

# 압전 발전기의 설계를 위한 고차 모드의 활용

## Use of High Order Vibration Modes for Design of Piezo Energy Harvester

황 우 석\*

Woo Seok Hwang

(2012년 2월 8일 접수 ; 2012년 3월 16일 심사완료)

**Key Words** : Energy Harvester(에너지 수확기), Piezoelectricity(압전), Vibration Mode(진동모드)

### ABSTRACT

The most common type of the piezoelectric energy harvester is the cantilevered beam since it is attached to the host structure and tuned to the frequency of the base excitation easily. However, the excessive strain at the fixed end of cantilevered beam causes some problems such as fatigue and durability. The use of higher vibration modes of the cantilevered beam may reduce the concentration of the strain at the fixed end since the strains of higher modes are distributed along the span. The results show that the use of high vibration mode is not efficient for power generation, but it reduces the excessive strain lever at typical region to prevent the failure by fatigue.

$Y_o$  : 기저의 진동 폭

### 기 호 설 명

- $c_a$  : 공기에 의한 감쇠계수
- $c_s$  : 점탄성에 의한 감쇠계수
- $\epsilon$  : 굽힘 변형률
- $I$  : 보의 굽힘 강성
- $i$  : 회로에 흐르는 전류
- $M$  : 굽힘 모멘트
- $m$  : 보의 단위 길이당 질량
- $\omega$  : 가진 주파수
- $\omega_r$  :  $r$ 번째 모드의 고유진동수
- $\phi_r$  :  $r$ 번째 모드의 진동모드 형상
- $q$  : 전하량
- $R$  : 회로의 저항
- $v$  : 발생한 전압
- $w$  : 기저에 대한 보의 횡방향 변위
- $w_b$  : 기저의 횡방향 위치

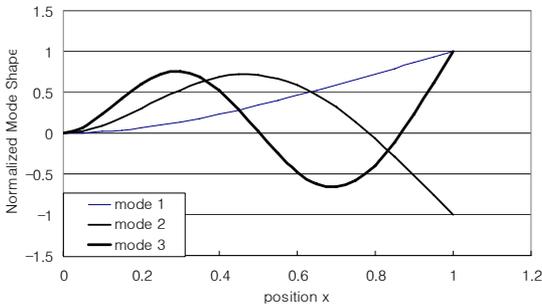
### 1. 서 론

압전 재료의 순방향 효과를 이용하면 구조물의 변형률 또는 변형률의 시간 변화에 비례하는 전기적 출력을 얻을 수 있다. 이를 이용하여 전력을 생산하고자 하는 기법을 많은 연구자들이 연구해 오고 있으며, 다양한 주제에 대한 접근이 시도되고 있다<sup>(1-3)</sup>. 전기적 출력을 가장 효율적으로 저장하기 위한 전기회로를 개발하는 연구도 있고<sup>(2)</sup>, 넓은 주파수대역의 진동을 이용하는 방법 등에 대한 연구도 있다<sup>(3,4)</sup>. 하지만 진동이론에 기초하여 판단하건데, 구조물의 공진을 이용하는 것이 가장 효율적이며, 이를 고려한 대표적인 에너지 수확장치의 구조는 외팔보의 형태를 가진다<sup>(5-7)</sup>. 외팔보는 다른 구조물에 비해 공진주파수가 낮은 영역에서 형성되도록 설계가 가능하며, 끝단에 질량을 부가하여 주파수 조절 및 변형증대 효과를 꾀하기가 용이한 장점이 있다. 외팔보를 이용한 에너지 수확장치에 대한 연구를 살펴보면 대부분이 외팔보의 첫 번째 모드를

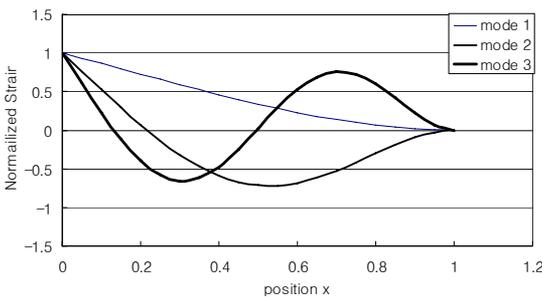
\* 교신저자; 정회원, 대구대학교 기계·자동차공학부  
E-mail : whwang@daegu.ac.kr  
Tel : (053)850-6672, Fax : (053)850-6689

이용한 연구이며, 고차 모드를 이용한 연구는 매우 드물다. 외팔보의 1차 진동 모드의 형상과 변형률의 크기는 Fig. 1과 같다. 즉, 고정단 주위에서 최대 변형률이 발생하며, 끝단으로 갈수록 급격히 변형률이 작아진다. 에너지 수확의 관점에서 고정단 주위가 주로 역할을 하며 끝단으로 가면서 기여도가 점점 작아진다. 또한 고정단 주위에서 발생한 최대 변형률은 최대 응력을 유발하여 고정단을 항복 내지 피로파손에 매우 취약하게 만든다. 이에 반하여 고차 모드들은 길이 방향으로 변형률이 고루 발생하므로 응력 집중의 정도가 적고, 출력 발생에 보의 각 부분들이 고루 기여할 수 있다.

이 논문에서는 고정단에 가혹하게 집중되는 변형률을 극복하기 위하여 고차 모드를 사용한 에너지 수확장치의 설계를 시도하였다. 정량적인 비교를 위하여 압전 발전기가 부착된 기저의 진동수를 일정하게 두고, 보의 길이를 조정하여 1, 2, 3차 고유진동수가 이와 일치하도록 모델을 설정하였다. 출력과 변형률의 비교를 통하여 고차 모드를 활용한 압전 발전기의 장단점을 분석하였다.



(a) Mode shapes



(b) Strain

Fig. 1 Mode shapes and strain of beam

## 2. 출력 계산식 및 모델 설정

### 2.1 운동방정식과 출력식

외팔보의 진동에 따른 출력전압을 해석적으로 계산한 결과를 Inman 등이 제시하였으며<sup>(6)</sup>, 이 내용을 이 논문의 연구에 적합하게 사용할 수 있다고 판단하였다. Inman의 연구 결과를 간략하게 요약하면 다음과 같다.

Fig. 2와 같이 외팔보에 압전 재료가 부착된 에너지 수확장치가 고정된 기저부의 운동에 의하여 진동하고 있다. 진동하는 보의 운동방정식은 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \\ & + c_a \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \\ & = -m \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

이 논문에서 사용된 기호에 대한 설명은 논문 서두의 기호 설명과 Table 1을 참조한다.

압전 재료는 변형이 일어나면 변형률에 비례하는 전하가 발생하고 이의 시간에 대한 변화량이 전류이므로, 순방향 압전식을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R} = \frac{dq(t)}{dt} \\ &= - \int_{x=0}^L d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx \\ &\quad - \frac{\epsilon_{33}^s b L}{h_p} \frac{dw(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $h_{pc}$ 는 중립면에서 압전 재료의 중심까지 거리

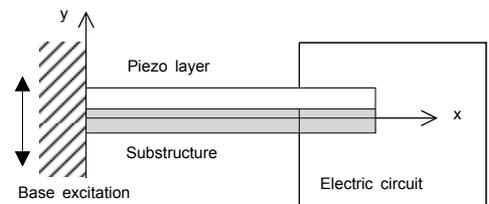


Fig. 2 Cantilevered beam type energy harvester

이다. 식 (1)과 식 (2)는 압전 재료의 전기적, 기계적 특성을 연계하여 표현한 지배 방정식이며, 이 연립 미분방정식의 해가 기계적 응답인 변위와 전기적 응답인 전압이다. 상세한 내용은 참고문헌<sup>(6)</sup>을 참조하고 결과만 요약하면 다음과 같다. 기저가 폭  $Y_o$ , 주파수  $\omega$ 로 진동할 때, 출력전압, 출력전류와 변위는 다음과 같다.

$$v(t) = m\omega^2 A Y_o e^{j\omega t} \quad (3)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{1}{R} m\omega^2 A Y_o e^{j\omega t} \quad (4)$$

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} [\gamma_r^w - \chi_r A] \times \frac{m\omega^2 \phi_r(x)}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega} Y_o e^{j\omega t} \quad (5)$$

여기서,  $A$ 는 다음과 같이 치환된 값이며,

$$A = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \varphi_r \gamma_r^w}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \varphi_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega} + \frac{1 + j\omega \tau_c}{\tau_c}} \quad (6)$$

$\gamma_r^w$ 는 모드형상의 적분값,  $\chi_r$ 는 모달 연성항,  $\zeta_r$ 는 모달 감쇠비,  $\varphi_r$ 는 모드형상의 미분값이며,  $\tau_c$ 는 회로의 시간상수이다. 이에 대한 정의는 참고문헌<sup>(6)</sup>을 참조한다. 출력전력은 출력전압과 출력전류의 곱이므로, 식 (3)과 (4)를 곱하여 계산한다.

## 2.2 모델 설정

압전 발전기 설계를 위한 기본 모델의 치수나 물성치는 Table 1과 같다. 이 모델은 참고문헌<sup>(6)</sup>에서 사용된 모델로서 검증이 용이하고 이 논문의 내용을 잘 표현해 주는 모델이므로 선정하였다. 구조물의 1차 고유진동수가 47.8 Hz이므로 외팔보의 고정단이 이 정도의 진동수를 갖는 진동을 할 때 공진을 유도하여 에너지 수확을 늘이도록 설계되어 있다. 외팔보의 길이를 조절하여 2차, 3차 고유진동수가 원래 보의 1차 고유진동수와 일치하는 외팔보의 치수를 결정하였다. 외팔보의 고유진동수를 구한 식은 식 (7)과 같고, 외팔보의 무차원 진동수  $\lambda_r$ 는 모드의 순서대로 1.8751, 4.6941, 7.8548, 10.9955, 14.1372 등이다. 이를 이용하여 2차와 3차 고유진동수가 원래 보의

**Table 1** Material properties for energy harvester

Length of the beam, $L$ (mm)	100
Width of the beam, $b$ (mm)	20
Thickness of the substructure, $h_s$ (mm)	0.5
Thickness of the PZT, $h_p$ (mm)	0.4
Young's modulus of the substructure, $Y_s$ (GPa)	100
Young's modulus of the PZT, $Y_p$ (GPa)	66
Mass density of the substructure, $\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	7165
Mass density of the substructure, $\rho_p$ (kg/m <sup>3</sup> )	7800
Piezoelectric constant, $d_{31}$ (pm/V)	-190
Permittivity, $\epsilon_{33}^s$ (nF/m)	15.93

**Table 2** Length and natural frequencies of models

Model	Length [mm]	Natural frequency[Hz]		
		1st	2nd	3rd
Model 1	100	47.8	299.6	838.9
Model 2	250	7.6	47.8	133.9
Model 3	419	2.7	17.1	47.8

1차 고유진동수와 일치하는 보의 길이를 계산하면 각각 원래 보 길이의 2.50(=4.6941/1.8751)배, 4.19(=7.8548/1.8751)배이다.

$$\omega_r = \frac{\lambda_r^2}{L^2} \sqrt{\frac{YI}{m}} \quad (7)$$

원래 길이의 보를 모델 1, 길이가 2.50, 4.19배인 보를 모델 2와 3이라 명명하였다. 이 모델들의 고유 진동수를 계산하여 모델의 길이와 함께 표시하면 Table 2와 같다. 의도한 대로 모델 1의 첫 번째 고유진동수와 모델 2의 두 번째, 모델 3의 세 번째 고유진동수가 47.8 Hz로 일치함을 볼 수 있다. 즉, 47.8 Hz로 진동하는 있는 구조물에 모델 1, 2 3의 압전 발전기를 부착하면 각 모델은 공진 현상이 발생하며 각각 1차, 2차, 3차 고유진동모드로 크게 진동한다.

모델 2와 3의 경우, Fig. 1(b)와 같이 공진시 나타나는 변형률의 부호가 서로 다른 구간이 발생하므로, 변형률의 상쇄가 일어나지 않도록 전극을 설계하여야 한다. 즉, 2차 고유진동모드의 변형률은  $x=0.2165L$ 인 점에서 그 부호가 바뀌므로 이 점을 기준으로 전하를 수집하는 전극을 달리하여야만 상쇄를 막을 수 있다. 이러한 점을 변형률 절점(strain

**Table 3** Position of strain nodes

Mode	Position $x=x/L$		
Mode 1	-	-	-
Mode 2	0.2165	-	-
Mode 3	0.1323	0.4965	-
Mode 4	0.0944	0.3559	0.6417

node)라고 부른다. 외팔보의 경우, 변형률 절점의 위치는 Table 3과 같으므로 이를 고려하여 모델 2는  $x=0.2165L$ 에서 분리된 2개의 전극을, 모델 3은  $x=0.1323L$ 과  $x=0.4965L$ 에서 분리된 세 개의 전극을 사용한다.

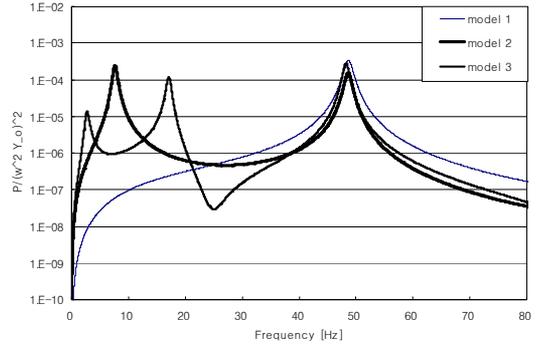
### 3. 고차 모드의 영향 분석

#### 3.1 출력 비교

입력의 구조물이 진폭  $Y_0$ , 주파수  $\omega$ 로 진동하고 있을 때, 2절에서 제시한 각 모델을 부착하여 발전을 하였다. 저항은  $1 \times 10^5$ 으로 고정된 조건에서 외팔보의 진동에 따른 출력 전력을 해석적으로 계산하여 Fig. 3에서 비교하였다. Fig. 3에서 보이는 최고 출력의 정확한 수치 값은 Table 4와 같다. 공진 목표주파수인 47.8 Hz 부근에서 모델 1의 출력이 가장 높고, 모델 2와 3은 그보다 낮다. 즉, 1차 고유진동수에 맞추어 개발된 모델 1은 길이가 다른 모델에 비하여 매우 짧음에도 불구하고 높은 출력 전력을 보이므로 매우 효율적이다. 반면에 고차모드를 활용한 모델은 길이가 길지만 출력이 오히려 작으므로, 효율성 측면에서는 고차 모드를 사용하는 것이 매우 비효율적임을 알 수 있다.

#### 3.2 변형과 변형률 비교

Fig. 3과 Table 4의 출력전력은 실제의 출력전력을  $(\omega^2 Y_0)^2 e^{j\omega t}$ 으로 나누어 표현한 값이다. 만약 목표 주파수인 47.8 Hz에서 세 모델이 동등한 출력전압을 얻고자 한다면 기저분의 진동 폭인  $Y_0$ 를 조정하여 가능할 것이다. 출력전력은 진동 폭의 제곱에 비례하므로 만약 모델 2의 기저 진동 폭이  $1.46 Y_0$ 가 되면, 모델 1과 같은 출력전력을 생산할 수 있다. 마찬가지로 모델 3은  $1.10 Y_0$ 의 진폭으로 가진다면 동일한 출력전력을 생산할 수 있다. 이를 등가 진폭이라 표시하고 Table 4에 정리하였다.



**Fig. 3** Power output FRF for three models

**Table 4** Comparison of power output

Model	Max power output [ $W \cdot \text{sec}^4/\text{m}^2$ ]	Equiv. amplitude
Model 1	3.33E-4	1.00 $Y_0$
Model 2	1.56E-4	1.46 $Y_0$
Model 3	2.73E-4	1.10 $Y_0$

각 모델이 등가 진폭으로 진동할 때, 모델의 변형과 변형률을 계산하였다. 변형은 식 (5)에서  $e^{j\omega t}$ 를 제외한 부분이며, 변형률은 식 (5)의 변위를 미분하여 식 (8)과 같이 계산할 수 있다.

$$\epsilon(x,t) = -h_{pc} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

여기서  $h_{pc}$ 는 압전 재료의 중앙면에서 보의 중립면까지의 거리이다.

같은 출력전력을 발생하는 동안 각 모델의 변형과 변형률을 비교한 그래프는 Fig. 4와 5이다.

모델 1, 2, 3의 순으로 최대 변위와 최대 변형률이 작아짐을 볼 수 있다. 모델 1은 길이가 짧지만 큰 변위와 변형률이 발생되어 주어진 출력을 생산하고, 모델 2와 3은 늘어난 길이 방향으로 변형과 변형률을 분포시켜 출력을 생산한다. 그러므로 고차모드를 사용할수록 과도한 변형이나 변형률의 발생은 일어나지 않는다.

외팔보의 고정단에 발생하는 큰 변형률은 큰 응력을 유발하고, 이는 피로수명에 지대한 영향을 미친다. 그러므로 모델 1은 발전 효율성은 높지만 내구수명 측면에서는 모델 2나 3이 바람직함을 알 수 있다.

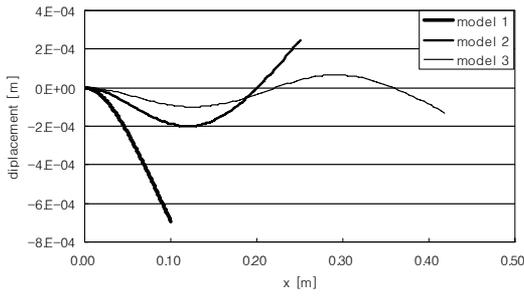


Fig. 4 Deformed shape of models

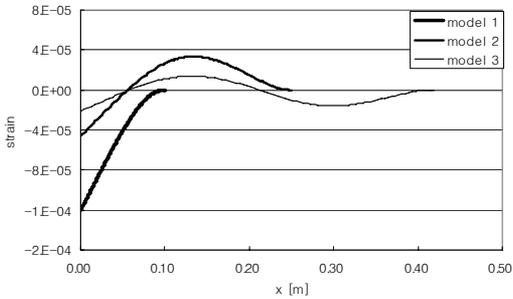


Fig. 5 Strain output of models

#### 4. 결 론

고차 진동모드를 이용한 압전 발전기를 설계하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 외팔보형 압전 발전기는 1차 진동모드의 공진을 활용하는 것이 가장 효율적이다. 2, 3차 모드가 공진하도록 설계한 발전기는 길이가 각각 2.5 또는 4.9배로 늘어나지만, 출력 전력은 오히려 낮은 값을 나타내므로 비효율적이다. 또한 공간, 무게 등도 설계의 중요한 요소이므로 고차 모드를 이용하기에는 제약이 따른다.

둘째, 동일한 크기의 출력전력을 생산하도록 기저 진동의 가진 폭의 크기를 조절하여 이때 발생하는 변형률을 비교하였다. 2, 3차 모드를 사용하면 변형률이 길이방향으로 고르게 분포하며 절대적인 크기도 작으므로 피로수명의 연장이나 내구성능의 향상을 도모할 수 있다.

출력이나 크기의 관점에서는 1차 진동모드의 공진을 이용한 압전 발전기의 설계가 바람직하나, 지속적인 진동에 노출되어 있어 피로수명에 대한 고려도 필요하다. 이를 위하여 고차모드를 이용한 압전 발전기의 설계도 충분한 장점이 있다.

#### 후 기

이 논문은 2009학년도 대구대학교 학술연구비지원에 의한 논문임.

#### 참 고 문 헌

- (1) Anton, S. R. and Sodano, H. A., 2007, A Review of Power Harvesting Using Piezoelectric Materials(2003-2006), Smart Materials and Structures, Vol. 16, pp. R1-R21.
- (2) Wickenheiser, A. M. and Garcia, E, 2010, Power Optimization of Vibration Energy Harvester Utilizing Passive and Active Circuits, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 21, pp. 1343~1361.
- (3) Tang, L. T., Yang, Y. and Soh, C. K., 2010, Toward Broadband Vibration-based Energy Harvesting, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 21, pp. 1867~1897.
- (4) Lee, S. B., et al., 2009, Robust Segment-type Energy Harvester and Its Application to a Wireless Sensor, Smart Mater. Struct., Vol. 18, 0905021.
- (5) Kwak, M. K., Kim, K. Y., Kang, H. Y. and Kim, N. S., 2008, Dynamic Modeling of Piezoelectric Energy Harvesting Device and Experiments, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 6, pp. 632~641.
- (6) Erturk, A. and Inman, D. J., 2008, A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 130, 041002.
- (7) Erturk, A. and Inman, D. J., 2008, On Mechanical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Vibration Energy Harvesters, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 19, pp. 1311~1325.