

상태 및 입력 시간지연을 갖는 이산 퍼지 마코비안 점프 시스템의 H_∞ 제어

H_∞ Control for Discrete-Time Fuzzy Markovian Jump Systems with State and Input Time Delays

이 갑 래**
Kap Rai Lee

* 평택대학교 정보통신학과

요 약

본 논문에서는 상태변수 및 입력변수에 시간지연을 가지는 이산 퍼지 마코비안 점프 시스템의 H_∞ 퍼지 제어기 설계 방법을 나타낸다. 시간지연 퍼지 마코비안 점프 시스템은 마코비안 점프 파라미터를 갖는 시간 지연 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현된 것이다. 확률 리아프노프(Lyapunov) 함수를 이용하여 페루프 시스템이 안정하며 H_∞ 성능 조건을 만족하는 조건식을 유도한다. 확률 리아프노프 함수는 시스템 모드에 따라 변하는 함수이다. 유도된 조건식으로부터 제어기 존재 조건을 선형행렬부등식으로 나타내며, 제어기는 선형행렬부등식의 해로부터 직접 구할 수 있다. 수치적 예제 및 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법의 타당성을 보인다.

키워드: 이산 퍼지 마코비안 점프 시스템, 상태 및 입력 시간지연, 안정성 및 H_∞ 성능해석, H_∞ 퍼지 제어기.

Abstract

This paper presents the method for H_∞ fuzzy controller design of discrete-time fuzzy Markovian jump systems with state and input time delays. The Takagi and Sugeno fuzzy model is employed to represent a delayed nonlinear system that possesses Markovian jump parameters. A stochastic mode dependent Lyapunov function is employed to analyze the stability and H_∞ disturbance attenuation performance of the fuzzy Markovian jump systems with state and input time delays. A sufficient condition for the existence of fuzzy H_∞ controller is given in terms of matrix inequalities. Also numerical example is presented to illustrate the efficiency of the proposed design method.

Key Words : Discrete-time fuzzy Markovian jump systems, State and input time delays, Stability and H_∞ performance, H_∞ fuzzy controller

1. 서 론

마코비안-점프-시스템(MJS)은 시스템 구성요소의 예기치 않은 고장이나 환경변화 등으로 인하여 구조 및 파라미터에 급작스런 변화를 갖는 시스템을 모델링하는데 유용하게 사용될 수 있으므로, 이 시스템에 대한 많은 제어 연구가 이루어져 왔다[1,2]. 마코비안-점프-시스템은 여러 개의 다른 동작모드를 가지며, 이 동작모드는 유한한 집합 내에서의 값을 갖는 마코프 체인에 의하여 변하게 된다. 따라서 마코비안-점프-시스템은 제조공정 시스템, 고장-허용성 시스템, 통신 시스템 및 경제 시스템 등의 다양한 제어 시스템을 모델링 하는데

유용하게 사용 되어 질 수 있다.

선형 마코비안-점프-시스템에 대한 연구로, 안정성 해석과 H_2 및 H_∞ 제어에 대한 많은 연구 결과가 나타나 있다[3-7]. 시간지연은 안정성과 성능에 많은 영향을 미치기 때문에 시간 지연 시스템에 대한 연구 결과도 많이 이루어져 왔다. 시간지연을 갖는 선형 마코비안 점프 시스템에 대한 연구로 지연 독립적인 방법 [8-10]과 지연 종속적인[11-13] 방법 등이 있다.

비선형 마코비안-점프-시스템에 대한 H_∞ 제어 연구 결과로 Hamilton-Jacobi-Issacs 부등식으로 표현한 결과[14]와 병렬분산보상을 이용한 퍼지제어를 이용하는 방법 등이 있다 [15-16]. Hamilton-Jacobi-Issacs 부등식은 글로벌 해를 찾기는 매우 어려운 단점이 있으며, 병렬분산보상을 이용한 퍼지제어 방법은 비선형 시스템과 퍼지 모델 사이에 오차가 존재한다는 단점이 있다. 하지만, 비선형 시스템의 퍼지 모델은 선형모델들이 소속함수(membership function)로 결합된 형태로 되어

접수일자: 2011년 9월 7일

심사(수정)일자: 2012년 1월 12일

게재확정일자 : 2012년 2월 5일

* 교신저자

있기 때문에, 일반적인 비선형 시스템 보다 해석 및 제어기 설계에 대한 해를 구하기 쉬운 장점이 있다. 시간지연을 갖는 퍼지 마코비안 점프 시스템에 대한 연구결과로 지연 독립적인 방법[17]과 지연 종속적인 방법[18] 등이 있다. 이들 연구 결과는 상태 변수에 시간지연 항을 가지고 있다.

본 연구에서는 상태 및 입력변수에 시간지연을 갖는 이산 퍼지 마코비안 점프 시스템(FMJS)에 대한 H_∞ 제어기 설계 방법을 나타낸다. 점프 파라미터의 천이는 유한 집합 내의 값을 같은 이산 마코프 체인에 의하여 변화하게 되며, 이 마코프 체인은 시스템 동작 모드를 나타낸다. 확률 리아프노프(Lyapunov) 함수를 이용하여 상태 및 입력 변수에 시간 지연을 갖는 퍼지 마코비안-점프-시스템의 안정성 및 H_∞ 성능을 만족하는 조건식을 유도한다. 이 조건식으로부터 제어기 존재 조건을 선형행렬부등식으로 나타내며, 제어기는 선형행렬부등식의 해로부터 바로 구할 수 있다.

2. 문제 설정

퍼지 확률공간 (Ω, \mathcal{J}, P) 에서 정의된 상태 및 입력 변수에 시간지연을 갖는 이산 비선형 마코비안 점프 시스템에 대하여 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현된 (1)을 고려한다. 여기서 Ω 는 표본공간이고, \mathcal{J} 은 사건대수, P 는 측정 확률이다.

Plant Rule i :

IF $\theta_1(k)$ is M_{i1} and ... and $\theta_g(k)$ is M_{ig}

THEN

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_i(\eta(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{di}(\eta(k)) \mathbf{x}(k-d_1(k)) \\ &\quad + \mathbf{B}_{wi}(\eta(k)) \mathbf{w}(k) + \mathbf{B}_{ui}(\eta(k)) \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_{di}(\eta(k)) \mathbf{u}(k-d_2(k)) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}_i(\eta(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_i(\eta(k)) \mathbf{u}(k), \quad i=1,2,\dots,r. \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 M_{ij} 은 퍼지 집합이고, $\mathbf{x}(k) \in R^n$ 는 상태변수, $\mathbf{u}(k) \in R^m$ 는 입력, $\mathbf{w}(k) \in R^n \in L_2(0, T)$ 는 제한된 에너지를 갖는 외부외란, $\mathbf{z}(k) \in R^q$ 는 제어할 변수, r 은 IF-THEN 규칙의 수, $\theta_1 \sim \theta_g$ 는 측정 가능한 시스템 변수, 즉 전건부 변수이며, $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{di}, \mathbf{B}_{wi}, \mathbf{B}_{ui}, \mathbf{B}_{di}, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i$ 는 시스템을 나타내는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. $d_i(k)$ 는 (2)를 만족하는 시스템의 시변 시간지연이다.

$$0 \leq d_i(k) \leq \bar{\tau}, \quad i=1,2. \quad (2)$$

$\{\eta(k)\}$ 는 유한 집합 $M = \{1, 2, \dots, v\}$ 의 값을 가지는 이산 마코프 체인이며, 유한 집합 $M = \{1, 2, \dots, v\}$ 의 원소간의 천이 확률 $P = [p_{ls}]_{v \times v}$ 는 다음 (3)과 같다.

$$p_{ls} = \text{Prob}(\eta(k+1) = s | \eta(k) = l). \quad (3)$$

여기서 $p_{ls} \geq 0$ 이며, $l, s \in M$ 이고 $\sum_{s=1}^v p_{ls} = 1$ 이다. 집합

M 은 시스템의 동작 모드를 나타내며, $\eta(k) = l \in M$ 인 l 번째 모드와 결합되어진 시스템 행렬은 다음 (4)

와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,l} &= \mathbf{A}_i(\eta(k)), \quad \mathbf{A}_{di,l} = \mathbf{A}_{di}(\eta(k)), \quad \mathbf{B}_{wi,l} = \mathbf{B}_{wi}(\eta(k)) \\ \mathbf{B}_{ui,l} &= \mathbf{B}_{ui}(\eta(k)), \quad \mathbf{B}_{di,l} = \mathbf{B}_{di}(\eta(k)), \quad \mathbf{C}_{i,l} = \mathbf{C}_i(\eta(k)), \\ \mathbf{D}_{i,l} &= \mathbf{D}_i(\eta(k)). \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{A}_{i,l}, \mathbf{A}_{di,l}, \mathbf{B}_{wi,l}, \mathbf{B}_{ui,l}, \mathbf{B}_{di,l}, \mathbf{C}_{i,l}, \mathbf{D}_{i,l}$ 은 적절한 차원을 갖는 상수 행렬이다. 시간 k 에서 시스템 모드가 l 이라고 하면, 퍼지 시스템의 추론된 최종 출력은 다음 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) [\mathbf{A}_{i,l} \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{di,l} \mathbf{x}(k-d_1(k)) \\ &\quad + \mathbf{B}_{wi,l} \mathbf{w}(k) + \mathbf{B}_{ui,l} \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_{di,l} \mathbf{u}(k-d_2(k))] \\ \mathbf{z}(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) [\mathbf{C}_{i,l} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{i,l} \mathbf{u}(k)]. \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\mu_i(\theta(k)) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(\theta_j(k)) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} h_i(\theta(k)) &= \mu_i(\theta(k)) / \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(k)) \\ \theta(k) &= [\theta_1(k) \theta_2(k) \dots \theta_g(k)]^T \end{aligned}$$

이다. 멤버쉽 함수 $M_{ij}(\theta_j(k))$ 는 M_{ij} 에서 $\theta_j(k)$ 의 멤버쉽 등급이다. 모든 시간 k 에 대하여 $\mu_i(\theta(k))$ 는 (7)을 만족하며

$$\mu_i(\theta(k)) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(k)) > 0.$$

$h_i(\theta(k))$ 는 다음 (8)을 만족 한다.

$$h_i(\theta(k)) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) = 1.$$

퍼지 마코비안 점프 시스템 (5)에 대한 H_∞ 퍼지 제어기로 (9)를 고려한다.

Control rule i :

IF $\theta_1(k)$ is M_{i1} and ... and $\theta_g(k)$ is M_{ig}

THEN $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_i \mathbf{x}(k)$, $i=1,2,\dots,r$. (9)

여기서 \mathbf{K}_i 는 설계 되어질 제어기의 i 번째 이득 행렬이다. 퍼지 제어기의 최종 출력은 (10)과 같다.

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(x(k)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(k). \quad (10)$$

(5) 및 (10)으로부터 l 번째 모드 $\eta(k) = l \in M$ 에서의 페루프 FMJS은 아래 (11)과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}_l x(k) + \bar{A}_{d,l} x(k-d_1(k)) + \bar{B}_{d,l} x(k-d_2(k)) + \bar{B}_l w(k) \\ y(k) &= \bar{C}_l x(k) \\ z(k) &= \bar{C}_l^T(k). \end{aligned} \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{A}_l(k) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(k)) h_j(\theta(k)) [A_{i,l} + B_{u,i,l} K_j], \\ \bar{A}_{d,l}(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) A_{d,i,l}, \\ \bar{B}_{d,l}(k) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(k)) h_j(\theta(k)) B_{d,i,l} K_j, \\ \bar{B}_l(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) B_{w,i,l}, \\ \bar{C}_l^T(k) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(k)) h_j(\theta(k)) [C_{i,l} + D_{i,l} K_j], \end{aligned} \quad (12)$$

이다. $x(k)$ 는 측정 가능하며 모드 $\eta(k)$ 는 측정 불가능하다. $x(k, x_0, \eta_0)$ 는 초기 값 $x(0) = x_0$ 및 $\eta(0) = \eta_0$ 로부터의 상태 $x(k)$ 의 궤적을 나타낸다.

$w(k) = 0$ 인 FMJS (11)에 대해서 다음 (13)을 만족하면 FMJS 은 초기값 x_0 및 초기 모드 $\eta_0 \in M$ 에 대해서 확률적 안정하다고 정의한다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{ \sum_{k=0}^N x^T(k, x_0, \eta_0) x(k, x_0, \eta_0) | x_0, \eta_0 \right\} < \infty. \quad (13)$$

여기서 $E\{\cdot\}$ 은 수학적 기대치이다.

또한 주어진 $\gamma > 0$ 및 초기값에 대하여 FMJS (11)-(12)이 확률적 안정하고, 초기값 $x_0 = 0$ 및 $w(k) \in l_2[0, \infty)$ 에 대하여 (14)을 만족하면 FMJS은 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하다고 정의한다.

$$E\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k) z(k) \right\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k) w(k). \quad (14)$$

본 논문에서는 FMJS (5)에 대하여 페루프 시스템 (11)이 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하게 하는 퍼지 제어기 (10)을 설계하고자 한다.

3. 시간지연 마코비안 점프시스템의 H_∞ 제어

확률 리아프노프 후보 함수 (15)를 고려한다.

$$\begin{aligned} V(x(k), \eta(k)) &= x^T(k) P(\eta(k)) x(k) + \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x^T(i) S_1 x(i) \\ &+ \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i) S_2 x(i). \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $\eta(k) = l \in M$ 일때 $P_l = P(\eta(k))$ 이다. 리아프노프 함수 (15)는 시스템 모드에 종속적인 것을 알 수 있다.

정리 1. FMJS (11)을 고려한다. 주어진 $\gamma > 0$ 에 대하여, 다음 (16)을 만족하는 행렬 $S_1 > 0, S_2 > 0, P_l > 0$ 및 상수 $\alpha > 0$ 가 존재하면 FMJS (11)은 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하다.

$$\Omega_l(k) < 0, \quad l \in M. \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Omega_l(k) &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_{d,l}(k) & \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) \\ * & \Omega_{22} & \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_{d,l}(k) & \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) \\ * & * & \Omega_{33} & \bar{B}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) \\ * & * & * & \Omega_{44} \end{bmatrix} \\ \Omega_{11} &= \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) - P_l + S_1 + S_2 + \bar{C}_l^T(k) \bar{C}_l(k) + \alpha I \\ \Omega_{12} &= \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k), \\ \Omega_{22} &= \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) - S_1 \\ \Omega_{33} &= \bar{B}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_{d,l}(k) - S_2, \\ \Omega_{44} &= \bar{B}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) - \gamma^2 I \end{aligned} \quad (17)$$

이다.

(증명): 먼저, $H_\infty - \gamma$ 성능을 만족하는 조건식을 유도하기 위하여 시스템 (11)를 고려한다. 시간 k 에서 시스템 모드가 l 이라고 가정하고 퍼지 마코비안 점프 시스템 (11)에 대한 리아프노프 후보함수 (15)를 고려하면 다음 (18)이 유도된다.

$$\begin{aligned} &E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k) = l] - V(x(k), \eta(k) = l) \\ &= \sum_{s=1}^v \text{Prob}(\eta(k+1) = s | \eta(k) = l) \cdot [x^T(k+1) P_s x(k+1) \\ &\quad + \sum_{i=k-d_1+1}^k x^T(i) S_1 x(i) + \sum_{i=k-d_2+1}^k x^T(i) S_2 x(i)] \\ &\quad - x^T(k) P_l x(k) - \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x^T(i) S_1 x(i) - \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i) S_2 x(i) \\ &= x^T(k+1) \left[\sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \right] x(k+1) \\ &\quad + \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x^T(i) S_1 x(i) + x^T(k) S_1 x(k) - x^T(k-d_1(k)) S_1 x(k-d_1(k)) \\ &\quad + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i) S_2 x(i) + x^T(k) S_2 x(k) - x^T(k-d_2(k)) S_2 x(k-d_2(k)) \\ &\quad - x^T(k) P_l x(k) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i) S_1 x(i) - \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i) S_2 x(i) \\ &= [x^T(k) \bar{A}_l^T(k) + x^T(k-d_1(k)) \bar{A}_{d,l}^T(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + w(k)^T \bar{B}_l(k)^T \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s [\bar{A}_l(k)x(k) \\
 & + \bar{A}_{d,l}(k)x(k-d(k)) + \bar{B}_l(k)w(k)] \\
 & + x^T(k)S_1 x(k) - x^T(k-d_1(k))S_1 x(k-d_1(k)) - x^T(k)P_l(k)x(k) \\
 & + x^T(k)S_2 x(k) - x^T(k-d_2(k))S_2 x(k-d_2(k)). \quad (18)
 \end{aligned}$$

(15) 및 (18)로부터 $E\{V(x(N), \eta(N))\} \geq 0$ 이므로 $H_\infty - \gamma$ 성능함수 $J(N)$ 은 아래 (19)를 만족한다.

$$\begin{aligned}
 J(N) & \triangleq E\left\{\sum_{k=0}^N [z^T(k)z(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k)]\right\} \quad (19) \\
 & \leq E\sum_{k=0}^N [z^T(k)z(k) + V(x(k+1), \eta(k+1)) \\
 & \quad - V(x(k), \eta(k)) - \gamma^2 w^T(k)w(k)] \\
 & \leq \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1(k)) \\ x(k-d_2(k)) \\ w(k) \end{bmatrix} [\Omega_k(k)] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1(k)) \\ x(k-d_2(k)) \\ w(k) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(19)로부터 (16)이 만족되어지면 $w(k) \in l_2[0, \infty)$ 에 대하여 $\lim_{N \rightarrow \infty} J(N) < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 (16)을 만족 하는 FMJS (11)은 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가진다.

다음으로, 확률적 안정성을 증명하기 위하여 $w(k) = 0$ 인 외란이 없는 FMJS를 고려한다. 시간 k 에서 시스템 모드가 l 이라고 한다. 즉, $\eta(k) = l \in M$ 이다. 리아프노프 후보함수 (15)를 고려하면 (20)이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 & E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k) = l] - V(x(k), \eta(k) = l) \\
 & \quad + \alpha x^T(k)x(k) \\
 & = \sum_{s=1}^v \text{Prob}(\eta(k+1) = s | \eta(k) = l) [x^T(k+1)P_s x(k+1) \\
 & \quad + \sum_{i=k-d_1+1}^k x^T(i)S_1 x^T(i)] + \sum_{i=k-d_2+1}^k x^T(i)S_2 x^T(i) \\
 & \quad - x^T(k)P_l x(k) - \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x^T(i)S_1 x(i) \quad (20) \\
 & \quad - \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i)S_2 x(i) + \alpha x^T(k)x(k) \\
 & = [x^T(k) \quad x^T(k-d_1(k)) \quad x^T(k-d_2(k))] [\Gamma_l(k)] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1(k)) \\ x(k-d_2(k)) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \Gamma_l(k) & = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_{d,l}(k) \\ * & \Gamma_{22} & \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_{d,l}(k) \\ * & * & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \\
 \Gamma_{11} & = \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) - P_l + S_1 + S_2 + \alpha I \\
 \Gamma_{22} & = \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) - S_1
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{33} = \bar{B}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_{d,l}(k) - S_2 \quad (21)$$

이다.

(17) 및 (21)로부터 (16)을 만족하면 $\Gamma_l(k) < 0$ 를 만족한다. (20)으로부터 (16)이 만족되면 (22)가 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k) = l] - V(x(k), \eta(k) = l) \\
 & \leq -\alpha x^T(k)x(k) \quad (22)
 \end{aligned}$$

리아프노프 후보함수 (15)로부터 아래 (23)을 만족하는 양수 β_1 및 β_2 가 항상 존재함을 알 수 있다.

$$\beta_1 x^T(k)x(k) \leq V(x(k), \eta) \leq \beta_2 \sup_{\tau \in [0, \tau]} x^T(k-\tau)x(k-\tau). \quad (23)$$

또한 (22) 및 (23)으로부터 $x(k) \neq 0$ 에 대해서 다음 (24)가 만족됨을 알 수 있다.

$$0 < \frac{E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k)]}{V(x(k), \eta(k))} < \beta. \quad (24)$$

여기서 $\beta \equiv 1 - \frac{\alpha}{\beta_2}$ 이며, $0 < \beta < 1$ 이다. 또한 (24)로부터 (25)가 만족됨을 알 수 있으며

$$E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k)] \leq \beta V(x(k), \eta(k)). \quad (25)$$

(25)를 이용하면 다음 (26)이 유도된다.

$$E[V(x(k), \eta(k)) | x_0, \eta_0] \leq \beta^k V(x_0, \eta_0). \quad (26)$$

부등식 (26)으로부터 (27)이 만족됨을 알 수 있으며

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\sum_{k=0}^N V(x(k), \eta(k)) | x_0, \eta_0\right] \leq \quad (27)$$

$$\frac{1}{1-\beta} (x^T(0)P(\eta_0)x(0) + \sum_{i=-d_1}^0 x^T(i)S_1 x(i) + \sum_{i=-d_2}^0 x^T(i)S_2 x(i)).$$

(23)를 이용하면 (27)은 다시 (28)로 나타낼 수 있다.

$$\beta_1 \lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\sum_{k=0}^N x^T(k)x(k) | x_0, \eta_0\right] \quad (28)$$

$$\leq \frac{1}{1-\beta} (x^T(0)P(\eta_0)x(0) + \sum_{i=-d_1}^0 x^T(i)S_1 x(i) + \sum_{i=-d_2}^0 x^T(i)S_2 x(i)).$$

(28)로부터 (29)가 만족됨을 알 수 있다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\sum_{k=0}^N x^T(k)x(k) | x_0, \eta_0\right\} \leq \infty. \quad (29)$$

따라서 (16)을 만족하는 시스템은 확률적 안정하다. \square

정리 2는 정리 1로부터 FMJS (5)에 대한 H_∞ 퍼지 제어가 존재할 충분조건을 나타내고, 이 조건식을 이용한 제어기 설계 방법을 나타낸다.

정리 2 : FMJS (5)를 고려한다. 선형행렬 (30)을 만족하는 행렬 $S_1 > 0, S_2 > 0, K_l, P_l > 0$ 및 양수 α, γ 가 존재 하면 제어기 (10)은 FMJS (11)이 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하게 하는 제어기이다.

$$\begin{aligned} \Phi_{ii,l} &< 0, \quad i=1,2,\dots,r, \quad l \in M \\ \Phi_{ij,l} + \Phi_{ji,l} &< 0, \quad i < j < r \in S, \quad l \in M. \end{aligned} \quad (30)$$

여기서

$$\Phi_{ij,l} = \begin{bmatrix} -P_l + S_1 + S_2 + \alpha I & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{51}^T & \Lambda_{61}^T \\ * & -S_1 & 0 & 0 & A_{di,l}^T & 0 \\ * & * & -S_2 & 0 & \Lambda_{53}^T & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & B_{wi,l}^T & 0 \\ * & * & * & * & -2I + \sum_{s=1}^v p_s P_s & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{51} &= A_{i,l} + B_{ui,l} K_j, \quad \Lambda_{53} = B_{di,l} \cdot K_j, \\ \Lambda_{61} &= C_{i,l} + D_{i,l} K_j \end{aligned} \quad (31)$$

이다. *는 대칭 행렬의 주 대각 아래 성분을 나타낸다.

(증명): 정리 1의 부등식 (16)은 다음 (32)로 표현 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -P_l + S_1 + S_2 + \bar{C}_l^T \bar{C}_l + \alpha I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_l^T(k) \\ \bar{A}_{di}^T(k) \\ \bar{B}_{di}^T(k) \\ \bar{B}_l^T \end{bmatrix} \left(\sum_{s=1}^v p_s P_s \right) \begin{bmatrix} \bar{A}_l(k) & \bar{A}_{di}(k) & \bar{B}_{di}(k) & \bar{B}_l \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

Schur 보수 및 다음 조건식을 이용하면

$$-\left(\sum_{s=1}^v p_s P_s \right)^{-1} < -2I + \sum_{s=1}^v p_s P_s. \quad (33)$$

부등식 (32)는 다음 (34)을 만족하면 만족됨을 알 수 있다.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Phi_{ij,l} < 0, \quad l \in M. \quad (34)$$

식 (30)이 만족하면 (34)가 만족됨을 알 수 있다. □

정리 2은 H_∞ 퍼지 제어를 찾는 방법을 LMI 형태로 나타내고 있으며, LMI 조건식의 해는 LMI 최적화

방법을 이용하면 쉽게 해를 찾을 수 있다. 정리 2로부터 구해진 제어기 (10)은 퍼지 마코비안 점프 시스템 (11)이 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하게 하는 제어기이다.

4. 예제 및 컴퓨터 시뮬레이션

상태 및 입력 시간지연을 갖는 비선형 시스템 (35)을 고려한다

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.5x_1(k) + 0.35x_2^3(k) + 0.1x_1(k-d(k)) \\ &\quad + 0.1x_2^3(k-d_1(k)) + \delta u(k) \\ &\quad + 0.15 \cdot \delta u(k-d_2(k)) + w(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + 0.2x_2(k-d_1(k)) + \delta u(k) \\ &\quad + 0.15 \cdot \delta u(k-d_2(k)) + w(k) \\ z(k) &= x_1(k) + 0.2x_2(k) + \delta u(k) + w(k). \end{aligned} \quad (35)$$

여기서, 시간지연 $d_i(k)$ 및 외란 신호 $w(k)$ 는 (36)로 정의한다.

$$\begin{aligned} d_1(k) &= 5 + 0.7 \cos(0.3\pi k), \quad k > 0 \\ d_2(k) &= 4 + 0.7 \cos[0.3\pi k], \quad k > 0 \\ w(k) &= 1, \quad 10 \leq k \leq 20. \end{aligned} \quad (36)$$

상태변수 값은 (37)을 만족한다고 가정한다.

$$x_2(k) \in [-1.5 \ 1.5]. \quad (37)$$

파라미터 $\delta \in [0,1]$ 는 제어 입력의 정상적인 작동 여부를 나타낸다. 즉, $\delta=1$ 은 제어 입력의 정상작동을 나타내며, $\delta=0$ 는 제어 입력이 전혀 작동하지 않음을 나타내고, $0 < \delta < 1$ 은 제어 입력이 부분적으로 작동함을 나타낸다. 파라미터 δ 는 표 1에 나타난 것과 같이 다른 3가지 모드를 갖는다고 가정한다. 동작 모드의 파라미터 천이 확률은 (38)와 같다고 가정한다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.25 & 0.1 \\ 0.29 & 0.48 & 0.23 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

표 1. 시스템 파라미터 모드
Table 1. Modes of system parameter δ

모드 l	파라미터 δ
1	1
2	0.8
3	0.6

(35)의 비선형 항 $x_2^3(k)$ 을 다음 (39)로 나타내면

$$x_2^3(k) = M_{11} \cdot 0 \cdot x_2(k) - M_{12} \cdot 2.25 \cdot x_2(k). \quad (39)$$

퍼지 집합의 멤버십 함수는 식 (40)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{11}(x_2(k)) &= 1 - \frac{x_2^2(k)}{2.25} \\ M_{12}(x_2(k)) &= \frac{x_2^2(k)}{2.25}. \end{aligned} \quad (40)$$

(40)의 퍼지 집합을 이용하여 비선형 시스템 (35)을 T-S 퍼지 모델로 나타내면 다음과 같다.

Plant Rule 1:

IF $x_2(k)$ is M_{11} THEN

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{1,l}x(k) + A_{d1,l}x(k-d_1(k)) + B_{u1,l}(k)u(k) \\ &\quad + B_{d1,l}(k-d_2(k))u(k) + B_{w,l}w(k) \\ e(k) &= C_{1,l}x(k) + D_{1,l}u(k), \quad l=1,2,3. \end{aligned} \quad (41)$$

Plant Rule 2:

IF $x_2(k)$ is M_{12} THEN

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{2,l}x(k) + A_{d2,l}x(k-d_1(k)) + B_{u2,l}(k)u(k) \\ &\quad + B_{d2,l}(k-d_2(k))u(k) + B_{w,l}w(k) \\ e(k) &= C_{2,l}x(k) + D_{2,l}u(k), \quad l=1,2,3. \end{aligned} \quad (42)$$

여기서 $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]^T$ 이며

$$\begin{aligned} A_{1,l} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d1,l} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ A_{2,l} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.787 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d2,l} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.225 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad l=1,2,3 \\ B_{w1,l} &= B_{w2,l} = [1 \ 1]^T, \quad C_{1,l} = C_{2,l} = [1 \ 1], \quad l=1,2,3 \\ B_{u1,1} &= B_{u2,1} = [1 \ 1]^T, \quad B_{u1,2} = B_{u2,2} = [0.8 \ 0.8]^T, \\ B_{u1,3} &= B_{u2,3} = [0.6 \ 0.6]^T, \quad B_{d1,1} = B_{d2,1} = 0.15 \cdot [1 \ 1]^T, \\ B_{d1,2} &= B_{d2,2} = 0.15 \cdot [0.8 \ 0.8]^T, \\ B_{d1,3} &= B_{d2,3} = 0.15 \cdot [0.6 \ 0.6]^T \\ D_{1,1} &= D_{2,1} = 1, \quad D_{1,2} = D_{2,2} = 0.8, \quad D_{1,3} = D_{2,3} = 0.6 \end{aligned} \quad (43)$$

이다. 정리 3을 이용하여 제어기를 설계하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} K_1 &= [-0.35 \quad -0.79] \\ K_2 &= [-0.34 \quad -1.06]. \end{aligned} \quad (44)$$

제어기에 대한 시간지연을 갖는 비선형 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 그림 1~3에 나타나 있다. 상태 변수의 초기값은 $x_1(0) = 1.0$ 이고 $x_2(0) = -1.0$ 이다. 그림 1의 (가)는 δ 가 0과 1사이에서 (45)과 같이 변할 때의 컴퓨터 시뮬레이션 결과이다.

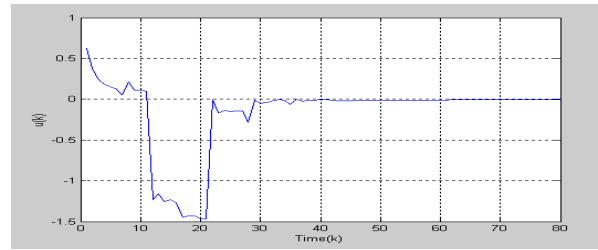
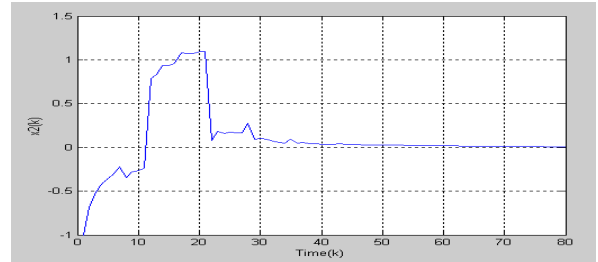
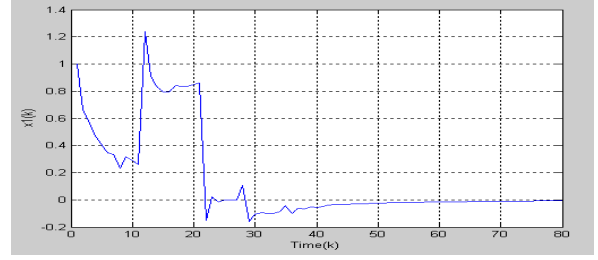
$$\delta = \begin{cases} 0.8, & k < 30 \\ 1, & 30 \leq k < 40 \\ 0.6, & k \geq 40 \end{cases} \quad (45)$$

그림 1의 (나)는 δ 가 0과 1사이에서 (46)과 같이 변할 때의 컴퓨터 시뮬레이션 결과이다.

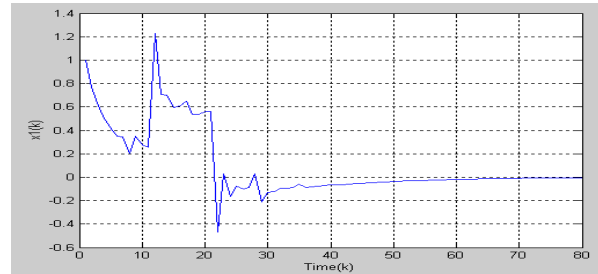
$$\delta = \begin{cases} 1, & k < 30 \\ 0.6, & 30 \leq k < 40 \\ 0.8, & k \geq 40 \end{cases} \quad (46)$$

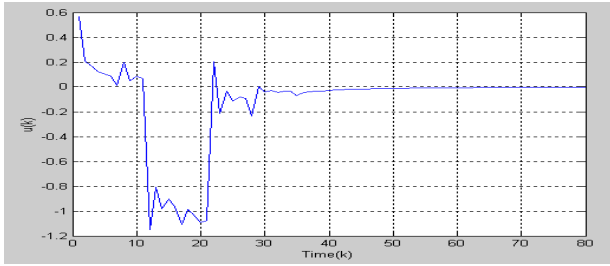
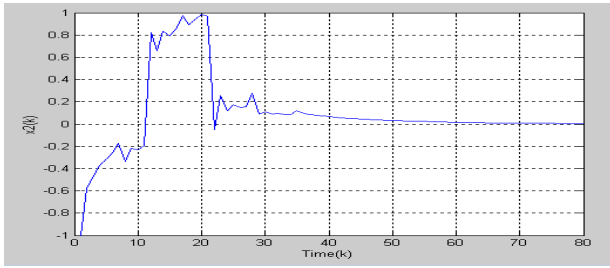
그림 1의 (다)는 δ 가 0과 1사이에서 (47)과 같이 변할 때의 컴퓨터 시뮬레이션 결과이다.

$$\delta = \begin{cases} 0.6, & k < 30 \\ 0.8, & 30 \leq k < 40 \\ 1, & k \geq 40 \end{cases} \quad (47)$$

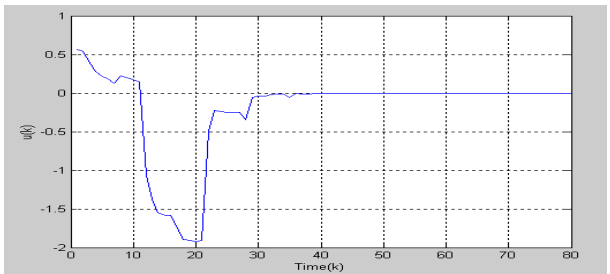
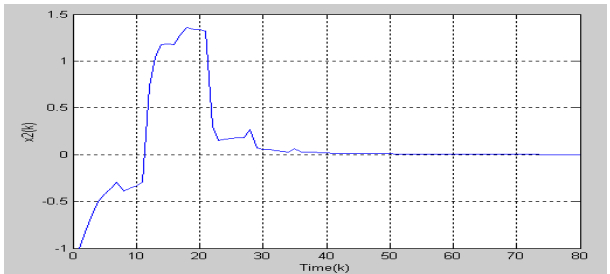
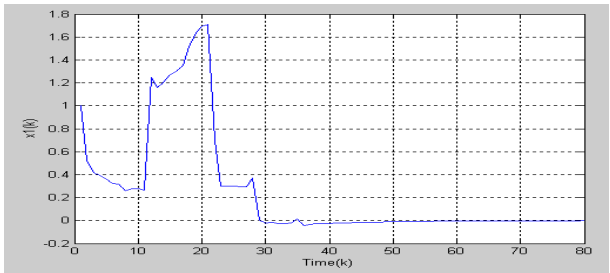


(가) $\delta = (0.8, 1, 0.6)$ 인 경우





(나) $\delta = (1, 0.6, 0.8)$ 인 경우



(다) $\delta = (0.6, 0.8, 1)$ 인 경우

그림 1. 시간지연 비선형 MJS 시뮬레이션 결과 ($0 < \delta < 1$)
 Fig. 1. Simulation results of nonlinear MJS with $0 < \delta < 1$

그림 1의 결과로부터 초기값 오차뿐만 아니라 구형파

외란 신호가 가해져도 시스템 상태값은 시간이 지나면서 영으로 잘 수렴함을 알 수 있다. 따라서 설계되어진 제어기는 비선형 마코비안 점프 시스템을 안정화 시키며 외란감쇄 기능을 가짐을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 상태 및 입력 시간 지연을 갖는 이산 퍼지 마코비안 점프 시스템에 대한 안정성뿐만 아니라 H_∞ 성능을 보장하는 제어기 설계방법을 나타내었다. 시간지연 마코비안 점프 퍼지 시스템은 마코비안 점프 파라미터를 갖는 시간 지연 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현된 모델이다. 점프 파라미터의 천이는 유한 집합 내의 값을 같은 이산 마코프 체인에 의하여 변화하게 되며, 이 마코프 체인은 시스템 동작 모드를 나타낸다. 확률 리아프노프(Lyapunov) 함수를 이용하여 상태 및 입력 시간 지연을 갖는 퍼지 마코비안 점프 시스템의 안정성 및 H_∞ 성능을 해석하였다. 또한 페루프 시스템이 안정하며 H_∞ 성능 조건을 만족하는 조건식을 유도하였다. 확률 리아프노프(Lyapunov) 함수는 시스템 모드에 따라 변하는 함수이다. 유도된 조건식으로부터 제어기 존재 조건을 선형행렬부등식으로 나타내었으며, 제어기는 선형행렬부등식으로부터 구할 수 있다. 수치적 예제 및 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법의 타당성을 보였다.

참고 문헌

- [1] N. N. Krasovskii and E.A. Lidskii, "Analytical design of controller in systems with random attributes-Part I," *Automation and Remote Control*, vol. 22, pp.1021-1025, 1961.
- [2] M. Mariton, *Jump Linear System in Automatic Control*. New York: Marcel Dekker, 1990.
- [3] O. L. V. Costa and M. D. Fragosa, "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian Jumping parameters," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 179, no. 2, pp. 54-178, 1993.
- [4] G. Pan and Y. Bar-Shalom, "Stabilization of jump linear gaussian systems without mode observation," *Int. J. Control*, vol. 64, no. 4, pp. 631-661, 1996.
- [5] P. Shi and E. K. Boukas, " H_∞ control for Markovian Jumping linear systems with parametric uncertainty," *Journal of Optimization Theory and Application*, vol. 95, no. 1, pp. 75-99, 1997.
- [6] E. K. Bouka and P. Shi, "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian Jumping parameters," *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, vol. 8, no. 13, pp. 1155-1167, 1998.
- [7] O. L. V. Costa and R. P. Marques, "Mixed

- H_2/H_∞ control of discrete-time Markovian linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol., 43, no. 1, pp. 95-100, 1988.
- [8] K. Benjelloun and E. K. Boukas, "Mean square stochastic stability of linear time-delay system with Markovian jumping parameters," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol, 43, no. 10, pp. 1456-1460, Oct. 1988.
- [9] P. Shi, E. K. Boukas, and R. K. Agarwal, "Control of Markovian jump discrete-time systems with norm bounded uncertainty and unknown delay," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol, 44, no. 11, pp. 2139-2144, Nov. 1999.
- [10] P. Shi, M. S. Mahmoud, J. Yi, and A. Ismail, "Worst case control of uncertain jumping systems with multi-state and input delay information," *Information Science*, vol, 176, no. 2, pp. 186-200, Jan. 2006.
- [11] Y. Cao, J. Lam, and L. Hu, "Delay-dependent stochastic stability and H_∞ analysis for time delay systems with Markovian jumping parameters," *Int. Journal of the Franklin Institute*, vol, 340, no. 6, pp. 423-434, Sep. 2003.
- [12] Z. Shu, J. Lam, and S. Xu, "Robust stabilization of Markovian delay systems with delay dependent exponential estimates," *Automatica*, vol, 42, no. 11, pp. 2001-2008, Nov. 2006.
- [13] S. Xu, J. Lam, and C. Yang, "Robust H_∞ control for uncertain linear neutral delay systems," *A Optimal Control Appl. Meth.*, vol, 23, pp. 113-123, 2002.
- [14] M.D.S. Aliyu and E.K. Boukas, " H_∞ control for Markovian jump nonlinear systems," in Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, pp. 766-771, 1998.
- [15] H. Wu and K. Cai, "Mode-independent robust stabilization for uncertain Markovian jump nonlinear systems," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Part B, vol. 36, no. 3, pp. 509-519, June. 2006.
- [16] J. Dong and G. Yang, "Fuzy controller design for Markovian jump nonlinear systems," *Int. J. Control. Automation and systems*, vol. 5, no. 6, pp. 712-717, Dec. 2007.
- [17] K. R. Lee and K. H. Lee, " H_∞ Fuzy control for discrete-time nonlinear Markovian jump systems with time delay," *Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 19, no. 6, pp. 779-786, Dec. 2009.
- [18] Y. Zhang, S. Xu and J. Zhang, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain fuzzy Markovian Jump systems," *Int. J. Control. Automation, and systems*, vol. 7, no. 4, pp. 520-529, August, 2009.

저 자 소 개



이 갑 래 (Kap Rai Lee)

1987년 : 경북대학교 전자공학과 공학사
 1990년 : 동대학원 전자공학과 공학석사
 1999년 : 동대학원 전자공학과 공학박사
 1990년 ~ 1995년 : 국방과학연구소 연구원
 2001년 ~ : 평택대 정보통신학과 부교수

관심분야 : 지능시스템, 지능제어, 산업용 네트워크, 안드로이드 탑재 임베디드 시스템 설계 및 응용

Phone : 031-659-8285
 E-mail : krlee@ptu.ac.kr