

카오스 시스템의 동기화를 위한 샘플치 데이터 제어

Synchronization of Chaos Systems via Sampled-Data Control

이 태 희* · 박 주 현[†] · 권 오 민** · 이 상 문***
(Tae H. Lee · Ju H. Park · O. M. Kwon · S. M. Lee)

Abstract - This paper considers the synchronization problem of chaotic systems. For this problem, the sampled-data control approach is used to achieve asymptotic synchronization of two identical chaotic systems. Based on Lyapunov stability theory, a new stability condition is obtained via linear matrix inequality formulation to find the sampled-data feedback controller which achieves the synchronization between chaotic systems. Finally, the proposed method is applied to a numerical example in order to show the effectiveness of our results.

Key Words : Chaotic system, Synchronization, Sampled-data control

1. 서 론

Carroll 과 Pecorra [1]의 동중 카오스 시스템의 동기화에 대한 첫 연구 이후로, 오늘날 카오스 시스템의 동기화에 대한 연구는 여러 분야의 학자들로부터 큰 관심을 받고 있는 분야 중에 하나이다. 지난 수년간, 카오스 시스템의 동기화를 위하여 다양한 종류의 제어 기법들이 채택되어져 왔다. [2]에서는 카오스 시스템의 동기화를 위한 상태 궤환 제어가 제안되어졌으며, 이를 기반으로 [3]에서는 단일 상태 궤환 제어가 카오스 시스템의 동기화를 위하여 제안되어졌다. [4]에서는 적응제어 이득을 가지는 제어가 카오스 시스템의 동기화를 위하여 설계되어졌으며, 아울러 [5]에서는 변수 불일치 문제를 가지는 카오스 시스템의 동기화 문제를 해결하기 위하여 적응 제어 기법이 적용되어졌다. 또한, [6]에서는 카오스 시스템의 동기화를 위하여 슬라이딩 모드 제어 기법이 고려되어졌으며, 더 나아가 [7]에서는 적응 슬라이딩 모드 제어 기법을 알려지지 않은 변수를 가진 카오스 시스템의 동기화를 위하여 활용되어졌다. 또한, [8]에서는 선형 오차 피드백과 병렬 분산 보상 방법에 따라 TS 퍼지 모델을 기반으로한 카오스 시스템의 퍼지 동기화를 제안하였다.

반면, 디지털 하드웨어 및 통신 기술의 급격한 발달로 인해 대부분의 제어 시스템들은 제어가 플랜트에 네트워크로 연결된 시스템, 디지털 제어를 가지는 연속시간 플랜트 등과 같은 형태의 시스템들로 구현되어 질수 있게 되었다.

위와 같은 형태의 시스템에서, 샘플치 제어를 활용한 방법은 다른 제어기법들 보다 더 중요한 위치를 차지하게 된다. 여기서 샘플치 제어기란, 샘플링 주기동안 제어 신호가 상수로 존재하며, 오직 샘플링 순간에만 제어 신호가 변동되는 제어 신호를 가지는 제어를 말한다. 이러한 계단형태의 불연속 제어 신호를 고려한 안정한 제어기의 설계는 일반적인 연속신호를 고려한 제어기의 설계보다 좀 더 까다로운 절차를 요구한다. 이 문제를 해결하기 위하여, Mikheev와 Sobolev, Fridman [9] 팀과 Astrom, Wittenmark [10] 팀은 불연속인 제어 입력 신호를 시변 지연된 연속 신호로 생각하여 샘플치 제어기의 설계 및 안정성 해석을 수행하는 방법을 제안하였다. 이 연구 이후로, 위의 방법을 이용한 샘플치 제어기법에 대한 많은 연구가 수행되어 지고 있다. [11]에서는 강인한 H_{∞} 샘플치 제어기법이 제안되어졌고, 또한, [12]에서는 샘플치 퍼지 제어가 제안되어졌다. 게다가 많은 연구자들이 이 시변 시간지연된 연속 신호 방법을 이용한 샘플치 제어기법을 뉴럴 네트워크, 퍼지 시스템, 복잡계망 등과 같은 다양한 분야에 적용하고 있다. 하지만 카오스 시스템의 동기화를 위한 샘플치 제어기의 설계는 아직까지 연구되어지지 않고 있다.

지금까지 언급된 내용들을 토대로, 본 논문에서는 샘플치 제어기법을 이용한 카오스 시스템의 동기화에 대한 연구를 수행 할 것이다. 이를 위해 샘플치 제어 신호를 [9], [10]에서 제안한 시변 시간지연된 연속 신호로 고려하여 이론을 진행 할 것이다. 리아푸노프 안정성 이론을 바탕으로, 설계된 제어기의 존재 조건은 선형행렬부등식으로 유도되어진다. 선형행렬부등식을 이용한 접근법은 주어진 문제의 해결에 있어 수리적인 이점과 명료성 때문에 매우 각광받고 있는 기법이다. 이 선형행렬부등식 항은 다양한 불록적화 알고리즘에 의해서 쉽게 해를 찾을 수 있다. 마지막으로 수치 예제를 통해 제안된 제어기의 우수성을 보이겠다.

* 정 회 원 : 영남대 공대 전기공학과 박사과정
[†] 교신저자, 정회원 : 영남대학교 전기공학과 교수
E-mail : jessie@ynu.ac.kr
** 정 회 원 : 충북대학교 전기공학과 부교수
*** 정 회 원 : 대구대학교 전자공학부 조교수
접수일자 : 2012년 1월 19일
최종완료 : 2012년 3월 10일

2. 문제 설정

다음의 마스터 시스템과 슬레이브 시스템을 고려하자

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x(t)), \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bf(y(t)) + u(t), \tag{2}$$

여기서 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$ 와 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in R^n$ 은 상태 벡터이며, $f: R^n \rightarrow R^n$ 은 비선형 함수, $u(t)$ 는 제어입력, A, B 는 적절한 차원을 가지는 상수 행렬이다.

가정 1. 본 논문에서 다룰 카오스 시스템(1), (2)의 벡터함수 $f(\cdot)$ 는 다음의 섹터, 슬로프 조건을 만족한다.

$$b_i \leq \frac{f_i(\sigma_i(t))}{\sigma_i(t)} \leq a_i,$$

$$\beta_i \leq \frac{df_i(\sigma_i(t))}{d\sigma_i(t)} \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

여기서 σ 는 마스터와 슬레이브 시스템의 상태이고, a_i, b_i 는 각각 상한, 하한 섹터 조건이며, α_i, β_i 는 각각 상한, 하한 슬로프 조건이다.

동기화를 달성하기 위하여, 다음과 같이 오차벡터를 정의하자.

$$e(t) = y(t) - x(t). \tag{3}$$

오차 시스템 (3)의 동특성 식은 다음과 같다.

$$\dot{e} = Ae(t) + B\bar{f}(e(t)) + u(t), \tag{4}$$

여기서 $\bar{f}(e(t)) = f(y(t)) - f(x(t))$ 이다.

샘플치 신호를 이용한 제어기의 설계를 위하여, [9], [10]에서 제안된 시변 시간지연된 연속시간 신호형태의 제어 입력신호를 고려한다. 이를 위해 다음의 상태 궤환 제어기를 고려하자.

$$u(t) = Ke(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \tag{5}$$

여기서 K 는 제어 이득 행렬이고, t_k 는 Zero-Order-Hold (ZOH)의 갱신 시간이다. 샘플링 간격은 어떠한 $k \geq 0$ 인 정수에 대하여 다음을 만족한다고 가정한다.

$$t_{k+1} - t_k = h_k \leq h, \tag{6}$$

여기서 h 는 양의 상수로 최대 샘플링 간격이다.

따라서, $\tau(t) = t - t_k, t_k \leq t < t_{k+1}$ 라고 정의 하면, 제어기 (5)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u(t) = Ke(t_k) = Ke(t - \tau(t)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \tag{7}$$

제어기 (7)을 시스템 (4)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\dot{e} = Ae(t) + B\bar{f}(e(t)) + Ke(t - \tau(t)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \tag{8}$$

주요 결과를 유도하기전에 다음의 사실과 보조 정리를 제시한다.

사실 1. (Schur complement) 일정한 값의 대칭행렬 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 이 주어지고, $\Sigma_1 + \Sigma_3^T \Sigma_2^{-1} \Sigma_3 < 0$ 이면 다음을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3^T \\ \Sigma_3 - \Sigma_2 & \end{bmatrix} < 0, \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} -\Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_3^T & \Sigma_1 \end{bmatrix} < 0.$$

보조 정리 1. [13] 섹터 조건 $[a, b]$ 와 슬로프 조건 $[\alpha, \beta]$ 를 갖는 비선형 함수 $f(\cdot)$ 의 오차함수 $\bar{f}(y-x) = f(y) - f(x)$ 는 다음의 섹터 바운드를 가진다.

$$\beta_i \leq \frac{\bar{f}_i(e_i(t))}{e_i(t)} \leq \alpha_i.$$

보조 정리 2. [14] 임의의 상수 행렬 $M \in R^{n \times n}, M = M^T > 0$, 그리고 상수 $\gamma > 0$ 가 주어지면 벡터 함수 $x: [0, \gamma] \rightarrow R^n$ 는 다음과 같이 정의되는 적분 관계를 가진다.

$$\left(\int_0^\gamma x(s) ds \right)^T M \left(\int_0^\gamma x(s) ds \right) \leq \gamma \int_0^\gamma x^T(s) M x(s) ds.$$

3. 주요결과

본 장에서는 카오스 시스템의 동기화를 위한 샘플치 제어기의 설계를 수행할 것이다. 앞 장의 문제 설정을 토대로 안정한 샘플치 제어기의 존재 조건을 선형행렬부등식 형태로 유도되어 질 것이다.

정리 1. 만약 변수 h 가 주어지고, 다음의 선형행렬부등식 (9)을 만족하는 양한정 행렬 P, Q, Z 와 행렬 H, N_1, N_2 가 존재하면, 마스터 시스템과 슬레이브 시스템은 점근적으로 동기화된다.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 H + Z & 0 & \Omega_2 & A^T P \\ \star & -2Z & Z & 0 & H^T \\ \star & \star & -Z - Q & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -N_2 - N_2^T & B^T P \\ \star & \star & \star & \star & -2P + h^2 Z \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= PA + A^T P + Q - Z + N_1 \Delta + \Delta N_1^T, \\ \Omega_2 &= PB + \Delta N_2^T - N_1, \end{aligned}$$

이며, 제어 이득은 $K = P^{-1}H$ 으로 구해진다.

증명. 다음의 리아푸노프 함수를 정의하자.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t), \tag{10}$$

여기서

$$\begin{aligned} V_1(t) &= e^T(t)Pe(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-h}^t e^T(s)Qe(s)ds + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t e^T(s)\dot{Z}e(s)dsd\theta. \end{aligned}$$

$V_1(t)$ 와 $V_2(t)$ 의 미분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)\dot{P}e(t) \\ &= e^T(t)(PA + A^T P)e(t) + e^T(t)PK\bar{e}(t - \tau(t)) \\ &\quad + e^T(t - \tau(t))K^T P e(t) + e^T(t)PB\bar{f}(t) \\ &\quad + \bar{f}^T(t)B^T P e(t), \\ \dot{V}_2(t) &= e^T(t)Qe(t) - e^T(t-h)Qe(t-h) \\ &\quad + h^2 \dot{e}^T(t)\dot{Z}e(t) - \int_{t-h}^t \dot{e}^T(s)\dot{Z}e(s)ds \\ &= e^T(t)Qe(t) - e^T(t-h)Qe(t-h) + h^2 \dot{e}^T(t)\dot{Z}e(t) \\ &\quad - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s)\dot{Z}e(s)ds - \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{e}^T(s)\dot{Z}e(s)ds \end{aligned} \tag{11}$$

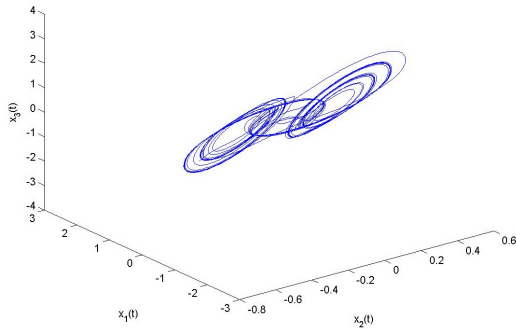


그림 1 Chua 회로의 상태 궤적
Fig. 1 The dynamic behavior of Chua's circuit

$$\begin{aligned} &\leq e^T(t)Qe(t) - e^T(t-h)Qe(t-h) + h^2 \dot{e}^T(t)\dot{Z}e(t) \\ &\quad - \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z - \bar{Z} \\ \star & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} e(t-\tau(t)) \\ e(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z - \bar{Z} \\ \star & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t-\tau(t)) \\ e(t-h) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

보조정리 2에서 정의된 $\bar{f}_i(e_i(t))$ 의 섹터 조건은 컨벡스 hull의 성질에 의해 다음의 식으로 표현된다.

$$\bar{f}_i(e_i(t)) = \Delta_i e_i(t), \tag{13}$$

여기서 Δ_i 는 컨벡스 hull $Co\{\alpha_i, \beta_i\}$ 를 구성하는 성분이다. 따

라서 식 (12)를 이용하면, 비선형 함수 $\bar{f}(e(t))$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\bar{f}(e(t)) = \Delta e(t), \tag{14}$$

여기서 $\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ 이다.

식 (14)와 행렬 N_1, N_2 를 고려하면 다음의 식은 항상 성립한다.

$$0 = 2 \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{f}(e(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} [\Delta - \bar{I}]. \tag{15}$$

수식의 명료성을 위해, 다음을 정의하고,

$$\zeta(t) = [e^T(t) e^T(t-\tau(t)) e^T(t-h) \bar{f}^T(e(t))]^T,$$

식 (11)과 (12), (15)를 이용하면, 다음의 리아푸노프 함수 (10)의 미분의 상한유계를 얻게된다.

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T(t)(\Xi + B^T \bar{Z} B)\zeta(t), \tag{16}$$

여기서

$$\begin{aligned} \Xi &= \begin{bmatrix} \Omega_1 PK + Z & 0 & \Omega_2 \\ \star & -2Z & Z & 0 \\ \star & \star & -Z - Q & 0 \\ \star & \star & \star & -N_2 - N_2^T \end{bmatrix}, \\ B &= [AK0B], \quad \bar{Z} = h^2 Z, \end{aligned}$$

이고 Ω_1, Ω_2 는 식(8)에서 정의되었다.

식 (16)에 사실 1을 적용하면 다음의 식을 얻게된다.

$$\Xi + B^T \bar{Z} B \leq \begin{bmatrix} \Xi & B^T \\ \star & \bar{Z}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

식(17)의 오른쪽에 $\text{diag}\{I, I, I, I, P\}$ 를 앞뒤로 곱하고, 부등식 $-P\bar{Z}^{-1}P \leq -2P + \bar{Z}$ 를 이용하면 식 (17)의 행렬은 식 (9)의 행렬과 등가이므로, 선형행렬부등식 (9)을 만족한다면, 제어이득 K 를 가지는 샘플치 제어기 (5)는 카오스 시스템 (1)과 (2)를 점근적으로 동기화시킨다. 이로써 증명을 마친다.

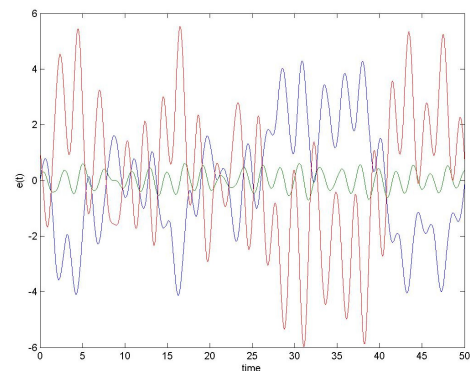


그림 2 제어 입력이 없는 경우의 오차 궤적
Fig. 2 The uncontrolled error signals

3. 수치예제

본 장에서는 수치예제를 통해 본 논문에서 제안된 제어기의 유효성을 보이겠다.

다음의 카오스 추아 회로의 변수들을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -am_1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -a(m_0 - m_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(x_i(t)) = \frac{1}{2}(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|),$$

여기서 $a = 9, b = 14.28, c = 1, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$ 이다. 그림

1은 Chua 회로의 카오틱한 동특성을 나타낸 것이다. 잘 알려진대로 Chua 회로의 비선형 함수 $f(\bullet)$ 은 섹터 조건 $[0, 1]$ 와 슬로프 조건 $[0, 1]$ 를 가진다. 위 변수값과 샘플링 간격, h , 를 0.2초로 주어지면, 정리 1에서 제안된 선형행렬 부등식 (8)는 다음의 값으로 계산되어 진다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.0822 & -0.0719 & 0.0539 \\ -0.0719 & 0.6957 & -0.0363 \\ 0.0539 & -0.0363 & 0.0505 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -2.5705 & -6.0798 & 0.0999 \\ -0.9688 & -0.6535 & -1.0067 \\ 0.4166 & 8.5928 & -1.2860 \end{bmatrix}.$$

본 예제를 위하여, 마스터 시스템과 슬레이브 시스템의 초기치는 각각 $x(0) = (-0.1, -0.5, -0.7)$ 과 $y(0) = (-0.1, -0.4, 0.3)$ 으로 설정하였다. 제안된 제어기의 효과를 보여주기 위하여 먼저, 제어 입력이 인가되지 않은 상태에서의 마스터와 슬레이브간의 오차 신호를 그림 2에 명시하였다. 그림 2에서 알 수 있듯이 제어 입력이 인가되지 않은 상태에서는 두 시스템은 서로 동기화 되지 않음을 알 수 있다. 그림 3과 그림 4는 본 논문에서 설계된 제어기의 입력 신호와 이 제어 입력을 인가하였을 경우의 마스터 시스템과 슬레이브 시스템간의 오차 신호의 궤적을 각각 나타낸 그림이다. 그림 4으로 부터 본 논문에서 제안된 제어기가 서로 다른 초기치를 지니는 동종의 카오스 시스템간의 동기화를 달성하였음을 알 수 있다.

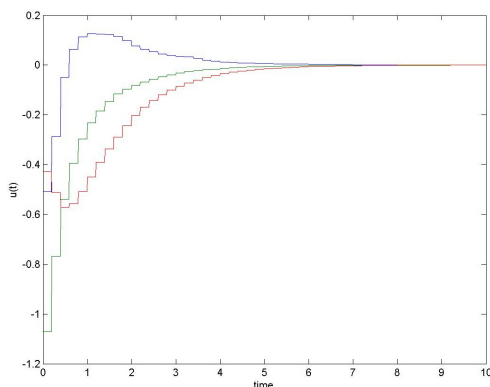


그림 3 제어 입력 신호
Fig. 3 The control inputs

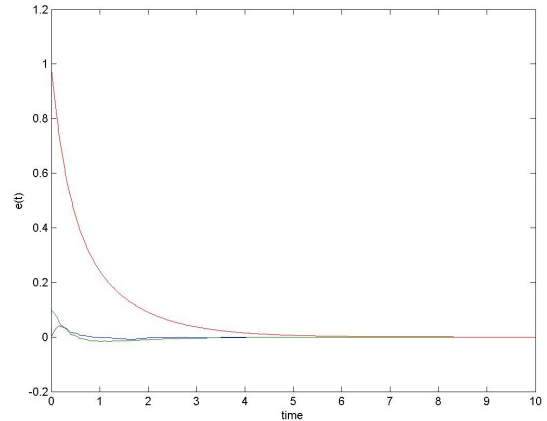


그림 4 제어 입력이 인가된 경우의 오차 궤적
Fig. 4 The controlled error signals

4. 결 론

본 논문에서는 샘플치 제어기법을 통한 동종의 카오스 시스템간의 동기화에 관한 연구를 수행하였다. 이를 위하여 불연속의 샘플치 제어 신호를 시변 시간지연된 연속 시간신호로 고려하는 방법을 사용하였으며 제안된 제어기의 안정성을 리아푸노프 안정성 이론을 바탕으로 증명하였다. 또한, 안정한 제어기의 존재 조건을 선형행렬부등식의 형태로 제시하였으며, Matlab의 LMI toolbox를 이용하여 제안된 선형행렬부등식의 조건을 만족하는 해를 계산하였다. 마지막으로 적절한 수치예제를 통하여 제안된 제어기의 효용성을 도하였다.

감사의 글

The work was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2010-0009373).

참 고 문 헌

- [1] L.M. Pecora, T.L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," Phys. Rev. Lett. vol. 64 pp.821-824, 1990.
- [2] U.E. Vincent, "Synchronization of Rikitake chaotic attractor using active control," Phys. Lett. A. vol. 343, pp.133-138, 2005.
- [3] S. Oancea, F. Grosu, A. Lazar, I. Grosu, "Master-slave synchronization of Lorenz systems using a single controller," Chaos, Solitons Fractals, vol. 41, pp.2575-2580, 2009.
- [4] T.H. Lee, Ju H. Park, "Design of feedback controller for functional projective synchronization of chaotic systems with disturbances," Int. Jour. of the Physical Sciences vol. 5, pp.439-446, 2010.

[5] T.H. Lee, Ju H. Park, "Adaptive functional projective lag synchronization of a hyperchaotic Rössler system," Chin. Phys. Lett. vol. 26, 090507, 2009.

[6] M.S. Tavazoei, M. Haeri, "Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller," Physica A, vol. 387, pp.57-70, 2008.

[7] J.J. Yan, M. L. Hung, T.L. Liao, "Adaptive sliding model control for synchronization of chaotic gyro with fully unknown parameters," J. Sound Vib. vol. 298, pp.298-306, 2006.

[8] 김재훈, 신현석, 김은태, 박민용, "시간지연과 입력 포화를 갖는 TS 퍼지 카오스 시스템의 동기화," 전자공학 회논문지 SC편 42권 1호, pp.13-21, 2005.

[9] Y. Mikheev, V. Sobolev, E. Fridman, "Asymptotic analysis of digital control systems," Autom. Remote Cont. vol. 49 pp.1175-1180, 1988.

[10] K. Astrom, B. Wittenmark, Adaptive control, MA: Addison-Wesley, Reading, 1989.

[11] E. Fridman, U. Shaked, V. Suplin, "Input/output delay approach to robust sampled-data H_∞ control," Syst. Cont. Lett. vol. 54, pp.271-282, 2005.

[12] H.K. Lam, W.K. Ling, "Sampled-data fuzzy controller for continuous nonlinear systems," IET Cont. Theo. Appl. vol. 2, pp.32-39, 2008.

[13] D.H. Ji, et al. "Synchronization criterion for Lur'e type complex dynamical networks with time-varying delay," Phys. Lett. A, vol. 374. pp.1218-1227. 2010.

[14] K. Gu, V.K. Kharitonov and J. Chen, Stability of time-delay systems, Boston: Birkhauser, 2003.



권 오 민 (權 五 珉)

1974년 7월 13일생. 1997년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 2004년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공학). 현재 충북대학교 전기공학과 조교수.

Tel : 043-261-2422

Fax : 043-263-2419

E-mail : madwind@chungbuk.ac.kr

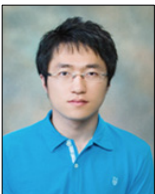


이 상 문 (李 相 文)

1973년 6월 15일생. 1999년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 2006년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공학). 현재 대구대학교 전자공학부 전임강사.

E-mail : moony@daegu.ac.kr

저 자 소 개



이 태 희 (李 泰 憲)

1983년 7월 2일생. 2009년 영남대학교 전기공학과 졸업(공학), 2011년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사), 2011~현재 동 대학원 박사과정.



박 주 현 (朴 柱 炫)

1968년 1월 11일생. 1990년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 1997년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공학). 현재 영남대학교 전기공학과 부교수

Tel : 053-810-2491

Fax : 053-810-4767

E-mail : jessie@ynu.ac.kr