유체-구조 연성해석을 통한 원주의 와유기 진동 해석

김 세 훈¹, 안 형 택¹, 유 정 수¹, 신 현 경¹, 권 오 조², 서 희 선² ¹울산대학교 조선해양공학부, ²국방과학연구소 제6기술연구본부

FLUID-STRUCTURE INTERACTION ANALYSIS FOR VORTEX-INDUCED VIBRATION OF CIRCULAR CYLINDER

S.H. Kim,¹ H.T. Ahn,^{*1} J.S. Ryue,¹ H.K. Shin,¹ O.J. Kwon² and H.S. Seo² ¹School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Univ. of Ulsan

²6th Research and Development Institute, Agency for Defense Development

Fluid-Structure Interaction analysis of a circular cylinder surrounded by incompressible turbulent flow is presented. The fluid flow is modeled by incompressible Navier-Stokes equations in conjunction with large-eddy simulation for turbulent vortical flows. The circular cylinder is modeled as elastic continuum described by elasto-dynamic equation of motion. Finite element method based approach is utilized for unified formulation of fluid-structure interaction analysis. The magnitude and frequency of structural response is analysed in comparison to the driving fluid forces.

Key Words : 유체-구조 연성해석(Fluid-Structure Interaction), 와흘림(Vortex Shedding), 와유기진동(Vortex-Induced Vibration), 유한요소법(Finite Element Method)

1. 서 론

복잡한 유동에 노출되어 있는 해양구조물에는 주위 유동에 의한 하중이 지속적으로 작용하며 이로 인하여 구조물의 변 형과 운동이 야기된다. 해양 구조물의 주위 유동으로 인한 진 동은 구조물의 안전, 안정성뿐만 아니라 수명에도 큰 영향을 미친다. 이러한 유동유기 진동현상의 예측을 위해서는, 해양 구조물에 주위 유동현상에 대한 이해와, 이로 인하여 구조물 에 작용하는 유체력의 예측이 필요하며, 최종적으로 유체력에 의한 구조물의 운동을 해석하여야 한다. 이와 같은 유동유기 진동은 유체-구조 상호작용(fluid-structure interaction)의 전형적 인 예로서 유체-구조 연성해석(fluid-structure coupled analysis) 을 통하여 접근이 가능하다.

유동-구조 연성해석은 서로 상이한 해석영역의 특성상, 유

Received: November 17, 2011, Revised: March 2, 2012, Accepted: March 9, 2012. * Corresponding author, E-mail: htahn@ulsan.ac.kr DOI http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2012.17.1.029

© KSCFE 2012

체유동 해석기법과 구조 동역학 해석기법의 연성을 필요로 한다. 유체유동해석의 경우 전통적으로 편미분방정식을 주어 진 격자계(grid system)에서 근사하는 유한차분법(finite difference method)이나 유체유동을 기술하는 보존방정식에 기 반한 유한체적법(finite volume method)이 활용되어 왔다. 반면, 구조해석의 경우 탄성체의 거동을 기술하는 방정식과 변분원 리(variational principle)에 기반한 유한요소법(finite element method)이 수치해석 방법상의 주류를 이루고 있다.

유체-구조 연성해석의 경우, 유체유동과 구조해석분야에서 각기 개발된 수치기법을 조합하여 수행할 수 있다[1,2,3].

반면, 최근의 유체-구조 연성해석의 경향은 구조해석 뿐만 아니라 유체유동해석에 까지 유한요소법을 적용함으로써 유 동-구조 연성해석을 동일한 방법론을 기반으로 해석하는 사례 가 보고되고 있다[4]. 이는, 비교적 최근에 활발히 연구되고 있는 유한요소법기반의 유동해석법에 발전에 힘입은 바라고 판단된다[5,6].

본 논문에서는 유한요소기반의 상용 해석코드[7]를 이용하 여 원주 주위에 3차원 비정상 유동해석과 변형 가능한 원주 에 대한 탄성체 모델링과 3차원 탄성체동역학 해석을 동시에 수행함으로써, 유체와 구조물을 연성현상을 해석하였다. 이를 통하여 3차원 비정상 유동이 3차원 탄성체 원주에 미치는 영 향을 정량적으로 예측하였다.

본 논문은 아래와 같이 구성되어 있다. 먼저, 다음절에서 유체-구조 연성해석을 위하여 사용된 유체유동과 탄성체 동역 학 지배방정식을 소개 한다. 이어지는 절에서는 계산영역을 설정하고 해석을 위한 유한요소 모델을 소개한다. 유체-구조 연성을 위한 연성(Coupling) 방법 또한 간략히 소개한다. 다음 절에서는 원주주위 와류동에 의하여 발생하는 원주의 구조 동역학적인 응답이 구조물의 반력과 변위 측면에서 가진력에 해당하는 유체유동의 와흘림 주파수와 비교하여 소개된다. 마지막 절에서는 본 논문의 결과를 정리하고 향후 연구 진행 방향에 대하여 기술한다.

2. 지배 방정식

2.1 비압축성 Navier-Stokes 방정식

점성을 가진 비압축성 유체 유동을 기술하는 Navier-Stokes 방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$
⁽²⁾

이 식에서 ρ는 유체 밀도, ν는 유체 속도벡터, τ는 비압축성 뉴턴유체(newtonian fluid)의 응력텐서(stress tensor) 로 다음과 같이 표현된다.

$$\tau = -pI + 2\mu\epsilon \tag{3}$$

여기서 p는 유체 압력, I는 단위 행렬(identity matrix), μ 는 유체 점성계수, ϵ 은 변형률 텐서(strain rate tensor)로 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}) \tag{4}$$

해석에 사용된 유체 물성치는 해수(sea water)의 표준치를 사용하였다.

2.2 대와류 해석

본 논문에서 고려하는 원주주위 유동의 경우, 레이놀즈수 가 약 O(10⁴)으로서 원주 하방의 후류영역의 경우 난류유동 으로 판단된다[8]. 본 논문에서 다루고자 하는 문제는 원주 주위의 주기적인 와흘림(vortex-shedding)에 의하여 원주에 작 용하는 상하방향의 유체력에 의한 원주의 구조 동역학적인 응답에 관심이 있다. 이를 위해서는 원주에 작용하는 가진력 의 주성분인 원주주위 압력 분포를 정확히 예측하는 것이 중 요하며, 경계층 박리 이후에도 비교적 정확도가 높다고 알려 져 있는 대와류 해석법(Large-eddy Simulation)을 이용하여 원 주 주위 유동을 해석하였다.

본 논문에서는 해석에 사용된 상용 소프트웨어인 ADINA[7]에서 제공하는 LES-Standard 모델을 사용하였으며 이때 도입한 점성모델은 다음과 같이 표현된다.

$$\mu = \mu_0 + \mu_t \tag{5}$$

여기서 μ_0 는 Laminar Viscosity이며 μ_t 는 Turbulence 모델에 의한 Eddy Viscosity이다. 본 논문에서 사용한 μ_t 는 다음과 같 이 표현된다.

$$\mu_t = \sqrt{2} \rho k_D^2 \Lambda^2 D \tag{6}$$

여기서 D는 변형률 텐서로부터 유도된 유효변형률(effective deformation rate), k_D 는 무차원 모델 상수, Λ 는 국부적인 유 한요소 크기이다.

2.3 탄성체동역학

유동-구조 연성해석에서는 유동해석 결과로 얻어지는 유체 력이 구조 동역학 해석에 외력으로 작용한다. 구조물의 변형 은 유체유동에 다시 영향을 주며, 유체 동역학(fluid dynamics) 과 탄성체 동역학(Elasto-dynamics) 영역은 연성된 형태로 해석 되게 된다.

정상상태를 찾아가는 유동-구조 연성현상의 경우 유체유동 과 구조해석 부분이 분리되어 해석되는 경우도 있는 것으로 알려져 있다[7]. 하지만, 본 논문의 경우 원주의 유동유기진동 (Flow-induced vibration)이 시간에 따른 구조물의 운동을 나타 내는 만큼 비정상 상태 해석을 요구하게 된다. 따라서 본 논 문에서는 유동-구조 연성해석을 위하여 유체유동과 구조동역 학을 시간영역에서 결합하여 동시에 해석을 수행하며, 소위 양방향 연성(two-way coupling) 방법으로 유동-구조 연성해석 을 진행한다[3.4]. 선형탄성체의 운동을 기술하는 운동방정식 (Elasto-dynamics equation)은 아래와 같이 표현된다.

$$\mu \nabla^2 u + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot u) + F = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
(7)

여기서 μ 는 탄성체의 전단탄성계수(shear modulus), λ 는 고체



Fig. 1 Computational domain

의 체적탄성계수(bulk modulus)이다. 또한 u는 재료의 3차원 변위벡터, ρ_s 는 재료의 밀도이며, F는 주위 유체로부터 작용 하는 단위 체적당 가진력이다.

3. 유체-구조 연성해석

3.1 계산 영역

본 절에서는 해석을 위하여 사용된 계산영역과 유한요소 모델에 대하여 기술하였다. 먼저 유체유동에 사용된 해석영역 은 Fig. 1에 나타나 있다. 유동 해석을 위한 계산영역은 원주 를 둘러싸는 동심원주 형태로 생성하였으며, 경계조건은 유동 영역의 전면부와 후면부를 Inlet과 Outlet을 설정하였고, 원주 의 축방향 양쪽 경계면은 전단응력이 작용하지 않는 Slip Wall로 설정하였으며, 실린더 표면부분은 미끄럼이 허용되지 않는(no-slip) 벽(wall)으로 설정하였다. 계산영역 중앙에 원주 가 위치하였으며, 계산영역의 지름은 D=40d 로 하여 원주 지 름의 40배가 되도록 하였다. 축방향 계산영역은 L=20d가 되 도록 하였다. 관심영역인 고체 원주의 지름은 d=0.021m 이고, 길이는 축방향 길이는 L=0.42m이다.

Fig. 2와 Fig. 3은 각각 유체유동과 구조 동역학 해석에 사용된 유한요소 격자를 보여주고 있다. 유동장 계산을 위한 격자는 반경방향(radial direction), 원주방향(circumferential direction), 횡/축방향(spanwise/axial direction) 모두 64개 셀로 분할해서 계산하였고 각각의 유체요소는 Tri-Linear 형상함수 (shape function)를 사용하였다. 실린더 자체, 즉 구조 동역학 해석을 위한 실린더 단면의 격자는 총 5개의 patch로 나누었고 각 patch별로 16개 요소로 분할하였고, 횡방향 으로는 총 8 개의 요소로 분할하였다. 각각의 구조 요소에는 27절점을 부여함으로써 Tri-Quadratic 형상함수를 사용하여 계산하였다. 유체-구조 연성해석 실제 계산은 Dual Intel- Xeon E5420



Fig. 2 Computational grid for fluid flow. Top-xy plane view, bottom-perspective view



Fig. 3 Computational grid for structural dynamics. Top-cross sectional view, bottom-perspective view

2.5GHz CPU와 16GB memory를 탑재한 Workstation을 사용하 였으며 총 8개 core를 사용하여 병렬계산을 수행하였다.

격자 생성에 있어서 유체-구조 연성해석에서 주의할 사항 중에 하나는 유체-구조 경계면에서 격자의 연속성을 여하히 만족 시킬 것 인가 하는 문제가 있다. 일반적으로 고 레이놀 즈수 점성유동해석에서는 벽면근처 발달하는 경계층의 해석 을 위하여 아주 조밀한 유체격자가 요구된다. 반면 구조물의 경우, 특별한 응력집중이 발생하지 않는 경우 기하학적 형상 을 정확히 표현하면 됨으로 비교적 성긴 고체격자가 요구된 다.

본 논문에서는 Fig. 4에서 보이는 바와 같이 유동영역과 원주의 경계면, 즉 fluid-solid 인터페이스에서는 비균일 격자 (non-matching/non-conforming grid)를 사용하였다. 이는 유체유 동과 고체변형해석에 서로 상이하게 요구되는 격자 조밀도에 대한 불일치를 해소하기 위해서이다. 유체-고체 경계면에서 비균일 격자를 사용함에도 불구하고, 유체-구조 연성해석과정 에서는 경계면에서 변위와 응력의 연속성을 만족시키면서 진 행하게 된다. 이는 구조물의 변형이 발생 하였을 때도 동일하 게 적용되며, 매 시간간격 마다 비선형 유체-구조 연성시스템 의 수렴을 위한 내부 반복에 의하여 주어진 허용오차 (tolerance)내로 수렴될 때 가지 반복된다[7]. 구조물의 변형에 의하여 주위 유체격자에도 변형이 유발된다. 유체격자의 변형 은 격자 자체를 가상의 탄성체로 가정하여 격자변형을 해석



Fig. 4 Fluid-solid Interface, Non-matching grid is utilized



Fig. 5 Flow configuration

한다.

본 논문에서 고려하는 구조물은 선형탄성체(linear elastic material)라고 가정한다. 즉, 재료 자체의 비선형성(material non-linearity)을 고려하지 않는다. 뿐만 아니라, 세장(slender) 구조물에서 발생할 수 있는 미소 변형율에 의해서 발생할 수 있는 대변형(small-strain/large-deformation)에 의한 기하학적인 비선형성(geometric non-linearity)도 고려하지 않는다. 하지만, 비선형 유체유동방정식과 연성됨으로 인하여 발생하는 고체 경계조건에서의 비선형성(boundary/traction non- linearity)이 발 생한다고 볼 수 있다. 다시 말하면, 구조물 자체만을 고려할 때는 선형해석이 될 수 있지만, 유체-구조 연성해석으로 인하 여 비선형 해석을 필요하게 된다. 이러한 비선형 유체-고체 시스템을 해석하기 위하여 매 시간간격 마다 내부반복 (sub-iteration)을 수행한다. 이러한 과정을 통하여 매 시간간격 마다 유체-고체 경계면에서 응력과 변위가 주어진 허용 오차 내에서 수렴하였는가를 판단하여 해의 수렴성을 판정한다. 본 논문에서 적용한 유통-구조 연성을 위한 수렴조건은 경계 면에서 응력 수렴조건(stress criterion)과 변위 수렴조건 (displacement criterion)으로 나누어지며 각각은 아래와 같이 표 혀됚다.





Fig. 7 Lift coefficient history

Stress Criterion :

$$r_{\tau} \equiv \frac{\|\tau_f^k - \tau_f^{k-1}\|}{\max\left(\|\tau_f^k\|, \epsilon_0\right)} \le \epsilon_{\tau} \tag{8-A}$$

Displacement Criterion :

$$r_d = \frac{\|d_s^k - d_s^{k-1}\|}{\max\left(\|d_s^k\|, \epsilon_0\right)} \le \epsilon_d \tag{8-B}$$

여기서 τ 는 경계면에서의 응력텐서(Stress Tensor)이고, d는 경계면에서 변위벡터(Displacement), ϵ_{τ} 와 ϵ_{d} 는 각각조건의 수 렴판정에 필요한 허용오차(tolerances)이며 현재 계산에서는 10^{-8} 을 사용하였으며, k는 매 시간 간격마다 수행하는 내 부반복 인자이다.

4. 결 과

4.1 유동 조건

원주 주위 유체-구조 해석을 통하여 Fig. 5에서 보이는 바



와 같이 원주 축에 수직에 방향으로 유동이 유입될 때 탄성 원주에 작용하는 유체력을 각각의 방향 성분인 유동 (stream./X-direction) 방향, 수직 방향(croess flow/y- direction), 횡 방향(spanwise/z-direction) 유체력을 구하고, 이러한 유체력 에 의한 탄성 원주 양쪽 경계에 작용하는 비정상 반력을 구 하였다.

4.2 비정상 유체력: C_{drag}, C_{lift}, 장력

Fig. 6~7은 입구속도 2.1m/s에 대하여 원주에 작용하는 항 력과 양력에 해당하는 비정상 유체력을 유동-구조 연성해석을 통하여 구한 결과를 나타내었다.

여기서 Cdrag.lift는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$C_{drag,lift} = \frac{F_{x,y}}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 A_{cyl}}$$
(9)

 $F_{x,y}$ 는 x, y축 방향으로 원주가 받은 힘이고, ρ 는 유체의 밀도, U_{∞} 는 유체의 입구 자유속도(Freestream velocity)이다. 또한 A_{cyl} 는 원주의 유동수직면에 투사된 면적으로 계산하였 다.

본 해석의 경우, 원주의 변형을 고려하였으나, 원주의 변형 량이 비교적 적음으로 인하여 원주에 작용하는 유체력은 강 체 원주에 대하여 일반적으로 알려진 실험 저항계수 ($C_{drag} \simeq 1.2$, $Re \approx 4 \times 10^4$ [9])를 고려할 때 특별히 다르지 않음을 확인하였다.

또한 Fig. 8은 원주 주위 와흘림에 의하여 실린더 양쪽 끝 단에 걸리는 길이방향 반력(장력성분)의 변화를 나타낸 것이 다. 원주의 장력의 변화추이는 유동 방향의 힘, 즉 항력성분 의 변화와 유사함을 알 수 있다. 이는 원주의 항력성분과 장 력성분은 유동유기진동의 가진력 성분, 즉 양력성분에 종속되



Fig. 9 Spectral analysis of time history of drag (stream direction)



Fig. 10 Spectral analysis of time history of lift (vertical direction)



Fig. 11 Spectral analysis of time history of tension (axial direction)

어 변화함을 간접적으로 보여주는 것이라고 판단된다.

Fig. 9~11은 각각 항력(x-direction: freestream direction), 양력 (y-direction: cross-flow direction), 장력(z-direction, spanwise direction) 성분에 대한 주파수 분석결과를 보여주고 있다. 와 흘림에 의하여 원주에 작용하는 주된 가진력 성분인 양력의 경우 약 18Hz에서 최대 주된 주파수 성분을 보여주는 것을 알 수 있다. 이는 무차원 가진력 주파수, 즉 Strouhal number



Fig. 12 Displacement trajectory of cylinder center

가 *St* = *fU*/*d* ≅ 0.2 에 해당하는 것으로 실험에서 보고되는 값[9]과 잘 일치함을 알 수 있다. 뿐만 아니라, Fig. 9와 11에 서는 항력성분뿐만 아니라 장력성분의 경우 공통적으로 가진 력인 양력성분의 두 배에 해당하는 약 37Hz에서 주된 주파수 성분을 보이는 것을 보여주고 있다. 특히 장력성분이 양력성 분 두 배의 주파수로 진동함을 보인 것은, 유동-구조 연성해 석을 통하여 구할 수 있는 결과로 본 연구의 주요 결과중의 하나라고 판단된다.

Fig. 9~11에서 구한 지배적인 주파수성분은 Table 1에 정리 하였다.

Fig. 12에서는 진동하는 원주의 중앙단면의 궤적을 그린 것이다. 원주 주위 와흘림에 의하여 진동이 시작되면서, 원형 단면의 궤적인 점진적으로 세로로 긴 "8"자 모양에 수렴되는 것을 볼 수 있다. 이는 대부분의 원주 변형이 양력방향성분의 가진력에 의하여 유기됨을 확인할 수 있다. 뿐만 아니라, "8" 자 모양의 한 싸이클을 이루는 동안 항력방향 진동은 두 번 의 주기이루는 것을 볼 수 있다. 마지막으로, 이러한 궤적을 따라 원주의 진동으로 인하여 장력방향 역시 두 번의 주기를 이루는 것으로 예측되고 Fig. 12과 같이 실제 계산에서도 확 인 하였다.

Fig. 12에서 보이는 것과 같이 계산 초기에 원주중심의 위 치는 유동방향의 항력에 의하여 유동방향으로 후퇴하는 것을 볼 수 있다. 이후 와흘림의 발달에 의하여 양력 변화에 의한 수직방향의 진동이 항력 변화에 의한 유동방향 변위보다 큰 것을 확인 할 수 있다. 이는 Fig. 6~7에서 보이는 바와 같이 각방향의 가진력, 즉 양력성분과 항력성분 진폭의 차이에 의

Table 1 Dominant frequencies from excitation and response

Direction	Peak Frequency
Drag (x-direction)	37.28
Lift (y-direction)	17.28
Tension (z-direction)	38



Fig. 13 Velocity contours of flow field



Fig. 14 Pressure contours of flow field

하여 유발된 것으로 판단된다.

Fig. 13와 Fig. 14은 완전 발달된 와흘림에 의하여 발생하는 원주 주위 Velocity와 Pressure를 Contour한 결과이다. 초기의 균일유동입구조건과 원주 및 계산영역의 대칭성으로 인하여 비대칭 유동인 와흘림이 발달하기까지 상당한 계산이 필요함을 확인하였다. 본 계산에서는 특별한 초기조건은 가하지 않고, 계산상의 절단오차(Truncation)의 축적과 비선형 방정식의 특성에 의하여 이러한 비대칭성이 발달하는 것으로 확인하였다. Fig. 13~14에서 보이는 바와 같이 원주 후류에서 압력 장과 속도장의 진동으로 보아 와흘림이 잘 발달되었음을 확인할 수 있다.

Fig. 15은 유체-구조 연성해석에 의하여 외부 유동장에 반 응하는 원주의 순간적인 변형을 보여주고 있다. Fig. 15-(a)는 FSI 해석의 결과로 원주가 양쪽 끝단이 고정되어 있을 때 x 방향으로 받는 힘을 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림을 보면 고정된 양쪽 끝단보다는 가운데에 유동방향의 변위가 집중되 는 것을 볼 수 있다. Fig. 15-(b)는 Lift의 힘이 발생하는 y방향 으로 변위가 일어난 것을 그림으로 나타낸 것인데, 결과가 보 여진 시점에서 원주가 아래 방향으로 진동하고 있었음을 유 추 할 수 있다. Fig. 15-(c)의 경우 축방향 변위를 나타내고 있 다. 원주가 유체력에 의하여 축방향으로 인장되고 있으며, 구



Fig. 15 Structural deformation due to vortex-induced vibration

조물 양쪽의 경계조건에 의하여 가운데에서 대칭조건이 만족 되며, 각각 원주 중앙부를 항하여 변형이 발생하였음을 확인 할 수 있다.



양단이 고정된 변형 가능한 탄성 원주 주위의 비정상 유동 에 의한 와유기 진동 현상을 유체-구조 연성해석기법을 적용 하여 해석 하였다. 구조 동역학 뿐만 아니라 유체 지배방정식 을 동일한 수치해석법, 즉 유한요소법을 적용하여 해석하였 다. 이를 통하여 유한요소 기반 해석법이 유체-구조 연성해석 에 적용될 수 있음을 확인하였다. 원주 주위의 와흘림에 의하 여 원주에 작용하는 변위 및 반력을 구하였다. 유동방향, 수 직방향, 횡방향에 대한 구조물의 반력을 유체의 와흘림 주파 수와 비교해 보았다. 원주의 수직방향 반력은 와흘림 주파수 와 일치함을 확인하였고, 원주의 유동방향 반력과 횡방향 반 력, 즉 장력, 은 와흘림 주파수의 두 배로 진동함을 유체-구조 연성해석을 통하여 확인 하였다. 본 논문에서는 원주에 수직 한 방향으로 유입되는 유동에 의한 구조물의 응답을 해석하 였으나, 향후 임의의 경사각을 가지는 경우에 대한 연구로 보 다 실질적인 경우에 대한 연구가 필요할 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 장보고-III 소나체계개발 과제인 '잠수함용 선배열 예인센서의 동특성 및 자세소음 모델링 연 구'의 일부로 수행되었음.

참고문헌

- [1] 2011, 한명륜, 안형택, "직교 격자를 이용한 저 레이놀즈 수 유동장내 다중 배치된 실린더의 와유기 진동 해석," 한국전산유체공학회지, 제16권, 제1호, pp 73-82.
- [2] 2011, 한명륜, 안형택, "직교격자를 이용한 단순 세장 구 조물의 와유기 진동 해석," 대한조선학회논문집, 제48권, 제3호.
- [3] 2006, H. T. Ahn and Y. Kallinderis, "Strongly coupled flow/structure interactions with a geometrically conservative ALE scheme on general hybrid meshes," *Journal of Computational Physics*, Vol.219, pp.671-696.
- [4] 2008, Y. Bazilevs, V.M. Calo, T.J.R. Hughes, and Y. Zhang, "Isogeometric fluid-structure interaction: Theory, algorithms and computations," *Computational Mechanics*, 43 3-37.
- [5] 1982, A. N. Brooks, and T. J.R. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.32, pp.199-259.
- [6] 1992, T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray, and R. Shih, "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.95, pp.221 - 242.
- [7] 2010, ADINA Theory and Modeling Guide Volume 3: ADINA CFD & FSI.
- [8] 2004, C.H.K. Williamson, and R. Govardhan, "Vortex-induced vibrations, Annual Review of Fluid Mechanics," Vol.36, pp.413-455.
- [9] 2009, F. M. White, Fluid Mechanics. 7th edition, Mcgraw-Hill.