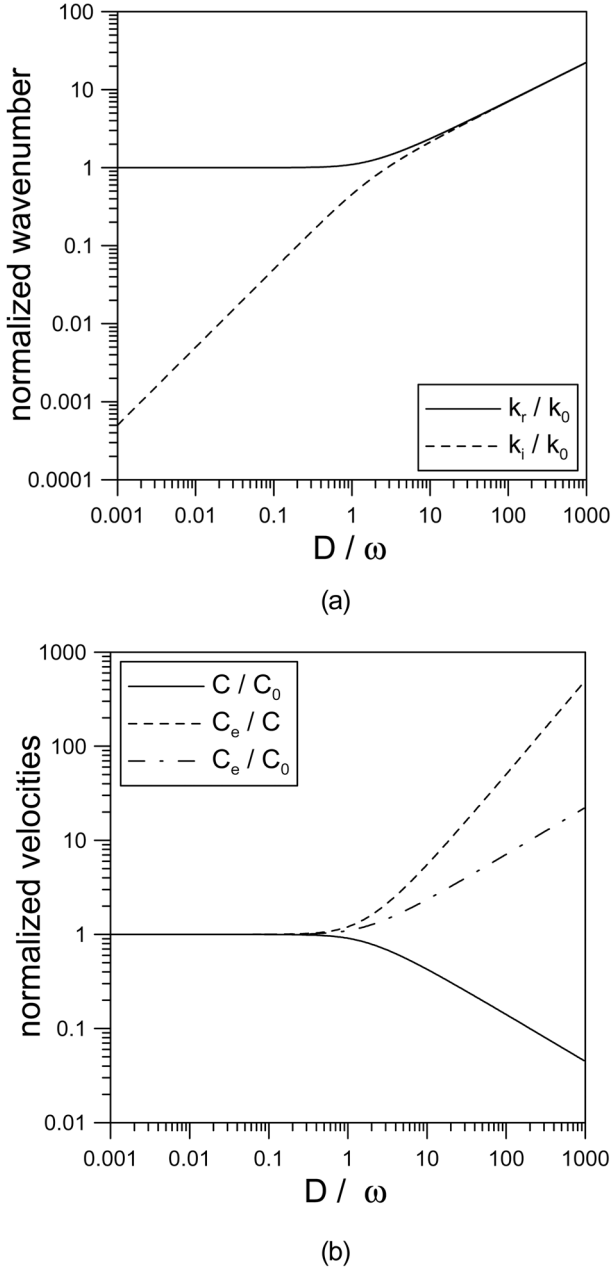


Fig. 1. Comparison of complex wavenumber, phase and group velocities for different energy damping coefficients ($kh=0.5\pi$, $h=4.0$ m): (a) real and imaginary wavenumbers (b) phase and energy velocities.

$$C_e = k_r \frac{gh}{\omega} = \frac{C_0}{\left[1 - \frac{|k_i|^2}{|k_r|^2}\right]^{1/2}} \quad (15)$$

$|k_i|/|k_r| < 1$ 이므로 C_e 는 C_0 보다 항상 크게 된다.

2.2 Lagrange 기법

파랑의 전파를 Lagrange 기법으로 표현할 경우 각주파수는 $\omega = (\omega_r - i\omega_i)$ 와 같이 복소수로 표현되고, 파수 벡터는 \mathbf{k} 와 같이 실수로 표현된다. 따라서, 자유수면변위를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta = a_0 e^{-\omega_i t} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_r t)} = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_r t)} \quad (16)$$

2.1장에서 사용한 방법과 동일하게 식 (16)을 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있으며

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2i\omega_r \frac{\partial a}{\partial t} - \omega_r^2 a - g[\nabla \cdot (h\nabla a) + i(\nabla \cdot \mathbf{k}h)a \\ + 2ih\mathbf{k} \cdot \nabla a - |\mathbf{k}|^2 ah] + D\left(\frac{\partial a}{\partial t} - i\omega_i a\right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

실수부와 허수부로부터 각각 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$\omega_r^2 = gh|\mathbf{k}|^2 + \omega_i^2 \left(1 - \frac{D}{\omega_i}\right) \quad (18)$$

$$\omega_i = \frac{D}{2} \quad (19)$$

$$|C|^2 = \frac{\omega_r^2}{|\mathbf{k}|^2} = gh - \frac{D^2}{4|\mathbf{k}|^2} \quad (20)$$

$$C_e = \mathbf{k} \frac{gh}{\omega_r} \quad (21)$$

에너지 감쇠 영역에서 진행되는 파의 특성은 각 주파수(ω), 파수(k), 수심(h) 및 에너지 감쇠계수에 의해 결정되며, 이 중에서 세 가지 값을 알면 나머지 하나는 분산관계식을 통하여 구할 수 있다. 파수를 복소수로 가정하였을 경우에는 실수의 각 주파수, 수심 및 에너지 감쇠계수를 이용하여 파수를 구할 수 있으며, 각 주파수를 복소수로 가정하면 실수의 파수, 수심 및 에너지 감쇠계수를 이용하여 각 주파수를 구할 수 있다. 이 경우, 파의 주기적인 운동과 관련된 실수값(ω_r)은 파수, 수심 및 에너지 감쇠 모두의 영향을 받으면서 에너지 감쇠계수가 증가하면 ω_r 값은 감소하였다. 파고의 감쇠와 관련된 허수값(ω_i)은 오직 에너지 감쇠계수에 의해서만 영향을 받으며 감쇠계수가 증가함에 따라 허수값도 증가하였다. 2.1장의 결과와 비슷하게 에너지 감쇠가 증가함에 따라 위상속도는 감소하였으며 에너지 전송속도는 증가하였다. 앞서 구술한 바와 같이, 복소수 형태의 각 주파수는 주어진 파수, 수심 및 에너지 감쇠계수에 의해 결정되기 때문에 2.2장에서의 계산조건과 2.1장에서의 계산조건은 수심 및 에너지 감쇠계수만 동일하게 설정할 수 있을 뿐 다른 값들은 동일하게 설정할 수 없다.

식 (16)의 $a = a_0 e^{-\omega_i t}$ 에서 보듯이, 각 주파수를 복소수로 표현하였을 경우에는 파고값이 시간에 따라 감소하게 된다. 이는 Lagrangian 관점에서 파의 진행을 해석한 것으로, 파와 같이 진행하면서 파고값을 계산한 것이다. 에너지 감쇠의 경우 ω_i 가 D 에 의해서만 영향을 받기 때문에 2.1장에서의 결과와 비교할 수 있으며 이를 위해 식 (5)를 다음과 같이 변환할 필요가 있다.

$$a_0 e^{-kx} = a_0 e^{-k_i V t} \quad (22)$$

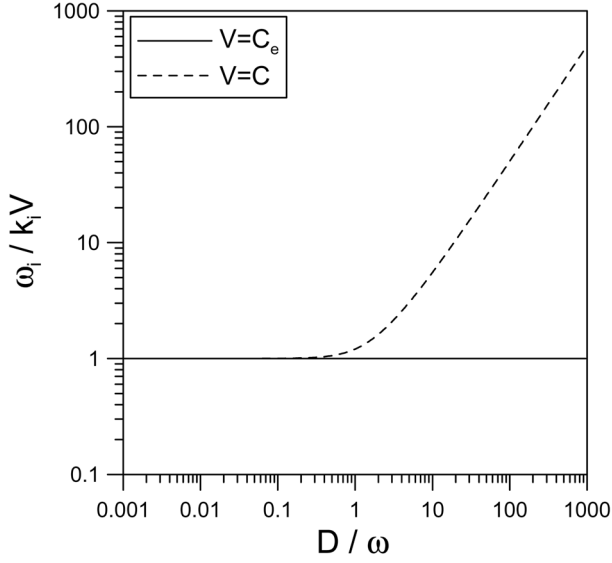


Fig. 2. Comparison of $\omega_i/(k_i V)$ for different energy damping coefficients ($kh=0.05\pi$, $h=4.0$ m).

식 (16)과 비교하면 $\omega_i = k_i V$ 의 관계식이 성립함을 알 수 있다. 여기서 V 는 파의 움직임과 관련된 속도로서 Lagrange 접근법으로 에너지감쇠가 발생하는 파랑의 파봉선을 따라 추적하였다면 V 가 위상속도가 될 것이고, 파군을 따라 갔다면 에너지속도가 될 것이다. 이를 명확하게 하기 위해 두 가지 경우에 대하여 모두 계산을 수행하였다. Fig. 2는 $kh=0.05\pi$ 및 $h=4.0$ m인 조건에서 에너지 감쇠계수의 값에 변화를 주면서 $\omega_i/(k_i V)$ 의 값을 비교한 것이다. Fig. 2에서 보듯이 V 값으로 에너지속도를 사용하였을 경우에 $\omega_i = k_i V$ 의 관계식이 성립하는 것을 알 수 있으며 최종적으로 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\omega_i = k_i C_e \quad (23)$$

따라서, Lagrange의 접근법에 의하여 복소수 형태의 각주파수를 사용할 경우 에너지 감쇠가 발생하는 파군이 에너지속도로 전파하는 사실을 알 수 있었다.

3. 수치 실험

3.1 수치 모형

수치해를 이용하여 2장에서 유도한 식을 검증하였다. 수치해는 교호격자(Staggered grid)를 사용하는 유한차분법을 식 (1)과 (2)에 적용하여 구하였다. 수치모형의 차분식은 다음과 같다.

$$\eta_i^{t+\Delta t} = \eta_i^t - [(hU)_{i+1}^t - (hU)_i^t] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (24)$$

$$\eta_i^{t+\Delta t} = [1 - (w_i + D_i)] U_i^t - g[\eta_i^t - \eta_{i-1}^t] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (25)$$

에너지 감쇠가 있는 경우의 내부조파는 아직 명확하게 규명되지 않았기 때문에 다음과 같이 외부조파 기법을 사용하였으며,

$$\eta_i^t = a_0 e^{i\omega n \Delta t} \tanh(0.5fn \Delta t) \quad (26)$$

하류단에는 식 (27)로 표현되는 스폰지 경계층을 두어 파의 반사를 최소화하였다.

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{outside sponge layer} \\ \omega \frac{e^{d/s} - 1}{e - 1}, & \text{inside sponge layer} \end{cases} \quad (27)$$

3.2 파고 감쇠, 위상속도 및 에너지속도

일정수심상에서 x 방향으로 진행하는 파의 높이는 에너지 감쇠가 있는 경우 다음과 같이 해석적으로 구할 수 있다.

$$a = a_0 e^{-k_x x} \quad (28)$$

Fig. 3은 $kh=0.05\pi$, $h=4.0$ m, $D=1.0\omega$ 인 경우에 수치해와 엄밀해를 비교한 것이다. x 축은 에너지 감쇠가 없는 경우의 파장인 L_0 으로 무차원화하여 에너지 감쇠영역에서의 파장변화를 관측할 수 있도록 하였다. 이 경우 파장값은 1.45 m 정도가 되면서 에너지 감쇠가 없는 경우(160 m)에 비하여 약 10%정도 감소하며 위상 속도는 6.26 m/sec에서 5.70 m/sec로 약 9%정도 감소한다. 또한 에너지 전송 속도는 6.88 m/sec가 되어 파 속도의 1.2배 정도가 된다. D 의 크기가 ω 와 비슷한 경우 파고 감소가 심하게 발생하여 초반 한 두 파장을 지나

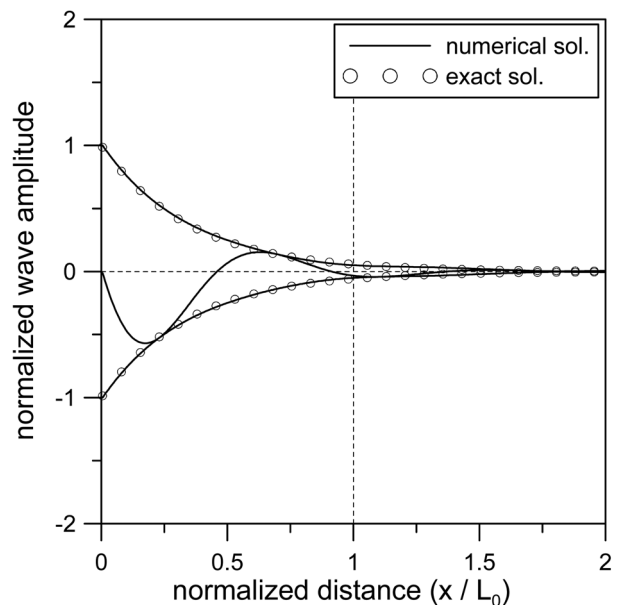


Fig. 3. Comparison of present numerical and analytical solution for $kh=0.05\pi$, $h=4.0$ m, $D=1.0\omega$.

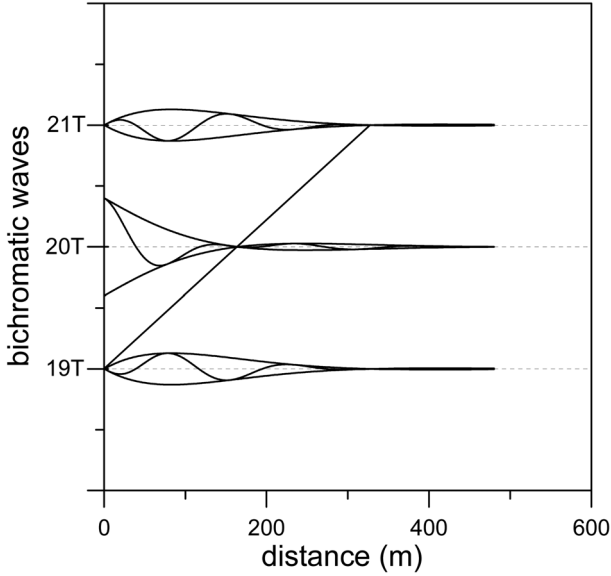


Fig. 4. Propagation of bichromatic waves $\bar{k}h=0.05\pi$, $h=4.0$ m, $D=0.5\bar{\omega}$, $w_1=0.75\bar{\omega}$, $w_2=1.25\bar{\omega}$.

면서 파고값이 거의 0이 도달하였다. 수치해와 엄밀해 모두 동일한 결과를 보이면서 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

다음으로 이성분파를 이용하여 에너지속도를 계산해 보았다. 이 경우 D 의 값을 크게 주면 파고값이 일찍 감소하기 때문에 $D=0.5\bar{\omega}$ 값을 사용하였으며 다른 조건들은 Fig. 3과 동일하다. 이성분파의 각주파수 성분은 $\omega_1=0.75\bar{\omega}$ 과 $\omega_2=1.25\bar{\omega}$ 를 사용하였다. 2주기 동안의 이동거리를 측정한 결과 164.48 m가 나왔으며 이는 식 (10)으로 계산한 164.65 m와 매우 유사함을 확인할 수 있다.

3.3 천수 및 굴절 모의

다음으로 위상속도 및 에너지속도와 관련이 있는 천수 및 굴절 모의를 수행해 보았다.

Fig. 4와 같이 x 방향으로만 수심변화가 있는 경우 나란히 진행되는 두 파 사이의 에너지 보존관계를 사용하면 다음과 같은 에너지 전송 식을 구할 수 있다.

$$\frac{d}{ds}(C_e b a^2) = -D b a^2 \quad (29)$$

여기서 s 는 파의 진행방향을 의미하며 b 는 인접한 두 파 사이의 간격을 나타낸다. $\beta = C_e b a^2$ 이라고 가정하면 식 (29)는 다음과 같이 되며

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{D}{C_e} \beta \quad (30)$$

변수 분리법을 이용하여 위의 미분방정식을 풀면 임의의 지점에서의 파고값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a = a_0 K_t K_r K_s \quad (31)$$

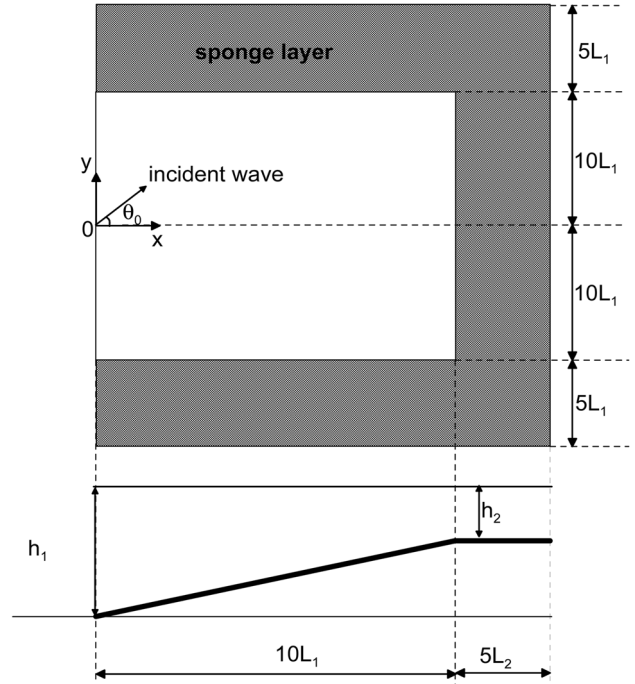


Fig. 5. Schematic diagram for shoaling and refraction tests.

여기서 K_t , K_r 및 K_s 은 각각 다음과 같이 정의되는 감쇠, 천수, 굴절 계수를 의미한다.

$$K_t = e^{-\int_0^s \frac{D}{2C_e} ds} \quad (32)$$

$$K_r = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad (33)$$

$$K_s = \sqrt{\frac{C_{e0}}{C_e}} \quad (34)$$

식 (33) 및 (34)는 $D = 2kC_e$ 의 관계식과 Snell의 법칙을 이용하면 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_t = e^{-\int_0^s k_r ds} \quad (35)$$

$$K_r = \left(\frac{1 - \sin^2 \theta_0}{1 - \sin^2 \theta_2} \right)^{1/4} \quad (36)$$

$\theta_0 = 0^\circ, 30^\circ$, $T = 10$ sec., $kh_1 = 0.1\pi$ 및 $kh_1 = 0.5\pi$ 인 경우에 대하여 수치 모의를 수행하여 식 (31)로 표현되는 엄밀해와 비교를 하였다. $\theta_0 = 0^\circ$ 인 경우 천수 효과만 고려되며, $\theta_0 = 30^\circ$ 인 경우에는 천수와 굴절이 동시에 발생하여 두 효과가 모두 고려된다. 두 경우 모두 수치해와 엄밀해가 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

에너지 감쇠가 없는 경우에는 경사면 위를 진행하면서 파고가 꾸준히 증가하는 반면에 에너지 감쇠가 있는 경우에는 에너지 감쇠의 효과가 천수 효과보다 더 크게 작용하면서 파고가 꾸준히 감소하였다.

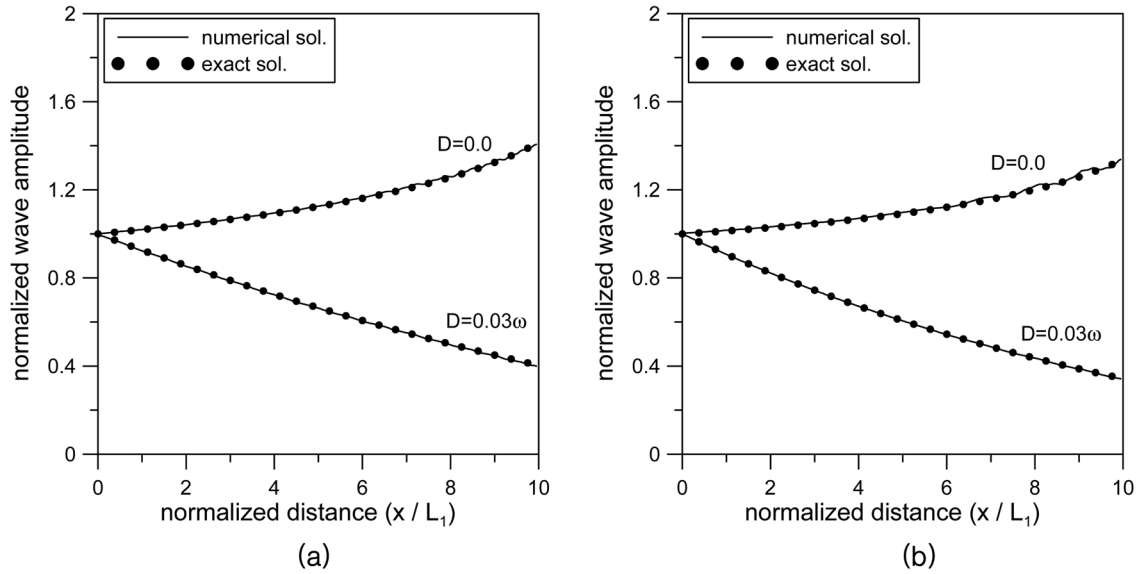


Fig. 6. Comparison of present numerical and analytical solutions along the x -direction: (a) $\theta_0 = 0^\circ$; (b) $\theta_0 = 30^\circ$.

4. 결 론

본 연구에서는 선형 천수 방정식을 이용하여 에너지 감쇠가 있는 경우에 에너지 감쇠와 파고, 파 속도 및 군 속도 사이의 관계식을 이론적으로 유도하고 수치모형을 사용하여 검증하였다. 본 연구 결과, 다음과 같은 결론들을 내릴 수 있었다. 에너지 감쇠 영역에서는 파고의 감소뿐만 아니라 위상속도 및 에너지 속도의 변화도 발생하였다. 위상속도는 에너지 감쇠가 없는 경우에 비하여 항상 더 작았으며 에너지 감쇠가 클수록 위상속도는 감소하였다. 에너지 감쇠가 있는 경우 에너지속도는 위상속도에 비하여 항상 더 컸다. Lagrange의 접근법에 의하여 복소수 형태의 각주파수를 사용할 경우 에너지 감쇠가 발생하는 파군이 에너지속도로 전파하는 사실을 알 수 있었다. 파랑의 천수와 굴절이 발생하는 경우 두 경우 다 에너지속도의 영향을 받는 것을 이론으로 발견하였고, 경사면 위로 파랑이 전파하는 경우 이 사실을 수치실험으로 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구 사업임(No. 2011-0000202).

참고문헌

이창훈, 이진욱, 최혁진, 김덕구, 이정만 (2007). “투과성 매질을 전파하는 파랑의 시간의존 방정식”, 한국해양해양공학회 춘계 학술대회 발표논문집.

Dalrymple, R.A., Kirby, J.T. and Hwang, P.A. (1984). “Wave Diffraction due to Areas of Energy Dissipation”, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 110, 67-79.

Dalrymple, R.A. and Liu, P.L. (1978). “Waves over Muds: A Two Layer Fluid Model”, *Journal of Physical Oceanography*, 8, 1121-1131.

Dixon, T.W. Squire, V.A. and Watzke, O. (1998). “Consequences of dissipation on the group velocity in a flexible ice cover”, *Cold Regions Science and Technology*, 27, 75-81.

Liu, P.L.-F. and Dalrymple, R.A. (1984). “The Damping of Gravity Waves due to Percolation”, *Coastal Engineering*, 8, 33-49.

Oveisy, A., Hall, K., Soltanpour, M. and Shibayama, T. (2009). “A Two Dimensional Horizontal Wave Propagation and Mud Mass Transport Model”, *Continental Shelf Research*, 29, 652-665.

Sollitt, C.K. and Cross, R.H. (1972). “Wave Transmission through Permeable Breakwater”, *Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, pp. 1827-1846.

Venutelli, M. (2010) “On the group velocity for the shallow water equations with source terms”, *Physics Letters A*, 374, 1909-1912.

Winterwerp, J.C., de Graaff, R.F., Groeneweg, J. and Luijendijk, A.P. (2007). “Modelling of Wave Damping at Guyana Mud Coast”, *Coastal Engineering*, 54, 249-261.

원고접수일: 2011년 11월 20일
 수정본채택: 2011년 12월 6일
 게재확정일: 2011년 12월 11일