

비정렬 격자계에서 S.I.P. 최적화 방법을 이용한 점성유동 수치해석

신영섭^{1,†}
한라대학교¹

Numerical Analysis of Viscous Flows on Unstructured Grids Using the Optimal Method of Strongly Implicit Procedure

Youngseop Shin^{1,†}
Halla University¹

Abstract

In this study, numerical analysis of viscous flows is carried out based on the unstructured grid. There exist some difficulties in expressing and computing numerical derivatives on the unstructured grid due to lack of the structured characteristics. The general computer algorithms are developed to perform numerical derivatives easily and extended to be applicable to various geometries composed of hybrid meshes. And the optimal method of strongly implicit procedure is newly contrived to accelerate the rate of convergence in solving the pressure Poisson equation. To verify numerical schemes, the driven cavity problems of 2 and 3 dimension are simulated. The numerical results are compared with others and our numerical schemes are shown to be valid.

Keywords : Unstructured grid(비정렬격자), Driven cavity (공동), S.I.P.(Strongly implicit procedure)

1. 서론

최근 컴퓨터의 발달과 함께 격자 생성 및 유동장 수치해석법에 서도 많은 진전이 이루어져 그동안 계산하기 어려웠던 형상에 대한 점성유동 수치해석이 활발히 이루어지고 있다. 이러한 형상에 대한 점성유동 수치해석기법으로서 다블록 격자 방법(Darbandi & Naderi, 2006; Park, et al., 2003), 비정렬 격자 방법(Jawahar & Kamath, 2000; Shin & Kim, 2004; Kim & Ha, 2002) 또는 중첩 격자 방법(Chan, 2009) 등이 시도되고 있는데, 본 연구에서는 비정렬 격자 방법을 이용한 점성 유동 수치해석을 시도하였다. 비정렬 격자계는 정렬 격자계와 달리 격자 구조의 일관성이 없어 유동장 해석시 수치 미분을 쉽게 표현할 수 없다는 단점을 갖고 있는데, 본 연구에서는 비정렬 격자계에서의 수치미분을 컴퓨터 알고리즘으로 일반화시켜 용이하게 처리할 수 있도록 하였다. 한편 비정상유동에 대한 점성유동해석시 대부분의 계산 시간은 연속방정식을 만족하는 압력 포아송 방정식의 해를 구하는데 소요 되는데 본 연구에서는 기존의 S.I.P.(strongly implicit procedure) 방법을 수렴 속도를 증가시킬 수 있도록 최적화하여 반복 횟수를 최소화할 수 있는 알고리즘을 제시하였고 이를 유동 해석에 적용 하였다. 본 연구에서 제시한 수치기법의 검증을 위하여 2차원 및 3차원 공동 문제에 대하여 수치해석하였고 이를 타 결과와 비교

하였는데 비교적 일치하고 있음을 알 수 있었고 이로부터 본 연구에서 제시한 수치기법이 타당함을 확인할 수 있었다. 한편 다양한 격자로의 확장을 용이하게 하기 위하여 상용코드 Gridgen으로 생성한 격자를 수치해석에 이용하였다.

2. 지배 방정식

비압축성 유동을 가정하면 무차원화된 연속방정식 및 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \nabla^2 w$$

여기서, 속도 (u,v,w)는 특성속도 U로 (x,y,z)는 특성길이 L로, t는 L/U로 p는 ρU^2 으로 무차원화 되었고, R은 UL/v를 의미하며 v

는 유체의 동점성계수를 의미한다.

3. 수치해석법

F,G,H를 대류항과 소산항으로 정의하고,

$$F \equiv -(uu_x + vu_y + wu_z) + \frac{1}{R} \nabla^2 u \quad (3)$$

$$G \equiv -(uv_x + vv_y + wv_z) + \frac{1}{R} \nabla^2 v$$

$$H \equiv -(uw_x + vw_y + ww_z) + \frac{1}{R} \nabla^2 w$$

식 (2)를 시간 간격 Δt 로 이산화하고 시간 단계를 위첨자로 표시하면 다음과 같다.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(F^n - p_x^{n+1}) \quad (4)$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t(G^n - p_y^{n+1})$$

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t(H^n - p_z^{n+1})$$

계산 영역을 N개의 셀(cell)로 격자 분할후 연속방정식 (1)을 각각의 셀에서 적분 형태로 표현하면 다음과 같으며, 각각의 셀을 구성하는 n_f 개의 면(face)에 대한 속도 유출량의 합이 0임을 의미한다. 아래 첨자 i,j는 셀과 면의 인덱스를 의미하며 벡터 n과 ΔS 는 면의 법선벡터와 면적을 의미한다.

$$\sum_{j=1}^{n_f} \overrightarrow{V_{i,j}^{n+1}} \cdot \overrightarrow{n_{i,j}} \Delta S_j = 0, \quad i = 1, N \quad (5)$$

식 (4)를 식 (5)에 대입하면 다음과 같은 이산화 형태의 압력 포아송 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n_f} (p_x^{n+1}, p_y^{n+1}, p_z^{n+1})_{i,j} \cdot (n_x, n_y, n_z)_{i,j} \Delta S_j = \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n_f} (F^n, G^n, H^n)_{i,j} \cdot (n_x, n_y, n_z)_{i,j} \Delta S_j$$

$$+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{n_f} (u^n, v^n, w^n)_{i,j} \cdot (n_x, n_y, n_z)_{i,j} \Delta S_j$$

, $i = 1, N$

식 (6)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같으며 A_{ij} 는 j 셀에서의 압력이 i 셀의 압력에 미치는 영향을 나타내며 B는 식 (6)의 우변 항을 의미한다.

$$A_{ij} p_j^{n+1} = B_i, \quad i = 1, N \quad (7)$$

식 (7)의 대수방정식으로부터 압력을 구하면 식 (4)에서와 같이

시간전진하여 다음 시간 단계에서의 속도를 구할 수 있다. 한편 시간 전진 방법은 Runge Kutta 2차 방법을 이용하였다.

식 (7)에서와 같이 행렬 [A], [B]를 구성하기 위해서는 각 면(face)에서 속도의 1차 및 2차 미분과 압력의 1차 미분이 계산되어야 한다. 비정렬격자계에서는 격자 사이의 규칙성이 없는 관계로 물리량의 차분을 식으로 표현하기가 용이하지 않는데 본 연구에서는 격자 사이의 연결 정보를 이용한 컴퓨터 알고리즘으로 물리량의 차분을 처리하였다.

Fig. 1에는 면을 공유하고 있는 2개의 사면체 셀을 도시하였다. 속도는 셀의 면에 압력은 셀의 중심에 정의된 엇갈리격자계(staggered grid system)를 사용하였다. 면에 정의된 속도로부터 내삽법을 이용하여 셀 중심에서의 속도값을 계산할 수 있으며 절점(node)에서의 속도값은 절점을 포함하는 주변 셀의 값으로부터 내삽법을 이용하여 구할 수 있다. 같은 방법으로 셀 중심에 정의된 압력으로부터 내삽법을 이용하면 면과 절점에서의 압력값을 구할 수 있다.

물리량의 수치미분을 위하여 각 셀의 면에 위치한 국부좌표계와 셀 중심에 위치한 국부좌표계를 Fig. 1과 2에 도시하였다. Fig. 1에는 면에 설정된 국부좌표계를 도시하였는데 실선으로 셀을 도시하였으며 면을 공유하는 인접 셀을 점선으로 도시하였다. 여기서 각 셀의 절점은 ●로 면의 중심은 ○로 셀의 중심은 ■로 도시하였다. ξ 축은 두 셀의 중심점을 연결하는 방향으로 η , ζ 는 면의 절점을 연결하는 방향으로 설정하였다.

Fig. 1에서와 같이 설정된 좌표계로부터 면 중심에서 물리량의 미분은 다음과 같이 표현된다.

$$Q_x = Q_\xi \xi_x + Q_\eta \eta_x + Q_\zeta \zeta_x \quad (8)$$

$$Q_y = Q_\xi \xi_y + Q_\eta \eta_y + Q_\zeta \zeta_y$$

$$Q_z = Q_\xi \xi_z + Q_\eta \eta_z + Q_\zeta \zeta_z$$

Fig. 2에는 셀 중심에 위치한 국부좌표계를 도시하였는데 각 면의 중심점들을 연결하는 방향으로 좌표축을 설정하였다.

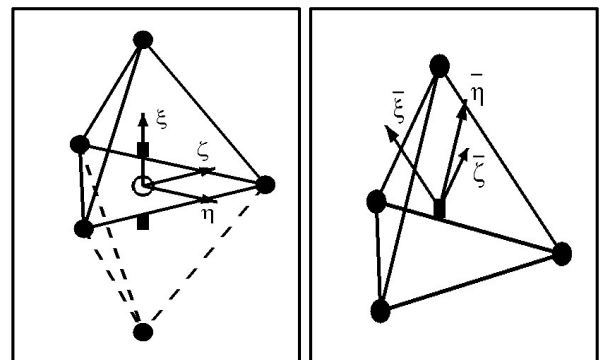


Fig. 1 Local axis system placed at the face Fig. 2 Local axis system placed at the center of cell

Fig.2에서와 같은 국부좌표계를 이용하면 셀 중심에서 물리량의 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Q_x &= Q_{\xi} \bar{\xi}_x + Q_{\eta} \bar{\eta}_x + Q_{\zeta} \bar{\zeta}_x \\
 Q_y &= Q_{\xi} \bar{\xi}_y + Q_{\eta} \bar{\eta}_y + Q_{\zeta} \bar{\zeta}_y \\
 Q_z &= Q_{\xi} \bar{\xi}_z + Q_{\eta} \bar{\eta}_z + Q_{\zeta} \bar{\zeta}_z
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

식 (8),(9)에서와 같이 물리량의 일차 미분은 면의 중심점과 셀의 중심점에서 계산되며, 면 중심에서 물리량의 이차미분은 셀 중심에서의 1차 미분값을 차분하여 구하게 된다. 인접한 셀의 면에 정의된 물리량으로 이차미분이 이루어지도록 하여 중심차분이 중복되지 않도록 함으로써 이차 차분시 발생할 수 있는 지그재그 현상을 방지하도록 하였다. 한편 대류항 계산시 상류 차분은 속도 방향을 고려한 면에서의 미분값과 셀 중심에서의 미분값을 이용하여 처리하였다.

식 (7)에 표현된 A_{ij} 는 j 셀에서의 압력이 i 셀에 주는 영향을 의미하므로 j 셀에서의 압력을 1, 주변 셀에서의 압력을 0으로 대입한 후 식 (6)의 좌변을 계산함으로써 구할 수 있다. 식 (7)에 표현된 대수방정식의 해법으로는 S.O.R.(successive over relaxation), C.G.M.(conjugate gradient method) 또는 S.I.P.(strongly implicit procedure)와 같은 반복법(iterative method)과 가우스 소거법과 같은 직접법(direct inversion method)을 이용하여 해를 구할 수 있는데 본 연구에서는 4 절에서 소개할 S.I.P. 최적화 방법을 이용하여 해를 구함으로써 비정상 유동인 경우에도 매 시간 단계에서 수치적 정밀도를 유지하면서 계산 시간을 단축할 수 있도록 하였다. 한편 행렬 [A]가 최적화된 행렬(narrow banded matrix)이 되도록 하기 위하여 상용 프로그램 Gridgen을 이용하여 격자를 생성한 후 생성된 격자는 Fig. 3과 같이 셀의 인덱스를 재배치함으로써 최적화된 행렬이 구성되도록 하였다.

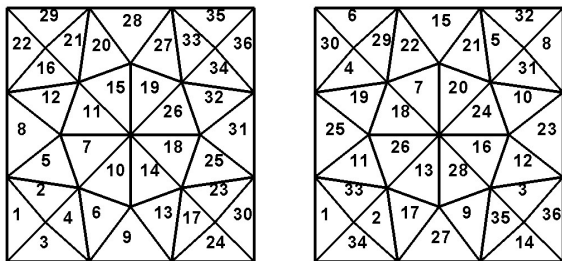


Fig. 3 Renumbering of cell index for banded matrix

4. S.I.P. 최적화 방법

S.I.P. 방법은 타원형 미분방정식의 해를 반복법으로 구하는 경우 반복 횟수 및 연산 횟수를 최소화시키기 위한 방법으로 시도되었다(Stone, 1968). 식 (7)에 표현된 입력 방정식

$[A][p]=[B]$ 의 해를 구하기 위하여 양변에 행렬 [C]를 더하면 $[A+C][p]=[B]+[C][p]$ 로 변형할 수 있는데 [C]는 $[A+C]=[L][U]$ 로 변화시킬 수 있는 행렬을 이용하였다. 여기서 [L], [U]는 각각 L.T.M.(lower triangular matrix)과 U.T.M.(upper triangular matrix)을 의미한다. 이러한 S.I.P. 방법에서는 미지수가 전체적으로 연결된 연립방정식을 풀게 되며 아울러 [L], [U]가 성긴 행렬(sparse matrix)이 될 수 있는 행렬 [C]를 이용함으로써 반복법 계산시 각 반복 단계에서 연산 횟수가 최소화되도록 하였다. S.O.R. 방법을 이용하여 타원형 미분방정식의 해를 구하는 경우 수렴 속도가 매우 느리다는 것을 극복하기 위하여 미지수가 전체적으로 포함된 연립방정식(implicit method)을 처리한다는 것과 [L], [U]가 성긴 행렬이 되도록 하여 연산 횟수를 최소화한 것은 매우 의미있는 시도로 생각되나 반복법시 사용되는 [L], [U]가 빠른 수렴도로 반복 횟수를 최소화시키는 최적화된 행렬이라는 면에서는 불충분한 방법이며 결과적으로 L.S.O.R.(successive over relaxation by line)의 변형 형태인 A.D.I.(alternating direction implicit scheme)에 비해 50~60%의 계산 시간 단축이 이루어진다는 결과가 알려져 있다(Anderson, et al., 1984).

본 연구에서는 S.I.P.에서와 같이 미지수를 전체적으로 포함하는 연립방정식(implicit method)을 이용하면서 수렴 속도를 증가시킬 수 있는 최적화된 행렬 생성 방법을 제시하고자 하였다.

식 (7)의 압력 포아송 방정식을 Fig. 4에 도시한 16개의 셀로 구성된 격자에 대하여 적용하면 행렬 [A]는 Fig. 5와 같이 구성되는데 16개의 미지수로 이루어진 16개의 연립방정식이며 *는 0이 아닌 원소 A_{ij} 를 의미한다.

15	5	8	16
4	1	2	6
10	3	7	12
14	9	11	13

Fig. 4 Example of 4x4 structured mesh

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	*	*	*	*	*											
2	*	*				*	*	*								
3	*	*	*				*		*	*						
4	*			*						*					*	
5	*				*			*							*	
6		*				*					*					*
7		*	*				*				*	*				
8		*			*			*								*
9			*						*	*				*		
10			*	*						*				*		
11						*		*		*	*		*			
12						*	*				*	*	*			
13										*	*	*	*			
14									*	*				*		
15			*	*											*	
16					*	*		*								*

Fig. 5 Nonzero elements of matrix [A]

Gauss 소거법을 이용하여 방정식의 해를 구하는 과정을 살펴 보면 첫번째 미지수를 제거하기 위해서는 첫 번째 미지수를 포함하고 있는 모든 행에 대하여 첫번째 방정식의 0이 아닌 원소값에 일정값을 곱한 후 각 행의 원소값에서 차감하는 연산이 이루어지게 되는데 이러한 연산후 변화된 행렬을 Fig. 6에 도시하였다. 이 과정에서 연산 횟수는 $C_1 \cdot R_1$ 의 연산을 수행하게 되는데 C_1, R_1 은 첫번째 방정식의 0이 아닌 원소의 갯수와 첫번째 미지수를 포함하고 있는 행의 갯수를 의미한다. 아울러 Fig. 6에서와 같이 변형된 행렬은 첫번째 미지수가 제거되면서 2번째 방정식부터 5번째 방정식 사이에는 0이 아닌 새로운 원소가 추가됨을 알 수 있다. 2번째 미지수를 소거하기 위하여 위의 과정을 반복하게 되는데 Fig. 6에서와 같이 2번째 방정식에 0이 아닌 원소 수가 보다 증가된 것을 알 수 있고 아울러 2번째 미지수를 포함하는 행의 수 역시 증가된 것을 알 수 있어 2번째 미지수를 소거하기 위한 연산횟수 $C_2 \cdot R_2$ 는 $C_1 \cdot R_1$ 에 비해 증가되었음을 알 수 있다. 전체 미지수의 개수를 N 이라고 하면 미지수 전체를 소거하기 위한 연산 횟수 E 는 다음과 같다.

$$E = \sum_{i=1}^N C_i \cdot R_i = N \cdot C_m \cdot R_m \quad (10)$$

여기서 C_m, R_m 은 C_1, R_1 의 평균값을 의미한다. 일반적인 경우 Gauss 소거법에 의한 LU 분해시 연산 횟수는 $O(N^3)$ 이며 성긴 행렬인 경우에는 식 (10)에서와 같이 행렬의 밴드폭에 비례하는 연산 횟수를 수행하게 된다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	*	*	*	*	*											
2		*	*	*	*	*	*	*								
3		*	*	*	*		*		*	*						
4		*	*	*	*					*					*	
5		*	*	*	*				*						*	
6		*				*					*					*
7		*	*				*				*	*				
8		*			*			*								*
9			*						*		*			*		
10			*	*						*		*		*		
11							*		*	*	*	*	*			
12						*	*				*	*	*			
13									*	*	*	*	*			
14									*	*			*	*		
15				*	*									*	*	
16					*	*		*							*	*

Fig. 6 Procedure of elimination of unknowns

식 (10)에 표현된 연산 횟수를 감소시키기 위해서는 미지수 소거 단계에서 C_i, R_i 의 갯수를 감소시켜야 하는데 본 연구에서는 미지수 소거 단계에서 행에 추가되는 원소 값이 행렬의 대각항에 비해 작은 값 즉 영향력이 작은 경우에는 그 값을 우변으로 이항함으로써 C_i, R_i 의 수를 최소화하는 방법을 시도하였다. 즉 미지수를 전체적으로 포함하면서 영향력이 큰 미지수로 구성된 연립 방정식을 구성함으로써 수렴 속도를 증가시켜 반복 횟수를 최소화하고자 하였으며 아울러 각 반복 단계에서의 연산 횟수 C_i, R_i 의 값을 최소화하고자 하였다. 이 경우 미지수 전체를 소거하기

위한 연산 횟수 F 는 다음과 같다.

$$F = \sum_{i=1}^N I_i \cdot J_i = N \cdot I_m \cdot J_m \quad (11)$$

여기서 I_m, J_m 은 I_i, J_i 의 평균값을 의미하는데 I_i, J_i 는 최대 허용 영향력 값에 따라 결정되는 i 번째 방정식에서의 0이 아닌 원소의 갯수와 i 번째 미지수를 포함하는 행의 갯수를 의미한다.

한편 식 (11)에 표현된 연산 횟수는 초기 LU 분해시의 연산 횟수이며 반복단계에서는 LU분해법에 따른 $O(N)$ 의 연산을 수행하므로 영향력에 따라 결정되는 최소화된 I_m, J_m 의 값은 전체 연산 횟수에 큰 영향을 주지 않는다.

이러한 과정을 통하여 본 연구에서는 미지수를 전체적으로 포함하면서 영향력이 큰 미지수로 구성된 연립방정식 즉 최적 행렬을 구성함으로써 수렴 속도를 증가시켜 반복 횟수를 최소화하고자 하였으며 아울러 영향력에 따라 결정되는 최소화된 I_m, J_m 을 이용함으로써 초기 LU 분해시에도 연산 횟수를 최소화하고자 하였다.

본 연구에서 제시한 S.I.P. 최적화 방법의 효율성을 검증하기 위하여 해석해를 알고 있는 경우에 대하여 수치해석하였다.

$$\nabla^2 p = R, \quad -1 < x, y < 1 \quad (12)$$

$$R = -2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

Table 1, 2에는 S.I.P. 최적화 방법 및 S.O.R.을 이용하여 수치해석시 격자수 증가에 따른 반복 횟수를 나타내었다. S.O.R.의 경우 격자수 증가에 따라 최적의 완화계수(relaxation parameter) 이용시 격자수의 제곱근에 비례하는 정도로 반복 횟수가 증가하는 것으로 알려져 있다(Fletcher, 1991). S.I.P. 최적화 방법에서도 격자수 증가에 따라 격자수의 제곱근에 비례하는 정도로 반복 횟수가 증가하는 것을 알 수 있으나 Table 1, 2에서와 같이 S.O.R.에 비해 매우 작은 반복 횟수로 수렴해를 계산하고 있음을 알 수 있다.

Table 1 Iteration numbers in case of Optimal S.I.P.

mesh size	iteration number	ϵ	ϵ_p	허용 영향력	$I_m * J_m$
16 x 16	2	0.039	0.087	0.0100	5* 9
32 x 32	5	0.028	0.045	0.0100	5*10
64 x 64	12	0.043	0.058	0.0060	6*11
128 x 128	29	0.045	0.046	0.0030	7*14

$$p = \cos(\pi x) \cos(\pi y), \quad \epsilon = |\nabla^2 p - R| / R_{max}$$

$$\epsilon_p = |p - \cos(\pi x) \cos(\pi y)|$$

Table 2 Iteration numbers in case of S.O.R.

mesh size	iteration number	ϵ	ϵ_p	완화계수 ω
16 x 16	16	0.042	0.089	1.20
32 x 32	40	0.046	0.024	1.70
64 x 64	130	0.026	0.005	1.95
128 x 128	216	0.049	0.003	1.95

Table 3에는 ϵ 값에 따른 반복 횟수를 나타내었는데 ϵ 값의 감소에 따라 반복 횟수가 크게 증가하지 않으면서 해석해에 접근하고 있음을 알 수 있다.

Table 3 Iteration numbers in case of Optimal S.I.P.

mesh size	iteration number	ϵ	ϵ_p	허용 영향력	$I_m * J_m$
128 x 128	29	0.045	0.046	0.0030	7*14
128 x 128	35	0.022	0.026	0.0030	7*14
128 x 128	41	0.012	0.015	0.0030	7*14
128 x 128	49	0.005	0.008	0.0030	7*14

이상의 비교 결과 본 연구에서 수행한 S.I.P. 최적화 방법이 반복 횟수를 최소화시키는 최적 행렬을 구성한 것으로 판단되며 아울러 영향력에 따라 결정되는 최소화된 I_m, J_m 을 이용함으로써 최소화된 연산 횟수로 초기 LU 분해할 수 있음을 알 수 있다.

5. 계산 결과

본 연구에서 제시한 수치기법의 검증을 위하여 2차원 및 3차원 공동 문제에 대하여 수치해석하였고 결과에 대한 타당성을 검토하였다.

이차원 공동 문제인 경우 Fig. 7에 비정렬격자로 구성된 영역과 경계조건을 도시하였다. 상용코드 Gridgen을 이용하여 격자를 생성하였는데 한 번의 길이를 16등분한 경우이며 914개의 격자로 영역을 구성하였다. 상용코드로 작성된 격자로부터 식 (7)의 행렬 [A]가 최적화된 행렬이 구성 되도록 셀의 인덱스가 재배치되며 아울러 절점, 면 및 셀 사이의 연결 정보를 사전에 계산하여 유동 수치해석시 이용되도록 하였다.

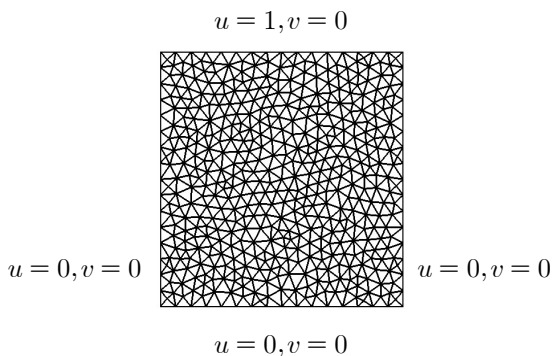
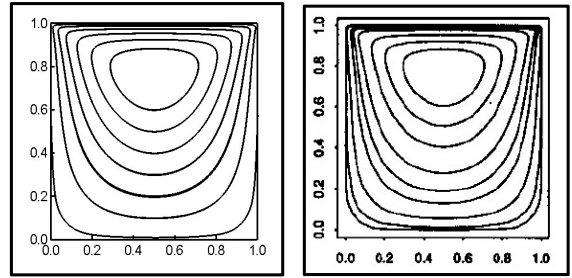
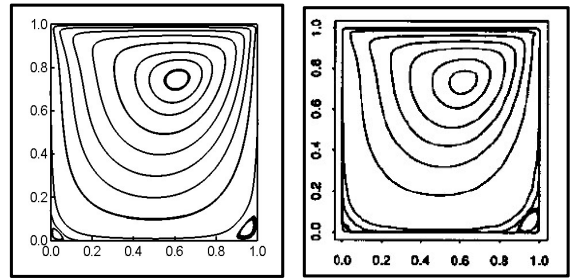


Fig. 7 Geometry and boundary conditions of driven cavity

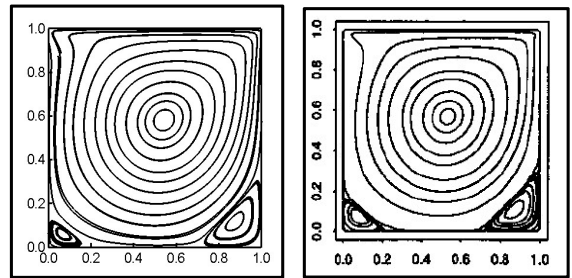
유동해석 단계에서는 한 번의 길이를 64등분하여 보다 조밀한 격자로 구성하였으며 Fig. 8에서 Fig. 11에 레이놀드수가 1부터 5000까지 단계적으로 증가시켜 유동을 수치해석하였고 유선 결과를 타 결과(Li & Tang, 1995)와 함께 도시하였는데 Fig. 8에서 Fig. 11에서와 같이 유선 및 유동 중심의 위치가 전반적으로 일치하고 있음을 알 수 있다.



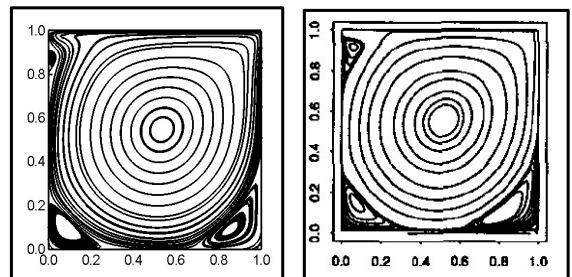
(a) Present result (b) Result of Li M. & Tang T.
Fig. 8 Stream lines for R=1



(a) Present result (b) Result of Li M. & Tang T.
Fig. 9 Stream lines for R=100



(a) Present result (b) Result of Li M. & Tang T.
Fig. 10 Stream lines for R=1000



(a) Present result (b) Result of Li M. & Tang T.
Fig. 11 Stream lines for R=5000

한편 Fig. 12에는 R=1000인 경우 시간 전진에 따라 각 시간 단계에서의 반복 횟수와 정상 유동으로의 접근 과정을 도시하였

는데 Fig. 12에서와 같이 초기 유동 단계 이후로는 반복 횟수가 1로 접근하며 시간 단계 n과 시간 단계 n+1에서의 속도 차이도 시간 전진에 따라 0으로 접근하는 것을 알 수 있다.

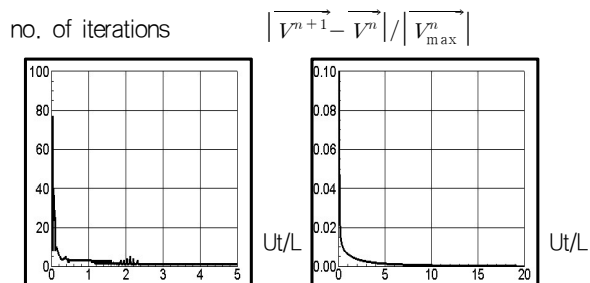


Fig. 12 Number of iterations and estimation of flow steadiness at R=1000

본 수치해석기법의 3차원으로의 확장 가능성을 검토하기 위하여 3차원 공동 문제에 대한 유동을 수치해석하였고 결과를 비교하여 보았다. Fig. 13에는 각 변의 길이를 16등분한 길이 1의 정육면체 영역을 비정렬 격자로 구성되어 도시하였다. 레이놀드수가 100인 경우이며 평면 z=1에서 속도 u=1로 경계조건을 부여한 경우이다.

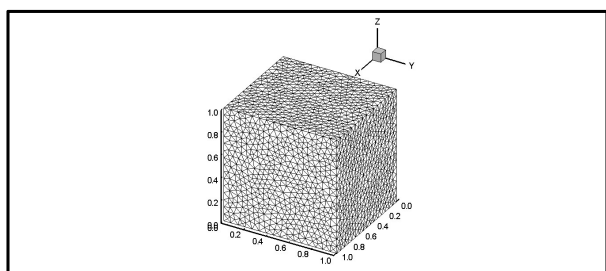


Fig. 13 Geometry and mesh distribution for 3 dimensional driven cavity

Fig. 14에는 시간 전진에 따라 각 시간 단계에서의 반복 횟수와 정상 유동으로의 접근 과정을 도시하였는데 2차원 공동 문제에서와 같이 초기 유동 단계 이후로는 반복 횟수가 1로 접근하며 시간 단계 n과 시간 단계 n+1에서의 속도 차이도 시간 전진에 따라 0으로 접근하는 것을 알 수 있다.

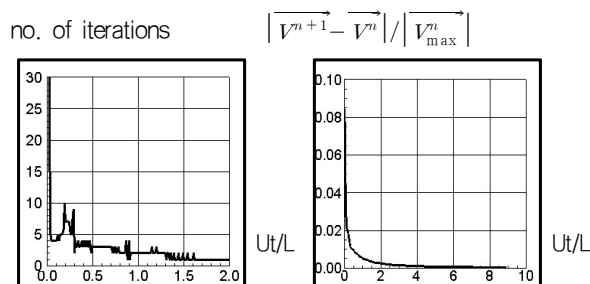
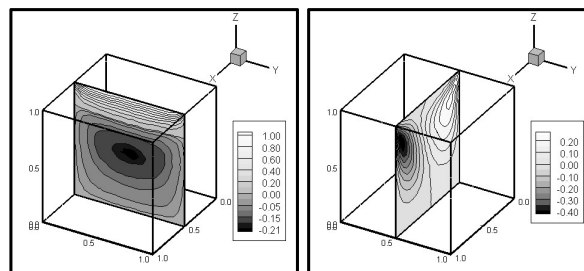


Fig. 14 Number of iterations and estimation of flow steadiness at R=100

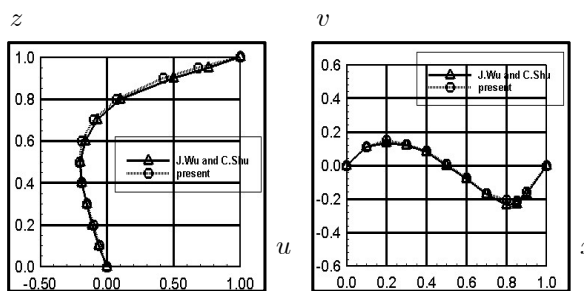
Fig. 15 (a)에는 x=0.5에 위치한 yz 평면에서 속도 u의 크기를

도시하였고 (b)에는 y=0.5에 위치한 xz 평면에서 속도 v의 크기를 도시하였으며 Fig. 16에는 각각의 평면의 중심선에서의 속도를 타 결과(Wu & Shu, 2010)와 비교하여 도시하였다. Fig. 16에서와 같이 두 결과가 비교적 일치하는 것을 확인할 수 있었고 본 연구에서 제시한 수치해석 기법이 3차원으로 확장 가능함을 확인할 수 있었다.



(a) Contours of u velocity (b) Contours of v velocity

Fig. 15 Contours of velocity



(a) u velocity along vertical centerline (b) v velocity along horizontal centerline

Fig. 16 Comparison of results

5. 결론

2차원 및 3차원 공동 문제에 대한 수치해석 및 비교 결과 본 연구에서 제시한 비정렬격자기반 S.I.P. 최적화 기법이 비교적 타당한 결과를 주고 있음을 알 수 있었다. 아울러 4절에서와 같이 본 연구에서 수행한 S.I.P. 최적화 방법이 반복 횟수를 최소화시키는 최적 행렬을 구성한 것으로 판단되며 영향력에 따라 결정되는 최소화된 I_m, J_m 을 이용함으로써 최소화된 연산 횟수로 초기 LU 분해할 수 있음을 알 수 있었다. 한편 격자 생성은 상용코드 Gridgen으로 생성한 격자를 이용할 수 있도록 하였고 격자는 사면체, 오면체 및 육면체를 처리할 수 있도록 확장되어 임의의 형상에 대한 유동을 처리할 수 있도록 프로그램을 개발하였다. 앞으로 오차를 최소화하는 반복법인 C.G.M.(conjugate gradient method)과 S.I.P. 최적화 방법에 대한 비교 연구가 진행되어야 할 것으로 판단되며 다양한 형상의 유동해석 및 결과 분석을 통하여 수치기법의 정밀도를 향상시키는 연구가 지속되어야 할 것으로 판단된다. 한편 본 연구에서 제시한 알고리즘을 이용한 물리량 차분 방식 및 S.I.P. 최적화 방법은 Simple과 같은 음해법 기반 수치해석에도 적용할 수 있으므로 이에 대한 추가 연구도 필요할 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 상용프로그램 Flow3d 국내대행사인 (주)에스티아이 C&D의 지원하에 수행되었음.

참 고 문 헌

- Anderson, D.A. Tannehill, J.C. & Pletcher, R.H., 1984. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, pp.138.
- Chan, W.M., 2009. Overset Grid Technology Development at NASA Ames Research Center. *Journal of Computers & Fluids*, 38(3), pp.496–503.
- Darbandi, M. & Naderi, A., 2006. Multiblock Hybrid Grid Finite Volume Method to Solve Flow in Irregular Geometries. *Journal of Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 196(1), pp.321–336.
- Fletcher, C.A.J., 1991. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, pp.198.
- Jawahar, P. & Kamath, H., 2000. A High-Resolution Procedure for Euler and Navier–Stokes Computations on Unstructured Grids. *Journal of Computational Physics*, 164(1), pp.165–203.
- Kim, M.C. & Ha, D.D., 2002. Simulation for the Propulsion of Micro-Hydro-Machine with Unstructured Grid. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 39(3), pp.1–7.
- Li, M. & Tang, T., 1995. A Compact Fourth-Order Finite Difference Scheme for the Steady Incompressible Navier–Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(10), pp.1137–1151.
- Park, J.C., Jeon, H.H. & Song, G.J., 2003. Numerical Simulation of Body Motion Using a Composite Grid System. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 40(5), pp.36–42.
- Shin, S.M. & Kim, D.H., 2004. Internal Wave Computations based on a Discontinuity in Dynamic Pressure. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 41(4), pp.17–29.
- Stone, H.L., 1968. Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5, pp.530–558.
- Wu, J. & Shu, C., 2010. An improved immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating three-dimensional incompressible flows. *Journal of Computational Phys.*, 229(13), pp.5022–5042.



신 영 섭