

## 두 개의 맥스웰분포의 모수비에 대한 우도함수 추론

강상길<sup>1</sup> · 이정희<sup>2</sup> · 이우동<sup>3</sup>

<sup>1</sup>상지대학교 컴퓨터데이터정보학과 · <sup>2</sup>대구한의대학교 보건학부 · <sup>3</sup>대구한의대학교 자산운용학과  
접수 2011년 12월 6일, 수정 2011년 12월 17일, 게재확정 2012년 1월 2일

### 요 약

이 논문에서는 두 개의 Maxwell분포의 모수들의 동질성을 모수비에 근거하여 검정하는 근사통계량을 제안한다. Maxwell분포의 모수비에 대한 추정량이 복잡하여 정확한 분포를 유도하기는 매우 어렵다. 이러한 문제를 해결하기 위한 하나의 대안으로 표준정규분포로 근사적으로 수렴하는 통계량을 고려해야 한다. 이 논문에서 제안된 통계량은 표준정규분포로 수렴하며, 표본의 수가 작은 경우에도 사용할 수 있다. 특히, 본 논문에서는 부호화 로그 우도비 통계량과 수정된 부호화 로그 우도비 통계량을 개발한다. 일반적으로, 수정된 부호화 로그 우도비 통계량은 로그 우도비 통계량에 비해 표준정규분포로 수렴하는 속도가 매우 빠르다. 부호화 로그 우도비 통계량은 작은 표본으로도 표준정규분포로 매우 빨리 수렴한다. 제안된 통계량들의 성질들을 모의실험을 통하여 알아보고, 제안된 통계량을 예제를 통하여 연구한다.

주요용어: 부호화 로그우도비 통계량, 수정된 부호화 로그 우도비 통계량, 최대우도추정량, 표준정규 분포.

### 1. 서론

Maxwell분포는 물리학이나 화학 등에서 분자의 속도와 온도 및 질량관계를 연구하기 위하여 사용되는 분포이다. 물리학이나 화학에서는 운동량벡터의 분포, 에너지의 분포, 속력벡터의 분포, 속도의 분포 등을 연구하는 데 필수적인 분포이다. 통계학 분야에서도 Maxwell분포는 음이 아닌 확률변수에 대한 분포이기 때문에 신뢰성 분야에도 적용가능한 분포이다. Breitenberger (1963)와 Bingham과 Mardia (1978) 등은 Maxwell분포의 통계적 성질을 연구하였다.

Maxwell 분포와 관련된 연구는 흔하지 않으나 신뢰성 분야와 관련된 연구를 소개하면 다음과 같다. Bekkera와 Rouxa (2005)은 Maxwell분포의 신뢰도함수 (reliability function)에 대한 베イズ추정량 (Bayes estimator)과 최대우도추정량 (maximum likelihood estimator), 경험적 베イズ 추정량 (empirical Bayes estimator) 등을 제안하였고, 각 추정량들을 모의실험을 통하여 비교하였다. Krishna와 Malik (2009)은 Maxwell분포로부터 추출된 제2종 중단된 (type 2 censored) 표본을 이용하여 신뢰도 함수에 대한 베イズ추정량과 최대우도추정량을 제안하였고 모의실험을 통하여 비교하였다.

모수  $\theta$ 를 갖는 Maxwell분포의 확률밀도함수 (probability density function)는 다음과 같다.

$$f(x|\theta) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \theta^{3/2} x^2 e^{-\theta x^2}, x > 0, \theta > 0.$$

<sup>1</sup> (220-702) 강원도 원주시 상지대길 124번지, 상지대학교 컴퓨터데이터정보학과, 부교수.

<sup>2</sup> (712-715) 경북 경산시 유곡동 290번지, 대구한의대학교 보건학부, 부교수.

<sup>3</sup> 교신저자: (712-715) 경북 경산시 유곡동 290번지, 대구한의대학교 자산운용학과, 교수.

E-mail: wdlee@dhu.ac.kr

이 논문의 목적은 독립인 두 개의 Maxwell분포로부터 추출된 표본을 기초로 하여 두 분포의 모수가 동일한지를 검정하는 통계량을 개발하는 것이다.  $X_1, X_2, \dots, X_m$ 을 모수  $\theta_1$ 을 갖는 Maxwell분포로부터의  $m$ 개의 확률표본이라고 두고,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 을 모수  $\theta_2$ 를 갖는 Maxwell분포로부터의  $n$ 개의 확률표본이라고 둔다. 그리고  $X_i$ 와  $Y_j$ 는 통계적으로 독립이라고 가정한다. 관찰값  $\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 와  $\underline{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 를 이용하여  $\theta_1/\theta_2 = c$  ( $c$ 는 알려진 상수)인지를 검정하는 절차를 개발하려고 한다. 이 경우, 관심모수 (parameter of interest)를  $\psi = \theta_1/\theta_2$ 라 두고, 장애모수 (nuisance parameter)를  $\nu = \theta_2$ 라 두자. 즉, 귀무가설  $H_0 : \psi = \psi_0$ 과 대립가설  $H_1 : \psi \neq \psi_0$ 을 검정하는 통계적 절차를 개발하려고 한다.

정확한 검정통계량의 분포를 찾기 어려운 경우에 중심극한정리 (central limit theorem)에 근거한 근사 검정통계량을 이용한다. 부호화 로그우도비 통계량 (signed log-likelihood statistic)은 장애모수가 있는 경우에 사용하는 데, 이 통계량은 표본의 수가 클 때, 표준정규분포로 수렴한다. Lee와 Lee (2008)은 파레토분포에서 장애모수가 있는 경우, 부호화 로그우도비 통계량의 사용을 제안하였다. 이 통계량의 단점은 표본의 수가 적을 때는 정확성이 떨어지는 것으로 알려져 있다.

한편, 이러한 단점을 극복하기 위해, 표본의 수가 작을 때도 비교적 정확히 표준정규분포로 수렴하는 통계량이 있는 데, Barndorff-Nielsen (1991)에 의해 제안된 수정된 부호화 로그우도비 통계량 (modified signed log-likelihood statistic)이다. 이 통계량은 표본의 수가 작을 때도 정확한 결과를 준다. 그러나 이 통계량을 구하기 위해서는 많은 량의 계산이 필요하다.

이 논문의 절차는 다음과 같다. 2절에서는 부호화 로그우도비 통계량을 구하고, 3절에서는 수정된 부호화 로그우도비 통계량을 구한다. 4절에서는 모의실험을 통하여 제안된 통계량들을 표본의 수에 따라 검정력측면에서 비교한다. 그리고 이정희와 이우동 (2008)의 직류전위차법 실험 자료를 이용하여 실제 사용례를 보인다.

## 2. 부호화 로그우도비 통계량

$X_1, X_2, \dots, X_m$ 을 모수  $\theta_1$ 을 갖는 Maxwell분포로부터의 크기  $m$ 인 확률표본이라고 두고,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 을 모수  $\theta_2$ 를 갖는 Maxwell분포로부터의 크기  $n$ 인 확률표본이라고 둔다. 그리고  $X_i$ 와  $Y_j$ 는 통계적으로 독립이라고 가정하자. 그리고, 확률표본의 관찰값 (observation)을  $\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 와  $\underline{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 이라고 두자. 그러면,  $\theta_1$ 과  $\theta_2$ 에 대한 우도함수 (likelihood function)는 다음과 같다.

$$L(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=1}^m x_i^2\right) \left(\prod_{j=1}^n y_j^2\right) \theta_1^{3m/2} \theta_2^{3n/2} \exp\left\{-\theta_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 - \theta_2 \sum_{j=1}^n y_j^2\right\} \quad (2.1)$$

여기에서  $N = m + n$ 이다. 위 우도함수 (2.1)로부터  $\theta_1$ 과  $\theta_2$ 에 대한 로그우도함수 (log-likelihood function)는 다음과 같다.

$$l(\theta_1, \theta_2) = \frac{3m}{2} \log(\theta_1) + \frac{3n}{2} \log(\theta_2) - \theta_1 t_1 - \theta_2 t_2 + c$$

여기에서  $t_1 = \sum_{i=1}^m x_i^2, t_2 = \sum_{j=1}^n y_j^2$ 이고  $c = N \log(\frac{4}{\sqrt{\pi}}) + 2 \sum_{i=1}^m \log(x_i) + 2 \sum_{j=1}^n \log(y_j)$  이다. 위의 우도함수로부터  $(t_1, t_2)$ 는 모수  $(\theta_1, \theta_2)$ 에 대해 최소충분통계량 (minimal sufficient statistic)이 됨을 쉽게 알 수 있다.

이제 관심모수를

$$\psi = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

이라고 두고, 장애모수를

$$\nu = \theta_2$$

라고 두자. 관심모수  $\psi$ 와 장애모수  $\nu$ 에 대한 로그 우도함수는 다음과 같다.

$$l(\psi, \nu) = \frac{3m}{2} \log(\psi) + \frac{3N}{2} \log(\nu) - \psi \nu t_1 - \nu t_2 + c \quad (2.2)$$

위의 로그 우도함수로부터 관심모수  $\psi$ 와 장애모수  $\nu$ 에 대한 최대우도추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\psi} = \frac{mt_2}{nt_1}, \quad \hat{\nu} = \frac{3n}{2t_2}$$

이다. 관심모수  $\psi$ 가 고정되었을 때,  $\nu$ 에 대한 제한된 최대우도추정량 (constrained maximum likelihood estimator)은

$$\tilde{\nu}_\psi = \frac{3N}{2(\psi t_1 + t_2)}$$

이다.

위 통계량들을 이용하면 부호화 로그우도비 통계량은 다음과 같다.

$$r \equiv r(\psi) = \text{sgn}(\hat{\psi} - \psi) \left\{ 2(l(\hat{\psi}, \hat{\nu}) - l(\psi, \tilde{\nu}_\psi)) \right\}^{1/2}, \quad (2.3)$$

여기에서

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

이다.

위의 통계량  $r$ 은 표본의 크기가 클 때,  $O_p(n^{-1/2})$ 로 표준정규분포로 수렴한다. 이러한 성질을 이용하면  $\psi$ 에 대한 구간추정과 검정을 할 수 있다. 귀무가설  $H_0 : \psi = \psi_0$ 와 대립가설  $H_1 : \psi \neq \psi_0$ 의 검정에 대한 유의확률은

$$\text{유의확률} = 2P(r > |r(\psi_0)|) \approx 2(1 - \Phi(|r(\psi_0)|)) \quad (2.4)$$

이고,  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 분포함수 (distribution function)를 나타낸다.

### 3. 수정된 부호화 로그우도비통계량

2절에서 제안된 통계량  $r$ 은 표본의 수가 큰 경우에는 별 문제가 없으나 표본의 수가 작은 경우에는 정확성이 떨어진다. 이러한 단점을 보완해 주는 것이 수정된 부호화 로그우도비 통계량이다. 이 통계량을 소개하기 위하여  $\omega = (\psi, \nu)$ 라고 하고,  $\hat{\omega} = (\hat{\psi}, \hat{\nu})$ 라고 둔다.

Barndorff-Nielsen (1986, 1991)에 의해 제안된 수정된 부호화 로그우도비 통계량은 다음과 같다.

$$r^* \equiv r^*(\psi) = r(\psi) + r(\psi)^{-1} \log \left\{ \frac{u(\psi)}{r(\psi)} \right\} \quad (3.1)$$

여기에서  $r(\cdot)$ 는 (2.3)에 주어졌고,

$$u(\psi) = \frac{|l_{;\hat{\omega}}(\hat{\omega}) - l_{;\hat{\omega}}(\psi, \tilde{\nu}_\psi) l_{;\hat{\omega}}(\psi, \tilde{\nu}_\psi)|}{\{ |j_{\omega\omega}(\hat{\omega})| |j_{\nu\nu}(\psi, \tilde{\nu}_\psi)| \}^{1/2}} \quad (3.2)$$

이다. (3.2)에서 표본공간미분 (sample space derivative)의 정의는 다음과 같다

$$l_{;\hat{\omega}}(\psi, \nu) = \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} l(\psi, \nu; \hat{\omega})$$

이고, 혼합된 미분 (mixed derivatives)의 정의는

$$l_{\nu; \hat{\omega}}(\psi, \nu) = \frac{\partial}{\partial \nu} l_{;\hat{\omega}}(\psi, \nu)$$

이다. 그리고  $j_{\omega\omega}(\psi, \nu)$ 는 관찰된 정보행렬 (observed information matrix)이고,  $j_{\nu\nu}(\psi, \nu)$ 는 관찰된 장애모수 정보행렬 (observed nuisance information matrix)이다. 위의 통계량  $r^*$ 는 표본의 수가 증가하면  $O_p(n^{-3/2})$ 의 속도로 정규분포로 수렴한다. 그러므로 귀무가설  $H_0 : \psi = \psi_0$ 와 대립가설  $H_1 : \psi \neq \psi_0$ 의 검정에 대한 유의확률 ( $p$ -value)은

$$\text{유의확률} = 2P(r^* > |r_0^*|) \approx 2(1 - \Phi(|r_0^*|)) \quad (3.3)$$

이고, 여기에서  $r_0^* = r^*(\psi_0)$ 이다. 일반적으로 유의확률 (3.3)는 (2.4)보다 더 정확하다.

현재 고려중인 우도함수는 최대계수 (full rank) 지수족 모형이고, 로그-우도함수는 최소충분통계량의 함수로 나타나며,  $\psi$ 와  $\nu$ 의 최대우도추정량은 최소충분통계량인  $t \equiv (t_1, t_2)$ 와 일대일 대응관계에 있다. 이 경우에 (3.2)는 다음과 같이 표현된다.

$$u(\psi) = \frac{|l_{;t}(\hat{\psi}, \hat{\nu}) - l_{;t}(\psi, \tilde{\nu}_\psi) \quad l_{\nu;t}(\psi, \tilde{\nu}_\psi)|}{|l_{\omega;t}(\hat{\psi}, \hat{\nu})|} \left\{ \frac{|j_{\omega\omega}(\hat{\psi}, \hat{\nu})|}{|j_{\nu\nu}(\psi, \tilde{\nu}_\psi)|} \right\}^{1/2}.$$

여기에서 표본공간미분

$$l_{;t}(\omega) = \frac{\partial}{\partial t} l(\psi, \nu)$$

를 나타내고, 혼합미분은

$$l_{\nu;t}(\omega) = \frac{\partial^2}{\partial \nu \partial t} l(\psi, \nu)$$

이다.

이제 주어진 로그우도함수로부터  $u$ 를 구하도록 한다. 먼저, 로그우도함수 (2.2)와 관련한 미분을 계산하면 다음과 같다.

$$l_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi} l(\psi, \nu) = \frac{3m}{2\psi} - \nu t_1, \quad l_\nu = \frac{\partial}{\partial \nu} l(\psi, \nu) = \frac{3N}{2\nu} - \psi t_1 - t_2,$$

$$l_{\psi\psi} = \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} l(\psi, \nu) = -\frac{3m}{2\psi^2}, \quad l_{\psi\nu} = l_{\nu\psi} = \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \nu} l(\psi, \nu) = -t_1$$

그리고

$$l_{\nu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} l(\psi, \nu) = -\frac{3N}{2\nu^2}.$$

표본공간 미분값은

$$l_{;t} = (l_{;t_1} \quad l_{;t_2})^T = (-\psi\nu \quad -\nu)^T$$

이고, 혼합미분값은

$$l_{\nu;t} = (l_{\nu;t_1} \quad l_{\nu;t_2})^T = (-\psi \quad -1)^T$$

이고,

$$l_{\omega;t} = \begin{pmatrix} l_{\psi;t_1} & l_{\psi;t_2} \\ l_{\nu;t_1} & l_{\nu;t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & 0 \\ -\psi & -1 \end{pmatrix}$$

이다. 그리고 위 행렬의 행렬식은

$$|l_{\omega;t}| = \nu$$

이다. 관찰된 정보행렬은

$$j_{\omega\omega} = \begin{pmatrix} -l_{\psi\psi} & -l_{\psi\nu} \\ -l_{\nu\psi} & -l_{\nu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3m}{2\psi^2} & t_1 \\ t_1 & \frac{3N}{2\nu^2} \end{pmatrix}$$

이고, 관찰된 정보행렬의 행렬식은

$$|j_{\omega\omega}| = \frac{9Nm}{4\psi^2\nu^2} - t_1^2$$

이다. 관찰된 장애모수 정보행렬 및 행렬식은

$$j_{\nu\nu} = \frac{3N}{2\nu^2} = |j_{\nu\nu}|$$

이다. 이 식들을 이용하여  $u(\psi)$ 를 정리하면

$$u(\psi) = (\hat{\psi} - \psi) \sqrt{\frac{\frac{9mN}{4\psi^2\nu^2} - t_1^2}{\frac{3N}{2\nu\psi}}}$$

이다.

#### 4. 모의실험 및 예제

제안된 통계량 (2.3)과 (3.1)는 표본의 수가 증가하면 표준정규분포로 수렴한다. 그러나, (3.1)은 (2.3)에 비해 표준정규분포로 수렴하는 속도가 더 빠르다. 이런 사실을 확인하기 위하여 표본의 수  $m$ 과  $n$ 을 증가시키면서 표준정규분포의 2.5%, 5%, 95%, 97.5%에 해당하는 분위수보다 작은  $r$ 과  $r^*$ 의 갯수를 헤아려보았다. 이 때,  $\psi = 0.5, 1, 2$ ,  $\nu = 0.5, 1, 2$ 로 변화시키면서 10,000번의 확률표본을 반복적으로 추출하여 작성한 결과가 표 4.1과 표 4.2이다. 표 4.1과 표 4.2에서 표본수가 1 혹은 2인 경우에도  $r^*$ 는  $r$ 보다 우수하다는 사실을 알 수 있다. 즉,  $r^*$ 는  $r$ 보다 좌우 대칭성이 우수하며, 목표확률값에 더 가깝다는 것을 확인할 수 있다. 표본수가 큰 경우에는  $r^*$ 와  $r$ 모두 표준정규분포에 수렴한다는 사실을 알 수 있다.

표 4.1 표준정규분포 분위수에 대한  $r$ 과  $r^*$ 의 추정된 확률

$\psi$	$\nu$	$m$	$n$	0.025		0.05		0.95		0.975	
				$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$
0.5	0.5	1	1	0.0349	0.0262	0.0643	0.0515	0.9327	0.9495	0.9660	0.9761
		1	2	0.0417	0.0265	0.0774	0.0527	0.9561	0.9543	0.9785	0.9785
		2	1	0.0242	0.0242	0.0471	0.0486	0.9274	0.9507	0.9609	0.9757
		2	2	0.0298	0.0242	0.0574	0.0503	0.9462	0.9527	0.9715	0.9764
		3	5	0.0323	0.0253	0.0602	0.0517	0.9498	0.9484	0.9737	0.9729
		5	3	0.0241	0.0245	0.0471	0.0486	0.9450	0.9549	0.9730	0.9780
		5	5	0.0262	0.0235	0.0526	0.0494	0.9475	0.9503	0.9743	0.9757
		5	10	0.0301	0.0260	0.0591	0.0504	0.9538	0.9506	0.9745	0.9733
		10	5	0.0263	0.0279	0.0503	0.0537	0.9442	0.9515	0.9696	0.9744
		10	10	0.0262	0.0246	0.0528	0.0515	0.9469	0.9487	0.9721	0.9731
		20	20	0.0218	0.0214	0.0460	0.0449	0.9471	0.9478	0.9725	0.9732
0.5	1.0	1	1	0.0340	0.0234	0.0668	0.0499	0.9381	0.9518	0.9674	0.9782
		1	2	0.0405	0.0240	0.0740	0.0506	0.9525	0.9504	0.9749	0.9749
		2	1	0.0231	0.0231	0.0467	0.0485	0.9261	0.9508	0.9589	0.9743
		2	2	0.0290	0.0246	0.0560	0.0485	0.9454	0.9511	0.9687	0.9739
		3	5	0.0317	0.0253	0.0569	0.0490	0.9478	0.9459	0.9743	0.9735
		5	3	0.0259	0.0265	0.0511	0.0531	0.9402	0.9490	0.9685	0.9738
		5	5	0.0267	0.0239	0.0524	0.0501	0.9461	0.9486	0.9724	0.9743
		5	10	0.0281	0.0235	0.0554	0.0485	0.9530	0.9502	0.9774	0.9750
		10	5	0.0227	0.0240	0.0472	0.0497	0.9439	0.9524	0.9727	0.9770
		10	10	0.0264	0.0250	0.0521	0.0501	0.9536	0.9549	0.9757	0.9765
		20	20	0.0278	0.0269	0.0504	0.0494	0.9498	0.9502	0.9753	0.9763
0.5	2	1	1	0.0384	0.0282	0.0678	0.0544	0.9396	0.9526	0.9652	0.9761
		1	2	0.0378	0.0245	0.0696	0.0478	0.9537	0.9524	0.9731	0.9730
		2	1	0.0248	0.0248	0.0462	0.0480	0.9259	0.9495	0.9595	0.9749
		2	2	0.0302	0.0256	0.0581	0.0507	0.9451	0.9537	0.9722	0.9774
		3	5	0.0331	0.0274	0.0600	0.0505	0.9522	0.9514	0.9759	0.9754
		5	3	0.0234	0.0244	0.0486	0.0506	0.9426	0.9531	0.9705	0.9748
		5	5	0.0239	0.0222	0.0520	0.0500	0.9484	0.9516	0.9759	0.9779
		5	10	0.0297	0.0251	0.0538	0.0474	0.9551	0.9524	0.9776	0.9756
		10	5	0.0232	0.0260	0.0450	0.0479	0.9468	0.9541	0.9738	0.9794
		10	10	0.0255	0.0243	0.0510	0.0493	0.9480	0.9499	0.9734	0.9742
		20	20	0.0254	0.0251	0.0496	0.0491	0.9492	0.9495	0.9754	0.9761
1.0	0.5	1	1	0.0335	0.0247	0.0594	0.0467	0.9392	0.9532	0.9687	0.9771
		1	2	0.0396	0.0250	0.0720	0.0479	0.9514	0.9493	0.9760	0.9760
		2	1	0.0253	0.0253	0.0507	0.0532	0.9286	0.9511	0.9616	0.9765
		2	2	0.0299	0.0249	0.0589	0.0513	0.9437	0.9504	0.9711	0.9769
		3	5	0.0299	0.0250	0.0598	0.0508	0.9523	0.9507	0.9760	0.9755
		5	3	0.0248	0.0252	0.0495	0.0510	0.9456	0.9535	0.9733	0.9784
		5	5	0.0256	0.0243	0.0506	0.0487	0.9470	0.9500	0.9739	0.9756
		5	10	0.0292	0.0245	0.0565	0.0478	0.9528	0.9489	0.9761	0.9743
		10	5	0.0238	0.0247	0.0454	0.0479	0.9446	0.9526	0.9724	0.9767
		10	10	0.0256	0.0247	0.0523	0.0506	0.9477	0.9492	0.9732	0.9745
		20	20	0.0238	0.0234	0.0482	0.0477	0.9502	0.9509	0.9752	0.9759
1	1	1	1	0.0345	0.0258	0.0629	0.0486	0.9375	0.9517	0.9672	0.9759
		1	2	0.0408	0.0258	0.0745	0.0512	0.9550	0.9529	0.9779	0.9779
		2	1	0.0267	0.0266	0.0521	0.0539	0.9270	0.9526	0.9635	0.9765
		2	2	0.0295	0.0246	0.0557	0.0485	0.9408	0.9481	0.9684	0.9732
		3	5	0.0325	0.0274	0.0606	0.0504	0.9508	0.9491	0.9768	0.9765
		5	3	0.0263	0.0268	0.0509	0.0520	0.9399	0.9477	0.9678	0.9745
		5	5	0.0279	0.0254	0.0528	0.0503	0.9498	0.9525	0.9738	0.9758
		5	10	0.0272	0.0225	0.0553	0.0479	0.9561	0.9536	0.9787	0.9769
		10	5	0.0242	0.0264	0.0460	0.0487	0.9436	0.9510	0.9693	0.9750
		10	10	0.0273	0.0265	0.0527	0.0511	0.9535	0.9543	0.9770	0.9776
		20	20	0.0263	0.0259	0.0523	0.0513	0.9508	0.9519	0.9771	0.9776

표 4.2 표준정규분포 분위수에 대한  $r$ 과  $r^*$ 의 추정된 확률 (표 4.1의 연속)

$\psi$	$\nu$	$m$	$n$	0.025		0.05		0.95		0.975	
				$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$
1	2	1	1	0.0334	0.0242	0.0643	0.0489	0.9396	0.9530	0.9676	0.9769
		1	2	0.0400	0.0252	0.0723	0.0497	0.9530	0.9512	0.9762	0.9762
		2	1	0.0248	0.0248	0.0470	0.0482	0.9297	0.9525	0.9618	0.9767
		2	2	0.0248	0.0214	0.0545	0.0464	0.9397	0.9469	0.9693	0.9753
		3	5	0.0300	0.0248	0.0571	0.0490	0.9529	0.9518	0.9768	0.9766
		5	3	0.0258	0.0269	0.0511	0.0527	0.9443	0.9521	0.9699	0.9751
		5	5	0.0273	0.0256	0.0516	0.0499	0.9499	0.9524	0.9729	0.9756
		5	10	0.0301	0.0254	0.0574	0.0497	0.9544	0.9515	0.9789	0.9771
		10	5	0.0245	0.0272	0.0495	0.0526	0.9427	0.9504	0.9737	0.9774
		10	10	0.0241	0.0231	0.0507	0.0493	0.9489	0.9495	0.9732	0.9740
		20	20	0.0269	0.0266	0.0507	0.0499	0.9502	0.9512	0.9753	0.9758
2	0.5	1	1	0.0320	0.0233	0.0636	0.0484	0.9364	0.9519	0.9669	0.9772
		1	2	0.0376	0.0235	0.0735	0.0483	0.9528	0.9509	0.9765	0.9765
		2	1	0.0270	0.0270	0.0504	0.0522	0.9266	0.9487	0.9574	0.9734
		2	2	0.0327	0.0263	0.0590	0.0525	0.9471	0.9531	0.9735	0.9768
		3	5	0.0289	0.0235	0.0563	0.0468	0.9557	0.9545	0.9761	0.9758
		5	3	0.0247	0.0250	0.0496	0.0503	0.9445	0.9525	0.9724	0.9779
		5	5	0.0243	0.0231	0.0504	0.0476	0.9458	0.9493	0.9725	0.9744
		5	10	0.0316	0.0261	0.0577	0.0507	0.9557	0.9533	0.9767	0.9751
		10	5	0.0233	0.0248	0.0463	0.0499	0.9406	0.9487	0.9702	0.9748
		10	10	0.0279	0.0272	0.0537	0.0524	0.9474	0.9485	0.9731	0.9742
		20	20	0.0273	0.0272	0.0567	0.0563	0.9519	0.9525	0.9747	0.9753
2	1	1	1	0.0318	0.0233	0.0624	0.0462	0.9375	0.9528	0.9670	0.9761
		1	2	0.0408	0.0241	0.0746	0.0520	0.9535	0.9522	0.9749	0.9749
		2	1	0.0240	0.0240	0.0492	0.0506	0.9278	0.9528	0.9626	0.9778
		2	2	0.0288	0.0234	0.0545	0.0486	0.9415	0.9495	0.9707	0.9760
		3	5	0.0307	0.0242	0.0593	0.0496	0.9507	0.9490	0.9757	0.9753
		5	3	0.0227	0.0235	0.0447	0.0464	0.9415	0.9519	0.9694	0.9754
		5	5	0.0275	0.0258	0.0529	0.0498	0.9475	0.9496	0.9727	0.9750
		5	10	0.0304	0.0265	0.0589	0.0518	0.9548	0.9512	0.9754	0.9740
		10	5	0.0239	0.0263	0.0492	0.0519	0.9392	0.9477	0.9695	0.9740
		10	10	0.0276	0.0270	0.0526	0.0511	0.9508	0.9520	0.9763	0.9775
		20	20	0.0272	0.0265	0.0523	0.0516	0.9471	0.9475	0.9750	0.9755
2	2	1	1	0.0334	0.0226	0.0639	0.0500	0.9355	0.9503	0.9644	0.9738
		1	2	0.0419	0.0270	0.0766	0.0524	0.9515	0.9499	0.9750	0.9750
		2	1	0.0265	0.0265	0.0489	0.0507	0.9247	0.9498	0.9583	0.9752
		2	2	0.0300	0.0251	0.0565	0.0505	0.9438	0.9497	0.9690	0.9742
		3	5	0.0314	0.0251	0.0603	0.0513	0.9496	0.9481	0.9748	0.9743
		5	3	0.0238	0.0242	0.0485	0.0500	0.9402	0.9488	0.9698	0.9777
		5	5	0.0274	0.0255	0.0551	0.0513	0.9480	0.9511	0.9740	0.9761
		5	10	0.0323	0.0273	0.0628	0.0540	0.9520	0.9490	0.9760	0.9741
		10	5	0.0246	0.0270	0.0484	0.0509	0.9396	0.9485	0.9708	0.9767
		10	10	0.0245	0.0235	0.0508	0.0494	0.9493	0.9511	0.9748	0.9753
		20	20	0.0275	0.0273	0.0532	0.0524	0.9473	0.9480	0.9743	0.9750

다음으로 본 논문의 목적인 가설검정에 대해 제안된 통계량들을 비교해 본다. 귀무가설  $H_0 : \psi = \psi_0$ 과 대립가설  $H_1 : \psi \neq \psi_0$ 에 대해  $r$ 과  $r^*$ 의 제1종오류와 검정력을 계산한다. 이 때, 편의상  $\psi_0=1$ 로 가정하였으며, 표본의 수와  $\psi$ 의 값에 변화에 따라 10,000번의 확률표본을 독립적으로 추출하여 계산한 결과가 표 4.3이다. 표 4.3은 유의수준 0.05를 기준으로 작성하였다. 표 4.3의 추정된 확률에서 보듯이 표본의 수가 작은 경우에도  $r^*$ 의 제1종오류는 0.05의 부근의 값을 가지나  $r$ 통계량은 제1종오류의 확률

이 표본의 수가 작을 때 크다는 것을 확인할 수 있다. 표본의 수가 작은 경우, 제1종오류의 확률에서나 검정력에서  $r$ 을 사용하는 것 보다  $r^*$ 를 사용하는 것이 더 바람직하다는 사실을 알 수 있다.

표 4.3 귀무가설  $H_0 : \psi = 1$ 과 대립가설  $H_1 : \psi \neq 1$ 에 대한 제1종오류와 검정력

		$\nu = 0.5$									
		$\psi = 1$		$\psi = 3$		$\psi = 5$		$\psi = 7$		$\psi = 9$	
$m$	$m$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$	$r$	$r^*$
1	1	0.0668	0.0468	0.1497	0.1126	0.2469	0.1910	0.3266	0.2588	0.4091	0.3357
2	1	0.0648	0.0498	0.1890	0.1852	0.3593	0.3573	0.4739	0.4725	0.5618	0.5615
1	2	0.0645	0.0497	0.1623	0.1096	0.2773	0.1886	0.3953	0.2849	0.4801	0.3575
2	2	0.0564	0.0473	0.2528	0.2263	0.4655	0.4283	0.6173	0.5861	0.7203	0.6900
5	3	0.0567	0.0510	0.4501	0.4527	0.7599	0.7618	0.8876	0.8888	0.9392	0.9402
3	5	0.0528	0.0489	0.4213	0.3809	0.7368	0.7030	0.8872	0.8643	0.9503	0.9360
5	5	0.0536	0.0498	0.5546	0.5423	0.8627	0.8550	0.9533	0.9506	0.9866	0.9845
10	5	0.0463	0.0449	0.6877	0.6990	0.9384	0.9410	0.9864	0.9871	0.9955	0.9956
5	10	0.0555	0.0533	0.6673	0.6371	0.9468	0.9361	0.9921	0.9890	0.9987	0.9978
10	10	0.0544	0.0526	0.8378	0.8332	0.9926	0.9918	0.9995	0.9995	1	1
20	20	0.0524	0.0517	0.9889	0.9887	1	1	1	1	1	1
		$\nu = 1$									
1	1	0.0698	0.0491	0.1496	0.1116	0.2315	0.1786	0.3220	0.2553	0.4058	0.3289
2	1	0.0660	0.0510	0.1946	0.1911	0.3499	0.3478	0.4856	0.4846	0.5623	0.5615
1	2	0.0625	0.0459	0.1688	0.1095	0.2885	0.2010	0.3942	0.2869	0.4914	0.3674
2	2	0.0570	0.0474	0.2506	0.2219	0.4610	0.4219	0.6143	0.5780	0.7251	0.6954
5	3	0.0556	0.0497	0.4460	0.4491	0.7553	0.7575	0.8865	0.8875	0.9408	0.9413
3	5	0.0567	0.0509	0.4118	0.3748	0.7336	0.6967	0.8840	0.8614	0.9471	0.9334
5	5	0.0551	0.0514	0.5434	0.5287	0.8656	0.8592	0.9612	0.9581	0.9853	0.9846
10	5	0.0530	0.0511	0.6887	0.6975	0.9397	0.9428	0.9850	0.9851	0.9957	0.9960
5	10	0.0519	0.0496	0.6679	0.6343	0.9418	0.9304	0.9924	0.9897	0.9979	0.9976
10	10	0.0531	0.0507	0.8459	0.8411	0.9903	0.9899	0.9995	0.9995	1	1
20	20	0.0494	0.0488	0.9908	0.9903	1	1	1	1	1	1
		$\nu = 2$									
1	1	0.0692	0.0500	0.1474	0.1145	0.2378	0.1855	0.3332	0.2679	0.4027	0.3303
2	1	0.0682	0.0514	0.1963	0.1937	0.3604	0.3593	0.4734	0.4718	0.5607	0.5597
1	2	0.0647	0.0506	0.1689	0.1102	0.2802	0.1946	0.3956	0.2904	0.4871	0.3665
2	2	0.0567	0.0480	0.2528	0.2240	0.4704	0.4333	0.6196	0.5824	0.7151	0.6839
5	3	0.0568	0.0515	0.4434	0.4461	0.7519	0.7539	0.8884	0.8897	0.9466	0.9476
3	5	0.0519	0.0469	0.4137	0.3691	0.7342	0.6975	0.8837	0.8596	0.9492	0.9387
5	5	0.0547	0.0517	0.5514	0.5370	0.8587	0.8510	0.9574	0.9550	0.9823	0.9816
10	5	0.0538	0.0506	0.6908	0.7006	0.9384	0.9409	0.9847	0.9850	0.9954	0.9956
5	10	0.0513	0.0492	0.6603	0.6299	0.9441	0.9341	0.9903	0.9882	0.9985	0.9981
10	10	0.0504	0.0489	0.8430	0.8391	0.9919	0.9916	0.9992	0.9992	1	1
20	20	0.0481	0.0472	0.9888	0.9884	1	1	1	1	1	1

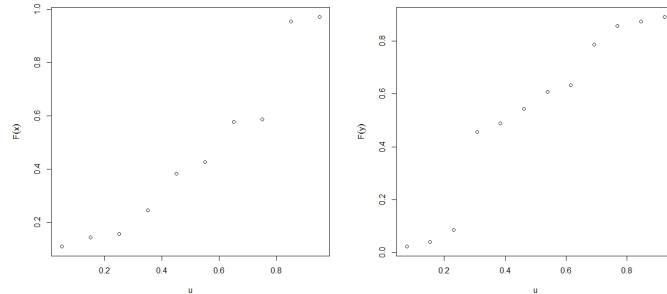
예제 4.1 다음의 자료는 이정희와 이우동 (2008)의 직류전위차법 실험에서 측정한 자료의 일부를 자연 로그 변환한 값이다.  $x$ 와  $y$ 는 실험조건에서 노치의 간격이 다른 두 집단 군이다.

$x$	0.583	0.491	0.983	0.305	0.275	1.052	0.316	0.588	0.381	0.466		
$y$	0.259	1.166	0.819	0.841	0.764	1.103	1.002	0.343	0.719	0.6919	0.213	1.133

위의 자료로부터 추정된  $\theta_1$ 와  $\theta_2$ 의 최대우도추정값은  $\hat{\theta}_1 = 4.132694$ ,  $\hat{\theta}_2 = 2.236418$ 이며,  $\hat{\psi} = 1.847908$ 이다.

위의 추정량을 이용하여 Maxwell분포에 대한 확률그림 (probability plot)을 그렸다. 결과는 그림 4.1과 같다. 그림에서 보듯이 두 개의 자료군은 가정된 분포에서 크게 벗어나 보이지 않는다.



그림 4.1 자료  $x$ 와  $y$ 에 대한 확률그림

이제 귀무가설  $H_0 : \psi = 1$ 과 대립가설  $H_1 : \psi \neq 1$ 에 대한 검정을 실시해 보자. 자료로부터 추정된  $\hat{\psi}$ 의 값이 1 보다 크다. 검정통계량의 값은  $r=1.727297$  ( $p=0.08411432$ )이고,  $r^*=1.703718$  ( $p=0.0884338$ )이었다. 유의수준 5%에서 두 집단의 모수는 같다.

## 5. 결론

이 논문에서는 독립인 두 개의 Maxwell분포의 모수비를 근사적으로 검정하는 절차에 대해 연구하였다. 모수비를 검정할 통계량의 정확한 분포를 찾기 어려운 경우이기 때문에 표준정규분포로 수렴하는 근사 통계량들을 제안하였다.

제안된  $r$  통계량과  $r^*$  통계량은 표본의 크기가 커짐에 따라 표준정규분포로 수렴한다는 것을 보였다. 특히,  $r^*$ 는 표본의 크기가 작은 경우에도 표준정규분포로 빨리 수렴한다는 것을 밝혔다. 또한, 모의실험을 통하여 제안된 검정통계량에 대한 제1종오류와 검정력 측면에서 비교하였다. 그 결과, 표본의 크기가 작은 경우  $r^*$ 를 사용하는 것이 더 바람직하다는 사실도 밝혔다. 끝으로 예제를 통하여 제안된 통계량을 활용하는 방법을 제시하였다.

## 참고문헌

- 이정희, 이우등 (2008). 직류전위차법 자료에 대한 통계적 자료분석. <한국데이터정보과학회지>, **21**, 139-146.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1986). Inference on full and partial parameters, based on the standardized signed log likelihood ratio. *Biometrika*, **73**, 307-322.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1991). Modified signed log likelihood ratio. *Biometrika*, **78**, 557-563.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1994). *Inference and asymptotics*, Chapman and Hall, London.
- Bekkera, A. and Rouxa, J. J. J. (2005). Reliability characteristics of the Maxwell distribution: A Bayes estimation study. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **34**, 2169-2178.
- Bingham, M. S. and Mardia, K. V. (1978). A small circle distribution on the sphere. *Biometrika*, **65**, 379-389.
- Breitenberger, E. (1963). Analogues of the normal distribution on the circle and the sphere. *Biometrika*, **50**, 81-88.
- Krishna, H. and Malik, M. (2009). Reliability estimation in Maxwell distribution with type-II censored data. *International Journal of Quality & Reliability Management*, **26**, 184-195.
- Lee, J. and Lee, W. D. (2008). Likelihood based inference for the shape parameter of Pareto distribution. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **19**, 1173-1181.

## Likelihood based inference for the ratio of parameters in two Maxwell distributions

Sang Gil Kang<sup>1</sup> · Jeong Hee Lee<sup>2</sup> · Woo Dong Lee<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Computer and Data Information, Sangji University

<sup>2</sup>School of Public Health, Daegu Haany University

<sup>3</sup>Department of Asset Management, Daegu Haany University

Received 6 December 2011, revised 17 December 2011, accepted 2 January 2012

### Abstract

In this paper, the ratio of parameters in two independent Maxwell distributions is parameter of interest. We proposed test statistics, which converge to standard normal distribution, based on likelihood function. The exact distribution for testing the ratio is hard to obtain. We proposed the signed log-likelihood ratio statistic and the modified signed log-likelihood ratio statistic for testing the ratio. Through simulation, we show that the modified signed log-likelihood ratio statistic converges faster than signed log-likelihood ratio statistic to standard normal distribution. We compare two statistics in terms of type I error and power. We give an example using real data.

*Keywords:* Maximum likelihood estimate, modified signed log-likelihood statistic, signed log-likelihood statistic, standard normal distribution.

---

<sup>1</sup> Associate professor, Department of Computer and Data Information, Sangji University, Wonju 220-702, Korea.

<sup>2</sup> Associate professor, School of Public Health, Daegu Haany University, Gyeongbuk 712-715, Korea.

<sup>3</sup> Corresponding author: Professor, Department of Asset Management, Daegu Haany University, Gyeongbuk 712-715, Korea. E-mail: wdlee@dhu.ac.kr