

## 이방성 보 구조물 응력해석에서의 생브낭 원리<sup>§</sup>

김 준 식<sup>\*†</sup>

\* 금오공과대학교 지능기계공학과

### Application of Saint-Venant's Principle to Anisotropic Beams

Jun-Sik Kim<sup>\*†</sup>

\* Dept. of Intelligent Mechanical Engineering, Kumoh Nat'l Institute of Tech.

(Received December 21, 2011; Revised February 7, 2012; Accepted February 7, 2012)

**Key Words** : Saint-Venant Principle(생브낭의 원리), Stress Recovery(응력 회복), Anisotropic Beam(이방성보), Asymptotic Analysis(점근해석)

**초록**: 수학적 방법에 기초한 점근해석기법은 이방성 보 구조물의 설계 및 해석에 있어 강력한 도구이다. 이러한 장점에도 불구하고, 점근해석 기법은 전단 변형에 상대적으로 취약한 복합재료 보의 고차해를 구함에 있어 점근적으로 정확한 경계조건을 필요로 한다. 생브낭의 원리를 적용하여 응력상태를 개선하는 방법은 등방성 보 및 판 구조물에 대하여 개발되었고, 외팔보 등의 예제를 통해 검증되었다. 이 방법은 점근적으로 정확한 경계조건을 요구하지 않으며, 반복계산도 필요로 하지 않는다는 장점이 있다. 본 논문에서는 이 방법을 일반 이방성 보 구조물에 대하여 확장 적용하여 생브낭의 원리를 적용하는 방법을 일반화 하고자 한다.

**Abstract**: Asymptotic analysis is a powerful tool for the mathematically rigorous design and analysis of anisotropic beam structures. However, it has a limitation in that the asymptotic approach requires asymptotically correct boundary conditions for higher-order solutions, which are often needed for beams weak in shear. A method utilizing Saint-Venant's principle was proposed in a previous work to improve the stress state of isotropic beams and plates. In this paper, such a method is generalized for anisotropic beams, so that one does not need to consider the asymptotically correct boundary conditions for higher-order solutions. Consequently, solving the recursive system equations is not necessary, which makes the method very efficient in terms of accuracy and computational effort.

### 1. 서 론

보 구조물은 일상생활에서 많이 접할 수 있는 항공기, 자동차, 고층 건축물, 다리 등의 구조물에서 하중을 지지하는 기본 부재이다. Bernoulli 와 Euler 가 1750 년에 현대 보 이론의 기초를 확립한 이후에 많은 보 이론들이 복합재료(composite materials)<sup>(1)</sup>로 대표되는 새로운 재료로 만들어진 보에 대한 해석 및 설계를 위해서 개발되어 왔다. 특히 이방성 (general anisotropic) 보 구조물에 대한 해석은 기하학적 연성과 재료적 연성의 복잡성 때

문에 보 구조물의 수학적 모델링에 많은 제한이 따른다.

한편 현대의 구조물들은 매우 두꺼운 형태의 보가 기본 부재로 쓰이는 경우가 많기 때문에 전단 변형 등과 같은 비고전적인(non-classical) 보 거동의 예측이 중요하게 되었다. 전단변형을 고려할 수 있는 보 이론은 1895 년에 Rankine 에 의해 제시되었고, 이후 Timoshenko 가 1921 년에 이론적으로 완성하였다. 이 이론은 특히 보의 진동에 해석에 많이 사용되었으며, 현재에도 많은 연구가 이루어지고 있다. 하지만 Rankine-Timoshenko 보 이론은 전단변형을 정확하게 고려하기 위해서는 전단수정계수(shear correction factor)가 반드시 필요하다. 이 계수는 일반적으로 단면의 재질분포와 기하학적 형상에 영향을 받는다.<sup>(2)</sup>

전단변형을 고려 할 수 있으면서도 전단수정 계

§ 이 논문은 대한기계학회 2011 년도 추계학술대회(2011. 11. 2.-4., EXCO) 발표논문임

† Corresponding Author, [junsik.kim@kumoh.ac.kr](mailto:junsik.kim@kumoh.ac.kr)

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

수를 필요로 하지 않는 방법중의 하나로 점근해석 기법<sup>(3,4)</sup>(asymptotic expansion method)이 있다. 이 기법은 강력한 수학적 방법을 사용하기 때문에 정확한 해를 구할 수 있다는 장점이 있지만, 몇 가지 치명적 단점이 존재한다. 먼저 점근적으로 정확한 경계조건이 필요하고, 지배방정식의 반복계산이 요구되며, 마지막으로 주 변수들의 고차 미분 값이 필요하다는 것이다. 본 논문에서는 나열한 단점 중 첫 번째와 두 번째를 극복할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

김준식 등<sup>(5)</sup>은 생브낭의 원리를 이용하여 등방성 구조물의 응력을 후처리를 통하여 계산할 수 있음을 보였다. 본 논문의 목적은 참고문헌<sup>(5)</sup>의 방법을 점근해석기법에 적용하여 일반 이방성 보 구조물의 응력 해석을 하고자 한다. 이때 점근해석기법에서 요구되는 지배방정식의 반복 계산 및 점근적으로 정확한 경계조건은 생브낭의 원리를 적용함으로써 생략할 수 있다. 이러한 방법을 체계적으로 기술하기 위하여 다음과 같은 항목들을 포함하고 있다. 먼저 생브낭의 원리에 대해서 자세히 알아보고, 점근해석기법을 소개한 다음, 일반 이방성 구조물의 경우에 생브낭의 원리가 적용되는 수학적 방법에 대해 기술한다.

## 2. 정 식 화

이 장에서는 생브낭의 원리를 소개하고, 점근해석기법에 기초한 보 이론, 그리고 생브낭의 원리의 적용에 대하여 기술한다. 식의 전개 과정에서 Greek indices ( $\alpha, \beta$ , etc)는 2,3 를 가리키며, Latin indices ( $i, j$ , etc)는 1,2,3 을 나타낸다. 보의 기준 축은  $x_1$ 로 표현되며, 단면은  $x_\alpha$ 로 나타낸다.

### 2.1 생브낭의 원리

생브낭<sup>(6)</sup>은 1855 년에 “정적등가 하중이 작용하는 시스템에 대한 탄성등가에 관한 원리”를 발표하였다. 동일한 정적등가 하의 구조물에서 응력의 분포는 영역의 최대치수 이상 떨어지면 동일하다는 것이다. 이 원리는 명확하게 탄성체에 대해 수학적으로 규정하고 있지 않기 때문에, 그 수학적 규명에 대한 노력이 있어왔다. 대표적으로 1945 년에 von Mises<sup>(7)</sup>는 생브낭의 원리를 다음과 같이 정의하였다. “임의의 물체에 작용하는 힘이 표면의 작은 일부분에만 분포되어있다면, 힘이 작용하는 표면에서 멀리 떨어진 물체내부에서의 변형률과 응력은 크기가 상대적으로 작다(범위는 지름  $\varepsilon$ 를 가지는 구).” 보다 구체적으로 기술된 이 생브낭의

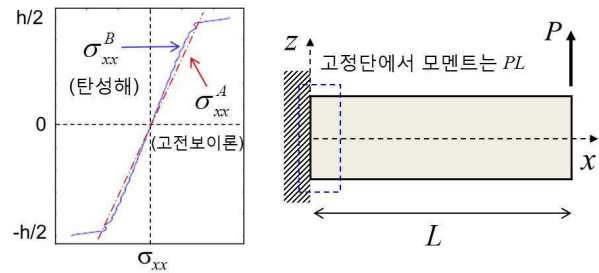


Fig. 1 Through-the-thickness stress distribution predicted by two different theories for the cantilever loaded at the end

원리는 1954 년에 Sternberg<sup>(6)</sup>에 의해 보다 더 정식화 되었는데, 요약하면 일부 표면에 작용하는 힘에 의한 합 응력과 합 모멘트가 0 이라면 그 힘에 의한 응력은 특성길이(characteristic length) 세제곱에 비례한 거리에서는 무시할 수 있다는 것이다. 본 연구에서는 Sternberg 의 정의를 차용하여 생브낭의 원리를 적용하고자 한다.

임의의 응력상태( $\sigma_{xx}$ )를 가정했을 때, 이 응력상태는 다음과 같은 합 응력과 합 모멘트를 생성한다.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^A dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^B dx_3 \\ M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{xx}^A dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{xx}^B dx_3 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 상첨자 A 와 B 는 같은 합응력을 생성하는 서로 다른 응력상태들을 나타낸다. 예제로써 자유단에 집중하중이 가해지는 외팔보의 고정단에서의 응력분포를 Fig. 1 에 도시하였다. 그림에서 B 는 탄성해를 A 는 고전보이론의 해를 나타낸다.

응력상태 B 는 A 의 향으로 표시할 수 있다고 가정하면 새로운 응력상태 C 를 도입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_{xx}^B = \sigma_{xx}^A + \sigma_{xx}^C \quad (2)$$

여기서 새로운 응력상태 C 는 self-equilibrating 상태를 나타낸다. 즉,

$$\begin{aligned} N_{xx}^C &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^C dx_3 = 0, \\ M_{xx}^C &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{xx}^C dx_3 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 응력상태 C 는 Sternberg 의 정의에 의해 물체의 내부에서 사라지는 응력상태이다. 다음 절에서는 점근해석기법에 기초한 보 모델에 생브낭의

원리를 적용하는 과정을 기술한다.

### 2.2 점근 이방성 보 모델

생브낭의 원리의 적용에 앞서 이 절에서는 점근 해석기법에 기반한 이방성 보 모델을 소개하고자 한다.<sup>(3)</sup> 점근해석기법을 적용하기 위해서는 먼저 보 구조물의 슬랜더한 기하학적 특성을 이용한다. 이때 필요한 매개변수는 다음과 같이 정의한다.

$$y_1 = x_1, y_\alpha = \frac{x_\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon = \frac{h}{l_c} \quad (4)$$

여기서  $h$ 는 보 단면의 최대 치수,  $l_c$ 는 보의 축 특성길이를 나타낸다.  $x_i$ 는 보의 좌표계를,  $y_i$ 는 보의 스케일된 좌표계를 나타낸다. 이 매개변수를 이용하여 3 차원 변위장은 다음과 같이 점근전개할 수 있다.

$$u^\varepsilon(x_i) = u^{(0)}(y_1) + \varepsilon u^{(1)}(y_i) + \varepsilon^2 u^{(2)}(y_i) + \dots \quad (5)$$

이제 식 (5)의 변위장으로부터 변형률 벡터를 구하고 구성방정식을 통해 응력벡터를 계산할 수 있다. 이렇게 계산된 응력으로부터 합응력 벡터를 다음과 같이 최종적으로 얻을 수 있다.

$$\tilde{N}^\varepsilon(x_i) = \varepsilon \tilde{N}^{(1)}(y_i) + \varepsilon^2 \tilde{N}^{(2)}(y_i) + \dots \quad (6)$$

여기서

$$\tilde{N}^\varepsilon = \begin{bmatrix} N^\varepsilon & M_2^\varepsilon & M_3^\varepsilon & T^\varepsilon \end{bmatrix}^t \quad (7)$$

식 (7)은 차례로 축 합응력, 양방향으로의 굽힘 모멘트, 그리고 토크를 나타낸다.

점근해석기법의 결과로써 합 응력 벡터는 다음과 같이 계산된다.<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{(1)} &= B^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}, \\ \tilde{N}^{(2)} &= B^{(1)} \mathbf{e}^{(2)} + B^{(2)} \mathbf{e}_{,1}^{(1)}, \\ \tilde{N}^{(3)} &= B^{(1)} \mathbf{e}^{(3)} + B^{(2)} \mathbf{e}_{,1}^{(2)} + B^{(3)} \mathbf{e}_{,11}^{(1)}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 각 차수에서의 고전적인 변형률 벡터  $\mathbf{e}^{(k)}$ 는 4x1 벡터이고, 그 성분은 인장, 두 방향으로의 굽힘, 그리고 뒤틀림 변형률을 포함한다. 행렬  $B^{(k)}$ 의 크기는 4x4 이며, 각 차수에서의 보의 등가 강성을 나타낸다.

### 3. 생브낭 원리의 적용

이 장에서는 2 장에서 기술된 생브낭의 원리를

식 (8)의 합 응력벡터에 적용하여 고차의 변형률 벡터를 계산하는 방법을 기술하고, 얻어진 결과를 점근해석의 결과와 비교하고자 한다.

식 (6)에 생브낭의 원리를 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\tilde{N}^\varepsilon = \varepsilon \tilde{N}^{(1)}, \tilde{N}^{(k)} = 0 \quad (k \geq 2) \quad (9)$$

제 1 차의 합응력 벡터는 고전적인 보 이론과 같은 합 응력을 보여준다. 따라서 제 1 차의 합응력은 이미 보 구조물의 평형상태를 만족한다. 힘의 평형은 어떠한 경우에도 만족해야 함으로 고차의 합응력 벡터들은 모두 0 이 되어야 한다. 제 1 차의 고전적 변형률 벡터는 선형시스템의 해석을 통해 알고 있다고 가정하면, 제 2 차의 고전적 변형률 벡터는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\tilde{N}^{(2)} = 0 \rightarrow \mathbf{e}^{(2)} = -\left(B^{(1)}\right)^{-1} B^{(2)} \mathbf{e}_{,1}^{(1)} \quad (10)$$

계속해서 제 3 차의 고전적 변형률 벡터는

$$\tilde{N}^{(3)} = 0 \rightarrow \mathbf{e}^{(3)} = -\left(B^{(1)}\right)^{-1} \left(B^{(2)} \mathbf{e}_{,1}^{(2)} + B^{(3)} \mathbf{e}_{,11}^{(1)}\right) \quad (11)$$

식 (11)에 식 (10)의 결과를 대입하고 정리하면 최종적으로 제 3 차의 고전적 변형률 벡터를 제 1 차의 고전적 변형률 벡터의 항만으로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{e}^{(3)} = -\left(B^{(1)}\right)^{-1} \left(B^{(3)} - B^{(2)} \left(B^{(1)}\right)^{-1} B^{(2)}\right) \mathbf{e}_{,11}^{(1)} \quad (12)$$

식 (10)-(12)에서 행한 과정을 반복하면 고차의 고전적 변형률 벡터를 제 1 차의 변형률 벡터의 미분항으로 표현할 수 있다.

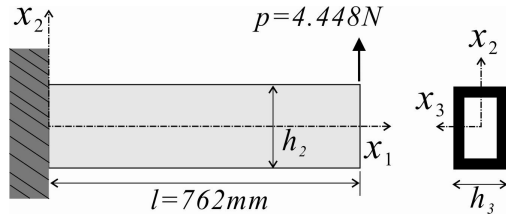
참고문헌<sup>(3)</sup>에 따르면 점근해석기법에 의한 보의 3 차원 변형률 벡터는 고전적 변형률 벡터로 표시할 수 있고, 구성방정식을 통해 3 차원 응력 벡터를 구할 수 있다. 따라서 일반적으로 점근해석기법에서 요구되는 선형시스템을 반복해서 계산하는 과정을 생략할 수 있다.

### 4. 수치예제

앞장에서 생브낭의 원리를 점근해석기법에 적용하여 일반 이방성 보에 대한 변형률 벡터를 얻을 수 있음을 수학적으로 보였다. 이 장에서는 얻어진 식을 구체적인 예제에 적용하고, 그 결과를 원래의 점근해석기법에 의한 결과와 비교함으로써 그 타당성을 검증하고자 한다.

**Table 1** Ply material properties for the box beam

$E_L$	$E_T$	$G_{LT}$	$G_{TT}$	$\nu_{LT}, \nu_{TT}$
141.96 (GPa)	9.79 (GPa)	6 (GPa)	4.83 (GPa)	0.42 (--)



**Fig. 2** Cantilever beam with the thin-walled cross-section subjected to the tip shear force

수치예제로써 복합재료 박스 보를 선택하였다. 이 박스 보는 굽힘-전단 강성 연성변형을 보여주는 대표적인 난제이다.<sup>(3)</sup> 0 도 복합재료의 재질상수는 Table 1에 주어졌다. Table 1에서 하첨자  $L$ 은 화이버 방향을 나타내고, 하첨자  $T$ 는 화이버에 수직인 방향을 나타낸다.  $E$ 와  $G$ 는 영률(Young's modulus)과 전단계수(shear modulus)를 각각 나타낸다.  $\nu$ 는 포아송비(Poisson's ratio)이다.

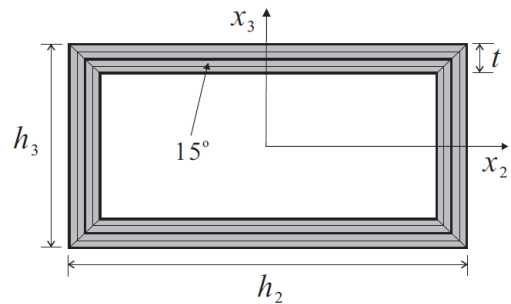
보의 길이( $l$ )는 762mm, 외팔보의 경계조건을 사용하였으며, 하중은 보의 자유단에서  $x_2$  축 방향으로 (즉, 전단변형이 더 큰 단면이 긴 방향으로) 4.448N의 전단력을 가하였다(Fig. 2). 복합재료 박스 보의 단면 차원( $h_2=13.46\text{mm}$ ,  $h_3=24.2\text{mm}$ ,  $t=0.762\text{mm}$ )과 형상 (fiber angle: 15°)은 Fig. 3에 도시하였다.

2 차 변형률 벡터( $\mathbf{e}^{(2)}$ )를 원래의 전산 점근해석 기법(FAMBA)<sup>(3)</sup> 결과와 식 (10)을 사용하여 계산한 결과를 Table 2에 비교하였다. 변형률은 Fig. 2에서 고정단의 중간점(즉,  $x_2=x_1=0$ )에서 계산한 값을 비교하였다. 그 이유는 축방향( $x_1$ )으로의 변형률 분포가 고전보 이론의 그것과 같고, 변형률의 크기가 가장 큰 부분이기 때문이다. 3 차 변형률 벡터( $\mathbf{e}^{(3)}$ )는 결과가 0 이고, 1 차 변형률 벡터( $\mathbf{e}^{(1)}$ )는 서로 같기 때문에 생략하였다. 두 방법에 의한 결과는 소수점 이하 셋째 자리까지 일치함을 알 수 있다. 사실상 생브냥의 원리를 이용한 방법이 더 정확하다. 점근해석기법은 2 차 변형률 벡터를 수치적으로 계산하기 때문이다.

고차 변형률 벡터를 모두 알게 되면 참고문헌<sup>(3)</sup>에 기술된 것처럼 고차의 응력을 모두 계산할 수 있다. 계산된 고차 응력들은 정확하게 점근해석기

**Table 2** Comparison of the second-order strain vector

$\mathbf{e}^{(2)}$	FAMBA	Saint-Venant
$u_{1,1}$	$6.289486 \times 10^{-18}$	$6.289769 \times 10^{-18}$
$u_{2,11}$	$-3.378605 \times 10^{-15}$	$-3.378473 \times 10^{-15}$
$u_{3,11}$	<b><math>-3.063017 \times 10^{-5}</math></b>	<b><math>-3.063834 \times 10^{-5}</math></b>
$\phi_{,1}$	$1.831592 \times 10^{-15}$	$1.831589 \times 10^{-15}$



**Fig. 3** Cross-sectional dimension and geometry of the thin-walled composite box beam

법의 결과와 일치하며 점근해석기법(asymptotic analysis method)은 이론적으로 탄성해의 내부해(interior solution)와 일치함을 수학적으로 증명<sup>(8)</sup>할 수 있기 때문에 비교는 지면 관계상 생략하였다. 다르게 표현하면 1 차 변형률 벡터의 고차 미분값을 정확하게 계산할 수 있는 한 본 논문에서 기술한 방법은 탄성해의 정확도를 갖는 내부 응력 상태(interior stress state)를 계산할 수 있다. 1 차원 보의 경우에는 변위까지도 정확하게 계산할 수 있지만 이 경우에는 점근적으로 정확한 변위 경계조건<sup>(9)</sup>과 더불어 적분을 수행해야 한다.

### 5. 결론

본 논문에서는 수학적으로 강력한 점근해석기법의 단점인 반복계산 및 경계조건을 극복할 수 있는 방법을 일반 이방성 보에 대하여 개발하였다. 생브냥의 원리를 확장한 합 응력 등가의 원리를 적용하여 점근해석기법에서 변수로 주어지는 고차 변형률 벡터를 시스템의 반복계산 없이 얻을 수 있었다. 얻어진 값은 원래의 점근해석기법의 결과와 비교하여 매우 정확함을 알 수 있었다. 결론적으로 개발된 방법은 응력 개선을 위한 후 처리기법이라고 할 수 있으며, 기존의 방법들에 비하여 체계적이며 점근적으로 신뢰할 수 있는 응력 개선을 수행할 수 있다.

## 후 기

이 논문은 2011 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2011-0014847).

## 참고문헌

- (1) Jones, R. M., 1975, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- (2) Oh, J., Cho, M., Kim, J.-S. and Grediac, M., 2008, "A Finite Element Formulation Based on an Enhanced First Order Shear Deformation Theory for Composite and Sandwich Structures," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, No. 5, pp. 871~878.
- (3) Kim, J.-S., Cho, M. and Smith, E. C., 2008, "An Asymptotic Analysis of Composite Beams with Kinematically Corrected End Effects," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 1954~1977.
- (4) Kim, J.-S., 2009, "An Asymptotic Analysis of Anisotropic Heterogeneous Plates with Consideration of End Effects," *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 4, No. 9, pp. 1535~1553.
- (5) Kim, J.-S. and Cho, M., 2011, "A Novel Methodology of Improving Stress Prediction via Saint-Venant's Principle," *Journal of the COSEIK*, Vol. 24, No. 2, pp. 149~156.
- (6) Fung, Y. C., 1965, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc.
- (7) von Mises, R., 1945, "On Saint Venant's Principle," *Bulletin of the AMS*, Vol.51, No. 7, pp. 555~562.
- (8) Buannic, N. and Cartraud, P., 2001, "Higher-order Effective Modeling of Periodic Heterogeneous Beams I. Asymptotic Expansion Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 7139~7161.
- (9) Kim, J.-S. and Wang, K. W., 2011, "On the Asymptotic Boundary Conditions of an Anisotropic Beam via Virtual Work Principle," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 2422~2431.