한국음향학회지 제31권 제1호 pp. 11~18 (2012)
The Journal of the Acoustical Society of Korea Vol.31, No.1 (2012)

반복 주름을 갖는 이차원 덕트의 음파차단 해석

An Analysis of the Sound Stopband in Periodically Corrugated 2-D Ducts

김현실 · 김재승 · 김봉기 · 김상렬 · 이성현

(Hyun-Sil Kim, Jae-Seung Kim, Bong-Ki Kim, Sang-Ryul Kim, and Seong-Hyun Lee)

한국기계연구원 음향소음팀

(접수일자: 2011년 10월 15일; 수정일자: 2011년 12월 27일; 채택일자: 2012년 1월 6일)

초 록: 본 논문은 경계가 주기적으로 변하는 주름관에 음파가 전파할 때 발생하는 차단주파수밴드 (stopband)를 이론 및 BEM으로 해석한 내용을 다루었다. 2-D 덕트를 고려하였으며 경계가 길이방향의 사인함수로 변하는 주름관에서 주름의 크기가 덕트 높이에 비해 충분히 작은 경우 다중 스케일 섭동법 (Multiple Scaling Perturbation Method)을 이용하여 해를 구하였다. 주파수가 복소수가 되는 조건에서 Bragg 공진과 Non-Bragg 공진에서 발생하는 차단주파수밴드의 형성조건을 구하였다. 2-D BEM 해석을 수행하여 주름관의 삽입손실 (Insertion Loss)을 계산하였으며 이론적으로 예측한 차단주파수밴드의 존재를 확인하였다.

핵심용어: 주름관, 2-D 덕트, 다중스케일 섭동법, Bragg의 공진주파수, 삽입손실
투고분야: 소음 및 공력음향분야 (10.3)

ABSTRACT: In this paper, the occurrence of a stopband phenomenon when an acoustic wave propagates through periodically corrugated ducts is discussed using theoretical and BEM analyses. A 2-D duct with sinusoidally corrugated upper and lower walls is considered. When the magnitude of the sinusoidal corrugation is sufficiently small compared to the duct's height, the wave equation is solved with the multiple scaling perturbation method. Then stopbands for Bragg and non-Bragg resonances are computed from the condition where frequency becomes a complex number. A 2-D BEM analysis is performed to compute insertion loss of the duct, and stopbands are confirmed as predicted by analytical analysis.

Key words: Corrugated duct, 2-D duct, Multiple scaling Perturbation method, Bragg's resonance frequency, Insertion loss
ASK subject classification: Noise and Aeroacoustics (10.3)

I. 서 론

격자형 형상이나 물성치가 주기적으로 변하는 구조물내를 지나는 파동은 공학적으로 많은 응용분야를 가지고 있으며 오래전부터 관심의 대상[1]이었다. 특히 경계가 주기적으로 변하는 주름관 (Corrugated Duct)을 지나는 파동에 대해서 많은 연구가 이루어졌다[2-12]. 주름의 크기가 덕트 단면 크기에 비해 충분히 작은 경우 섭동법 (Perturbation Method)을 이용한 연구가 수행되었다[2-5]. 단순섭동법을 사용하면 공진주파수에서 해가 무한대가 되는 현상이 발생하는데[2], 이는 단순섭동법을 적용하는데서 오는 해석상의 오류일뿐 물리적으로는 발생하지 않는다. Nayfeh[2], Asfar와 Nayfeh[3]. Hawwa와 Asfar[4]는 2-D 덕트에 대해, Nayfeh와 Kandil[5]은 원통형 덕트에 대해 다중 스케일 섭동법 (Multiple Scaling Perturbation Method)을 이용하여 안정적인 해 (Uniform Solution)를 얻었다. 파장과 주기가 일정한 관계식을 만족하면 에너지가 전파하지 못하는 차단주파수 (Stopband)가 존재하는데 Nayfeh와 Kandil[5]은 파수 (Wavenumber)가 복소수

***Corresponding author:** 김현실 (hskim@kimm.re.kr)
305-343 대전광역시 유성구 장동 171 시스템다이나믹스 연구실
(전화: 042-868-7461; 팩스: 042-868-7440)

가 되는 조건이 존재하며 이로부터 차단주파수밴드를 구할 수 있음을 보였다. Pogrebnyak [6]은 음속/(2 x 주기)로 주어지는 Bragg의 공진주파수 외에 Non-Bragg 공진주파수에서도 차단주파수밴드가 존재함을 지적하였는데 파동방정식에서 얻어지는 특성식 (Characteristic Equation)을 연속근사법 (Successive Approximation)으로 전개하여 차단밴드폭과 중심주파수를 구하였다. 주름의 크기가 덕트 직경에 비해 충분히 작지 않아 섭동법을 사용할 수 없는 경우에는 경계를 따라 여러 점을 선택하여 경계조건을 만족하는 행렬식을 구성하여 수치적인 방법으로 차단주파수를 구하여야 한다 [7-12]. Sandström [7]과 Boström [8]은 각각 2-D 덕트와 원통형 덕트에 대해 적분식에 근거한 Null-field 방법을 이용하여 주파수와 주름관 크기의 변화에 대해 차단주파수밴드를 그래프로 제시하였다. Tao 등 [9-12]은 Pogrebnyak [6]의 방법을 확장하여 원통형 주름관의 Non-Bragg 공진주파수에서 발생하는 음파의 감쇠에 대해 차단밴드를 해석하였다. 또한 Tao 등 [11,12]은 FEM을 사용하여 계산한 덕트의 삽입손실 (Insertion Loss) 스펙트럼에서 차단밴드의 존재를 예측결과와 비교하였는데 주름의 크기가 커지면 차단주파수의 밴드폭과 음파의 감쇠폭도 커짐을 보였다.

본 논문에서는 2차원 덕트의 경계가 길이방향의 사인함수 (Sinusoidal Function)로 변하는 주름관에 대해 음파의 차단현상을 해석하였다. 유동이 있는 덕트의 경우 주름관 단면변화가 크면 유체소음이 발생하여 소음이 커지는 부작용이 있으므로 본 연구에서는 섭동법을 적용할 수 있을 정도로 단면변화가 작은 경우를 고려하였다. 안정적인 해를 구하기 위해 다중 스케일 섭동법을 이용하였다. 주파수가 복소수가 되는 조건에서 차단밴드의 존재조건을 Bragg 주파수 및 Non-Bragg 주파수에 대해 유도하였으며 Tao 등 [9-12]이 전혀 다른 개념을 사용하여 얻은 차단주파수밴드 예측결과와 비교하였다. 또한 2-D BEM 해석을 수행하여 덕트의 삽입손실을 구하였으며 얻어진 차단밴드를 섭동법에서 예측한 밴드와 비교하였다.

II. 섭동법을 이용한 차단밴드해석

그림 1과 같이 x축은 길이방향, z축은 높이방향이며 평균높이가 h인 이차원 덕트를 고려한다. 음파의 전파방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k^2\phi=0 \tag{1}$$

여기서 k는 파수 (wavenumber)이다. 하변과 상변이 각각 다음 식과 같이 위상차를 갖고 사인함수로 변하는 경계조건을 고려한다.

$$\begin{aligned} z&=\epsilon h\sin(k_w x): && \text{lower boundary}\\ z&=h\{1+\epsilon\sin(k_w x+\theta)\}: && \text{upper boundary}\end{aligned} \tag{2}$$

경계면에서 강체조건 $\partial\phi/\partial n=0$을 가정하면 하변 $z=0$와 상변 $z=h$에서 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$k_w\epsilon h\cos(k_w x)\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \tag{3}$$

$$k_w\epsilon h\cos(k_w x+\theta)\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \tag{4}$$

만일 주름관의 변화폭이 덕트 높이에 비해 충분히 작다면 단순섭동법 (Straightforward Perturbation Method)을 이용하여 해를 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\phi=\phi_0+\epsilon\phi_1+\cdots \tag{5}$$

하변 $z=0$의 경계조건 (3)을 ϵ의 파워로 전개한다.

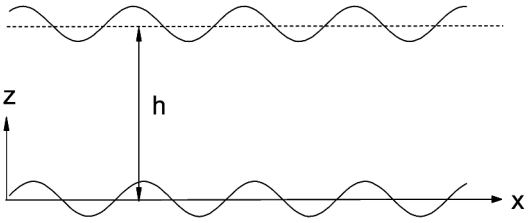

그림 1. 경계가 사인함수로 변하는 2-D 덕트
Fig. 1. 2-D duct with sinusoidally varying boundaries.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}=\frac{\partial \phi_0}{\partial z}+\epsilon\frac{\partial \phi_1}{\partial z}+\epsilon h\sin(k_w x)\frac{\partial \phi_0}{\partial z^2}+\cdots$$
$$=\epsilon k_w h\cos(k_w x)\frac{\partial \phi_0}{\partial x}+\cdots \quad (6)$$

상변 $z=h$에서의 경계조건 (4)도 식 (6)과 유사한 방법으로 전개할 수 있다. ϵ^0 항을 모으면 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}+k^2\phi_0=0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial z}=0 \quad \text{at} \quad z=0,\ h \quad (8)$$

경계조건 (8)을 만족하는 식 (7)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_0=\sum_n A_n\cos(\beta_n z)e^{ik_n x} \quad (9)$$

단, $\beta_n=\pi n/h,\ k_n^2=k^2-\beta_n^2$

ϵ^1 항의 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+k^2\phi_1=0 \quad (10)$$

At $z=0$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z}=-h\sin(k_w x)\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}+k_w h\cos(k_w x)\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \quad (11)$$

$z=h$에서의 경계조건도 식 (11)과 유사하게 주어진다. 식 (10)의 해를 다음과 같이 가정한다 [2].

$$\phi_1=B_1(z)e^{i(k_n+k_w)x}+B_2(z)e^{i(k_n-k_w)x} \quad (12)$$

여기서 $B_1(z),\ B_2(z)$는 다음 식을 만족한다.

$$B_i''(z)+\alpha_i^2 B_i(z)=0,\ i=1,2 \quad (13)$$

단, $\alpha_1^2=k^2-(k_n+k_w)^2,\ \alpha_2^2=k^2-(k_n-k_w)^2$

$B_i(z)$는 $\cos(\alpha_i z),\ \sin(\alpha_i z)$의 조합으로 주어지며 경계조건을 만족하도록 계수를 구하면 다음 항을 포함하고 있음을 알 수 있다.

$$\frac{1}{\alpha_i\sin(\alpha_i h)} \quad (14)$$

따라서 분모가 제로가 되는 공진조건 (resonance condition), $\alpha_i h=m\pi\,(m=0,1,2,\cdots)$이 존재한다 [2]. 이를 다시 쓰면 다음과 같은 두 가지 조건이 된다.

$$k_m+k_n=k_w \quad (15a)$$

$$k_m-k_n=k_w \quad (15b)$$

여기서 $k_m^2=k^2-(m\pi/h)^2$. 식 (15a)는 모드 m과 n이 서로 반대방향으로, 식 (15b)는 같은 방향으로 진행하는 것을 나타낸다.

식 (12)의 해는 식 (15)의 공진조건에서 무한대가 되는데 이는 단순 섭동법을 사용하는데서 발생하는 해석상의 오류일 뿐 물리적으로 발생하는 현상은 아니다. 발산하지 않는 해 (uniform solution)를 얻기 위해 본 논문에서는 다중 스케일 섭동법 (Multiple Scaling Perturbation Method)를 사용하여 다음과 같이 해를 전개한다 [2-5].

$$\phi=\phi_0(x_0,x_1,z)+\epsilon\phi_1(x_0,x_1,z)+\cdots \quad (16)$$

여기서 $x_0=x$는 음파의 전파와 관련된 파수를 나타내는 빠른 스케일 (fast scale)이고, $x_1=\epsilon x$는 공진에 의한 파동의 진폭과 위상 모듈레이션을 나타내는 느린 스케일 (slow scale)을 나타낸다 [2]. x에 대한 미분항은 다음과 같이 전개된다.

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_0}+\epsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots \quad (17a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+2\epsilon\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial x_1}+\cdots \quad (17b)$$

ϵ^0 항을 모으면 지배방정식과 경계조건은 단순섭동법의 경우인 식 (7), (8)과 같다. ϵ^1 항의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+k^2\phi_1=-2\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_0\partial x_1} \tag{18}$$

경계조건은 식 (11)에서 $x=x_0$를 대입한 경우와 같다. ϵ^0의 해 ϕ_0를 다음과 같이 가정하는데 식 (9)와는 달리 A_n은 x_1의 함수이다.

$$\phi_0=\sum_n A_n(x_1)\cos(\beta_n z)e^{ik_n x_0} \tag{19}$$

식 (19)를 식 (18)에 대입하면 우변 항은 다음과 같이 된다.

$$-2\sum_n ik_n A_n'(x_1)\cos(\beta_n z)e^{ik_n x_0} \tag{20}$$

식 (18)의 해 (Particular Solution)를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_1=\sum_n \Phi_n(x_1,z)e^{ik_n x_0} \tag{21}$$

식 (19)와(21)을 식 (18)에 대입하고 양변에 $\cos(\beta_m z)$를 곱하고 $(0,h)$에 대해 적분한 후 정리하면 다음과 같이 된다 [2].

$$\cos(n\pi)\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}\bigg|_{z=h}-\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-ik_n hA_n' \tag{22}$$

k_m과 k_n이 식 (15)를 만족하는 경우에 유한한 해를 얻기 위해서 먼저 두 파의 방향이 반대가 되는 식 (15a)의 경우를 고려한다.

$$k_m+k_n=k_w+\epsilon\delta \tag{23}$$

여기서 δ는 튜닝계수이며 (k_m,k_n)과 k_w의 다음 4가지 조합이 발생한다.

$$k_m+k_w=2k_m+k_n-\epsilon\delta \tag{24a}$$

$$k_m-k_w=-k_n+\epsilon\delta \tag{24b}$$

$$k_n-k_w=-k_m+\epsilon\delta \tag{24c}$$

$$k_n+k_w=2k_n+k_m-\epsilon\delta \tag{24d}$$

식 (21)의 ϕ_1에서 공진과 관련된 모드 k_m과 k_n만 고려하고 해가 발산하지 않는 다른 모드는 생략한다.

$$\begin{aligned}\phi_1(x_0,x_1,r)&=\Phi_m^+(x_1,z)e^{ik_m x_0}+\Phi_m^-(x_1,z)e^{-ik_m x_0}\\&+\Phi_n^+(x_1,z)e^{ik_n x_0}+\Phi_n^-(x_1,z)e^{-ik_n x_0}\end{aligned} \tag{25}$$

식 (25)에서 $\Phi_m^\pm$는 각각 $\pm x_0$ 방향으로 전파하는 파를 나타낸다. 식 (25)를 경계조건에 대입하고 정리한 후 $e^{\pm ik_m x_0}$, $e^{\pm ik_n x_0}$의 계수를 모으고 식 (22)를 이용하면 계수 $A_m^\pm$, $A_n^\pm$에 대한 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases}A_m^{+\prime}=C_{mn}A_n^- e^{-i\delta x_1}\\A_n^{-\prime}=C_{nm}A_m^+ e^{i\delta x_1}\end{cases} \tag{26a}$$

$$\begin{cases}A_n^{+\prime}=C_{nm}A_m^- e^{-i\delta x_1}\\A_m^{-\prime}=C_{mn}A_n^+ e^{i\delta x_1}\end{cases} \tag{26b}$$

여기서 계수 C_{mn}, C_{nm}은 다음과 같다.

$$C_{mn}=\frac{1}{2k_m}(\beta_n^2+k_w k_n)[(-1)^{m+n}e^{i\theta}-1)] \tag{27a}$$

$$C_{nm}=\frac{1}{2k_n}(\beta_m^2+k_w k_m)[(-1)^{m+n}e^{-i\theta}-1] \tag{27b}$$

식 (26)의 해를 다음과 같이 가정하고

$$\begin{aligned}A_m^+&=a_m^+e^{i(\lambda-\delta)x_1},\quad A_m^-=a_m^-e^{i\lambda x_1}\\A_n^+&=a_n^+e^{i(\lambda-\delta)x_1},\quad A_n^-=a_n^-e^{i\lambda x_1}\end{aligned} \tag{28}$$

식 (26)에 대입하면 다음과 같은 매트릭스 식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix}i(\lambda-\delta) & -C_{mn}\\-C_{nm} & i\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_m^+\\a_n^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{29a}$$

$$\begin{pmatrix}i(\lambda-\delta) & -C_{nm}\\-C_{mn} & i\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n^+\\a_m^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{29b}$$

식 (29)의 determinant는 제로가 되어야 한다.

$$\lambda^2-\lambda\delta+\Omega_{nm}=0 \tag{30}$$

여기서

$$\Omega_{nm} = H_{nm}\begin{cases} \cos^2\dfrac{\theta}{2} & (n+m=\text{odd}) \\ \sin^2\dfrac{\theta}{2} & (n+m=\text{even}) \end{cases} \tag{31}$$

단, $H_{nm} = (\beta_m^2 + k_w k_m)(\beta_n^2 + k_w k_n)/k_n k_m$

식 (30)의 해는 다음과 같다.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4\Omega_{nm}}) \tag{32}$$

$k_n,\ k_m > 0$이라고 가정하면 언제나 $\Omega_{nm} > 0$이 성립한다. 식 (32)에서 λ가 복소수가 되면 식 (28)에서 음파가 전달하지 못하고 지수함수로 감소하는 차단밴드 (stopband)가 발생하는데 복소수가 되는 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$|\delta| < 2\sqrt{\Omega_{nm}} \tag{33}$$

차단밴드가 존재하려면 $\theta = \pi$인 경우 $m+n$은 짝수 (even)이어야 하며 $\theta = 0$인 경우 $m+n$은 홀수 (odd)이어야 한다. 식 (33)을 이용하여 식 (23)으로부터 차단밴드의 시작과 끝을 결정하는 파수를 구할 수 있다.

$$\sqrt{k^2 - \beta_n^2} + \sqrt{k^2 - \beta_m^2} = k_w + \epsilon\delta \tag{34}$$

여기서 $\delta = \pm 2\sqrt{\Omega_{nm}}$. 식 (34)는 k에 대해 비선형함수이므로 수치적인 방법으로 풀어야 하지만 ϵ이 1보다 충분히 작다면 다음과 같이 ϵ에 대해 전개하는 방법을 이용하여 근사적인 해를 구할 수 있다.

$$k = k_0 + \epsilon\eta + O(\epsilon^2) \tag{35a}$$

$$\delta = \delta_0 + O(\epsilon) \tag{35b}$$

여기서 k_0는 식 (15a)를 만족하며, δ_0는 $k = k_0$를 대입한 값을 나타낸다. 식 (34)의 좌변을 ϵ에 대해 전개하면 양변의 ϵ^0 항은 상쇄되고 ϵ^1 항으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$k_0\eta\left(\frac{1}{\sqrt{k_0^2 - \beta_n^2}} + \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - \beta_m^2}}\right) = \delta_0 \tag{36}$$

식 (36)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\eta = \frac{\delta_0 k_{n0} k_{m0}}{k_0(k_{n0} + k_{m0})} \tag{37}$$

여기서 $k_{n0} = \sqrt{k_0^2 - \beta_n^2}$, $k_{m0} = \sqrt{k_0^2 - \beta_m^2}$.

식 (15)에서 k_0는 다음과 같이 주어지는데 식 (15a)와 (15b) 중 어떤 조건을 만족하는지 반드시 확인해야 한다.

$$k_0^2 = \frac{1}{4k_w^2}\left[(\beta_n^2 - \beta_m^2)^2 + k_w^4 + 2k_w^2(\beta_n^2 + \beta_m^2)\right] \tag{38}$$

차단밴드의 중심주파수 f_0, 상한과 하한 주파수 $f_2,\ f_1$와 차단밴드폭 Δf는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$f_0 = k_0 c/2\pi \tag{39a}$$

$$f_{1,2} = (k_0 \mp \epsilon\eta)c/2\pi \tag{39b}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\epsilon c\eta}{\pi} = \frac{\epsilon c\delta_0 k_{n0} k_{m0}}{\pi k_0(k_{n0} + k_{m0})} \tag{39c}$$

여기서 c는 음속이다. 식 (39c)에서 차단밴드폭 Δf는 ϵ에 비례함을 알 수 있다.

식 (34)-(39)는 $k_n = k_m$의 경우에도 성립한다. 이 경우 δ_0와 식 (38), (39c)는 다음과 같이 단순화된다.

$$\delta_0 = \frac{2(k_w k_{n0} + \beta_n^2)}{k_{n0}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \tag{40a}$$

$$k_0^2 = \frac{k_w^2}{4} + \beta_n^2 \tag{40b}$$

$$\Delta f = \frac{\epsilon c\delta_0 k_{n0}}{2\pi k_0} \tag{40c}$$

식 (40)은 Bragg 공진을 나타내며 $k_n \neq k_m$에 해당하는 식 (38)과 (39)는 Non-Bragg 공진을 나타낸다.

Tao 등 [10]은 원통형 반복 주름관내의 파동방정식의 해를 Floquet 이론을 적용하여 표현하였으며 공진시 차단밴드폭은 다음과 같은 근사식으로 주어짐을 보였다.

표 1. 차단주파수와 밴드폭 ($\epsilon = 0.1$)
Table 1. Stopband and bandwidth ($\epsilon = 0.1$).
($h = 0.1\ m,\ k_w = 41.9\ m^{-1}$)

n (Bragg)		f_0 (Hz)	Δf	
			$\theta = 23/15\pi$	$\theta = \pi$
0		1133	303	453
1		2043	358	534
2		3584	528	788
3		5224	732	1094
Non-Bragg		f_0 (Hz)	Δf	
n	m		$\theta = 23/15\pi$	$\theta = \pi$
0	1	1771	279	0
1	2	3488	식 (15b)에 해당함 $O(\epsilon^2)$	
0	2	3683		

표 2. 차단주파수와 밴드폭 ($\epsilon = 0.05$)
Table 2. Stopband and bandwidth ($\epsilon = 0.05$).
($h = 0.1\ m,\ k_w = 41.9\ m^{-1}$)

n (Bragg)		f_0 (Hz)	Δf	
			$\theta = 23/15\pi$	$\theta = \pi$
0		1133	152	227
1		2043	179	267
2		3584	264	394
3		5224	366	547
Non-Bragg		f_0 (Hz)	Δf	
n	m		$\theta = 23/15\pi$	$\theta = \pi$
0	1	1771	139	0
1	2	3488	식 (15b)에 해당함 $O(\epsilon^2)$	
0	2	3683		

$$\Delta f \propto \epsilon^{|p-q|} \tag{41}$$

여기서 정수 p, q는 x축에 대한 하모닉 차수를 나타낸다. 밴드폭이 가장 최대로 되는 경우는 $|p-q| = 1$이며 이때 파수 (wavenumber)는 식 (38)과 동일한 형태임을 확인할 수 있다. 식 (38)은 원통형 덕트에도 성립하는데 이 경우 β_n은 Bessel 함수 $J_1(\beta_n r) = 0$의 근에 해당된다 (단, r은 덕트 반경을 나타냄).

표 1과 2에는 $h = 0.1\,\mathrm{m}$, $k_w = 41.9$ (주기=0.15 m)인 덕트에 대해 각각 $\epsilon = 0.1,\ 0.05$인 경우 차단밴드의 중심주파수와 밴드폭을 계산하여 제시하였는데 상하면의 위상차는 $\theta = 23\pi/15, \pi$ 두 가지를 고려하였다. 식 (15b)의 $k_m - k_n = k_w$의 경우에 대해서도 식 (32)와 유사한 식을 얻을 수 있는데 제곱근안의 변수가 늘 양수가 되므로 본 경우에는 차단밴드가 존재하지 않는다. 그러나 이는 $O(\epsilon^1)$의 범위에서 성립하는 근사식으로 $O(\epsilon^2)$ 이상으로 확대하면 식 (15b)의 경우도 차단밴드가 존재한다[7,8]. 또한 식 (41)에 의하면 $|p-q| = j\ \ (j = 1,2,3,\cdots)$에서도 차단밴드가 존재하는데 이는 식 (15)를 일반화한 다음 식에 해당한다.

$$k_m \pm k_n = jk_w \quad (j = 1,2,3,\cdots) \tag{42}$$

본 논문에서는 $O(\epsilon^1)$의 범위에서만 차단밴드를 고려하였다. 차단밴드폭을 최대화하려면, Bragg 공진에서는 식 (31)에 의하면 $\theta = \pi$가 되어야 하고, 가장 낮은 Non-Bragg 공진에서는 $\theta = 0$가 되어야 한다.

III. BEM을 이용한 덕트 삽입손실해석

주름관의 삽입손실 (Insertion Loss: *IL*)을 2-D BEM을 이용하여 해석하였다. 덕트의 전체길이는 1940 mm이며, 높이는 $h = 0.1m$, 주름의 주기는 $T = 0.15\,\mathrm{m}$ ($k_w = 2\pi/T = 41.9\ m^{-1}$)이며 중간에 10개의 주름이 있고 덕트 시작과 끝에 각각 200 mm의 직관이 있다. 하변은 상변보다 주름이 40 mm 먼저 시작하는 경우 ($\theta = 23\pi/15$)와 위상차가 반대 ($\theta = \pi$)인 두 경우를 고려하였다. 708개의 선형 요소를 사용하였으며 요소의 크기는 10 mm이며 파장당 6개의 절점조건을 적용하면 상한 주파수는 5600 Hz가 된다. $\epsilon = 0.1$과 0.05 및 $\theta = 23\pi/15$와 $\theta = \pi$인 경우 모두 4가지 조합에 대해 BEM 해석을 하였다. 덕트입구에는 단면에 대해 크기가 일정한 파가 입사되고 출구 ($x = 1940\ \mathrm{mm}$)에서는 단면에 대해 10 mm 간격으로 계산한 압력의 평균값을 구하였으며 주름관이 아닌 직관인 경우 같은 위치에서 구한 압력을 빼주어 덕트의 삽입손실을 계산하였다.

그림 2-5에는 BEM에 의해 구한 삽입손실 스펙트럼과 해석적으로 예측한 표 1과 2의 차단주파수 밴드대역을 표시하였다. 그림 2의 $\epsilon = 0.1$, $\theta = 23\pi/15$의 경우, Bragg 공진에 의한 밴드는 첫 번째 (965~1302 Hz), 두 번째 (1845~2242 Hz)와 세 번째 밴드 (3291~3877 Hz)가 확인된다. Non-Bragg 밴드는 첫 번째 (1645~1896 Hz)밴드에서 매우 큰 삽입손실을 보

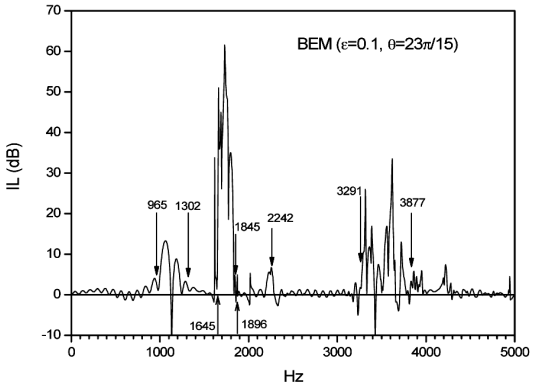

그림 2. BEM에 의한 덕트의 삽입손실 ($\epsilon=0.1,\ \theta=23\pi/15$)
Fig. 2. IL by BEM analysis ($\epsilon=0.1,\ \theta=23\pi/15$).

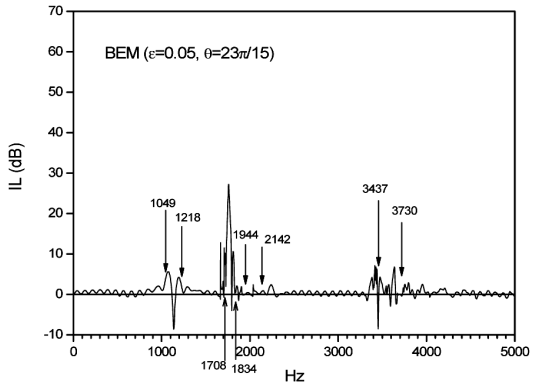

그림 3. BEM에 의한 덕트의 삽입손실 ($\epsilon=0.05,\ \theta=23\pi/15$)
Fig. 3. IL by BEM analysis ($\epsilon=0.05,\ \theta=23\pi/15$).

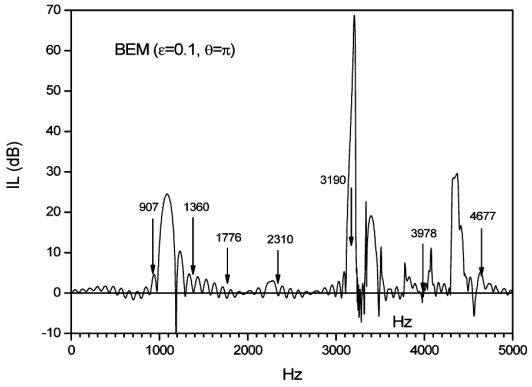

그림 4. BEM에 의한 덕트의 삽입손실 ($\epsilon=0.1,\ \theta=\pi$)
Fig. 4. IL by BEM analysis ($\epsilon=0.1,\ \theta=\pi$).

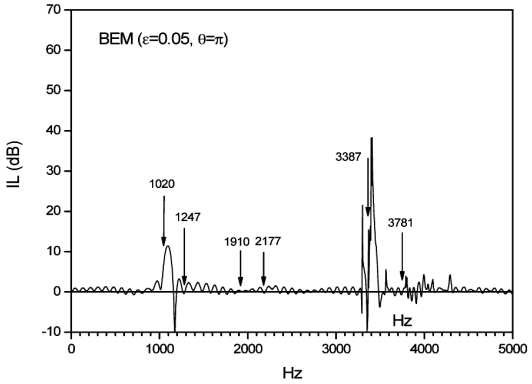

그림 5. BEM에 의한 덕트의 삽입손실 ($\epsilon=0.05,\ \theta=\pi$)
Fig. 5. IL by BEM analysis ($\epsilon=0.05,\ \theta=\pi$).

이며 두 번째 이상 밴드는 5000 Hz 이내에서는 $O(\epsilon^1)$ 범위내에 존재하지 않는다. 그림 2에서 주름관의 크기를 $\epsilon=0.1$ 에서 $\epsilon=0.05$ 로 줄인 것이 그림 3이며 차단밴드의 중심주파수는 같으나 밴드폭은 1/2로 줄어들고 IL 의 크기가 크게 감소함을 알 수 있다.

그림 4의 $\epsilon=0.1$, $\theta=\pi$ 의 경우, Bragg 밴드는 첫 번째 (907~1360 Hz), 두 번째 (1776~2310 Hz)와 세 번째 밴드 (3190 ~3978 Hz)가 확인된다. 그러나 Non-Bragg 밴드는 표 2에서 보듯이 5000 Hz 이내에서는 존재하지 않는다. $\epsilon=0.1$ 에서 $\epsilon=0.05$ 로 바뀌면 그림 5에서 보듯이 밴드폭은 1/2로 줄어들며 삽입손실도 감소한다.

IV. 결 론

2차원 덕트에서 상하단 경계가 길이방향의 사인함수 (sinusoidal function)로 변하는 주름관에 대해 음파의 차단현상을 해석하였다. 다중 스케일 섭동법을 이용하여 주파수가 복소수가 되는 조건에서 차단밴드의 존재조건을 Bragg 공진 및 Non-Bragg 공진에 대해 유도하였다. 두 파의 진행방향이 반대인 경우만 차단밴드가 존재함을 보였는데 이는 $O(\epsilon^1)$ 범위에서만 성립하며 같은 방향에 대해서도 차단밴드가 존재하지만 이는 $O(\epsilon^2)$ 의 범위에 속한다. 2D BEM을 이용하여 덕트의 삽입손실 스펙트럼을 구하였으며 해석에서 예측한 차단밴드의 존재를 확인하였다. 주름관의 크기가 바뀌면 밴드폭도 이에 비례해서 변화함을 보였으며 밴드 중심주파수는 변함이 없음을 확인하였다. 향후 주름관 덕트시편을 제작하여 측정을 통해 차단밴드의 존재와 삽입손실의 스펙트럼을 BEM 결과와 비교할 예정이다. 반복 주름관형태의 덕트는 흡음재를 사용하지 않으며 선택적으로 삽입손실 차단주파수대역을 설계할 수 있다는 점에서 장점이 있으며 여러 면에 응용분야가 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문은 2011년도 지식경제부의 재원으로 한국기계연구원 창의형과제의 지원을 받아 수행한 연구과제 결과중 일부이다.

참고문헌

1. L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*, 2nd Ed., Dover Publications, Inc., 1953.
2. A. H. Nayfeh, "Sound waves in two-dimensional ducts with sinusoidal walls," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 56, no. 3, pp. 768-770, 1974.
3. O. R. Asfar and A. H. Nayfeh, "Stopbands of the first order Bragg interaction in a parallel-plate waveguide having multiperiodic wall corrugations," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-28, no. 11, pp. 1187-1191, 1980.
4. M. A. Hawwa and O. R. Asfar, "Mechanical-wave filtering in a periodically corrugated elastic plate," *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 118, pp. 16-20, 1996.
5. A. H. Nayfeh and O. A. Kandil, "Propagation of waves in cylindrical hard-walled ducts with generally weak undulations," *AIAA Journal*, vol. 16, no. 10, 1041-1045, 1978.
6. V. A. Pogrebnyak, "Non-Bragg reflections in a periodic waveguide," *Optics Communications*, vol. 232, pp. 201-207, 2004.
7. S. E. Sandström, "Stopbands in a corrugated parallel plate waveguide," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 79, no. 5, pp. 1293-1298, 1985.
8. A. Boström, "Acoustic waves in a cylindrical duct with periodically varying cross section," *Wave Motion*, vol. 5, pp. 59-67, 1983.
9. Z. Y. Tao, Y. M. Xiao and X. L. Wang, "Non-Bragg resonance of standing acoustic wave in a cylindrical waveguide with sinusoidally perturbed walls," *Chin. Phys. Lett.*, vol. 22, no. 2, pp. 394-397, 2005.
10. Z. Y. Tao, W. Y. He and X. Wang, "Resonance-induced band gaps in a periodic waveguide," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 313, pp. 830-840, 2008.
11. Z. Tao, W. He, Y. Xiao, and X. Wang, "Wide forbidden band induced by the interference of different transverse acoustic standing-wave modes," *Applied Physics Letters*, vol. 92, 121920. 2008,
12. Z. Tao, W. He, Y. Xiao, W. Zhang and X. Wang, "Sound transmission within the Bragg gap via the high-order modes in a waveguide with periodically corrugated walls," *Journal of Applied Physics*, vol. 105, 123515, 2009.

저자 약력

▸ 김 현 실 (Hyun-Sil Kim)

한국음향학회지 제28권 제1E호 참조

▸ 김 재 승 (Jae-Seung Kim)

한국음향학회지 제28권 제1E호 참조

▸ 김 봉 기 (Bong-Ki Kim)

한국음향학회지 제28권 제1E호 참조

▸ 김 상 렬 (Sang-Ryul Kim)

한국음향학회지 제28권 제1E호 참조

▸ 이 성 현 (Seong-Hyun Lee)

1999년 2월: KAIST 기계공학과 학사
2001년 2월: KAIST 기계공학과 석사
2006년 2월: KAIST 기계공학과 박사
2006년 3월 ~ 2009년 11월: 삼성물산 건설부문
2010년 1월 ~ 현재: 한국기계연구원 선임연구원