한국초등수학교육학회지 16(3) 451-469. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 16(3) 451-469.
2012. 12. 31 December 31. 2012.

초등학교 학생들의 넓이 개념 이해도 조사[1]
- 초등학교 6학년 학생들을 중심으로-

나귀수[2]

본 연구는 초등학교 6학년 학생들의 넓이 개념 이해의 여러 측면을 조사하고 보고하는 데에 그 목적이 있다. 본 연구에서는 넓이의 의미 이해, 평면도형(직사각형, 평행사변형, 삼각형)의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기 등과 관련된 총 4개의 문항들로 검사지를 구성하였으며, 이 검사지를 활용하여 초등학교 6학년 학생 122명의 넓이 개념을 조사하였다. 본 연구의 결과, 학생들은 넓이의 의미 이해에서 가장 낮은 수행 정도를 나타냈으며, 그 다음으로는 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기의 순서로 낮은 수행 정도를 나타냈다. 한편, 학생들은 넓이 공식 제시하기에서 직사각형, 삼각형, 평행사변형의 순서로 낮은 수행 정도를 나타냈으며, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기에서는 삼각형, 평행사변형, 직사각형의 순서로 낮은 수행 정도를 나타냈다. 이러한 결과를 바탕으로 본 연구에서는 학생들의 이해가 미흡한 것으로 나타난 부분을 개선하기 위한 교수학적 시사점을 제안하였다.

주제어: 초등학교 수학, 평면도형의 넓이, 넓이 개념, 넓이 공식

Ⅰ. 들어가며

평면도형의 넓이를 구하는 활동은 학생들에게 평면도형을 종합적으로 탐구하는 경험을 제공하는 동시에 평면도형을 보다 고차원적인 수학적 조작을 통해 정돈하는 기회를 제공한다(이경화, 2001). 우리나라의 2009년 수학과 교육과정에서는 학생들이 넓이 개념을 이해하고 1㎠의 단위를 알 것을 강조하고 있다(교육과학기술부, 2011). 또한, 직사각형, 평행사변형, 삼각형 등의 넓이를 구하는 방법을 다양하게 추론하고 이와 관련된 문제를 해결할 것을 강조하고 있다. 우리나라 교육과정의 변화를 살펴보면, 제7차 교육과정에서는 넓이를 이해하고 넓이를 구하는 것만을 강조하였다면(교육부, 1997), 2007 수학과 교육과정부터는 넓이를 이해하고 넓이를 구하는 것과 더불어 넓이 구하는 방법을 이해할 것을 지속적으로 강조하고 있다(교육인적자원부, 2007). 넓이 구하는 방법의 이해는 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유를 설명하는 것까지 포함한다고 할 수 있다.

NCTM(2000)에서는 학생들이 넓이라는 속성을 이해하고 넓이라는 속성을 측정하기 위한 적절한 단위를 선택할 수 있도록 지도해야 함을 강조하고 있다. 또한 학생들이 넓이를 표

1) 이 논문은 청주교육대학교의 연구비 지원(과제번호 CJE2011Y003)에 의해 수행되었음.
2) 청주교육대학교 수학교육과

준 단위로 측정할 필요성을 이해하고 넓이를 측정하기 위한 적절한 표준 단위와 도구를 선택하여 적용할 수 있도록 지도해야 한다고 제안하고 있다. 그리고 학생들이 직사각형, 평행사변형, 삼각형 등의 넓이 구하는 공식을 개발하고 활용할 수 있도록 지도할 것을 제안하고 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 국내외의 수학과 교육과정에서는 학생들이 넓이 개념을 이해하고 이를 바탕으로 직사각형, 평행사변형, 삼각형 등의 넓이 구하는 방법을 이해하고 넓이를 구하는 것의 중요함을 강조하고 있다. 그러나 이러한 교육 내용과 관련하여 우리나라 초등학교 학생들의 수행 정도가 어떠한가에 대한 기초적인 자료는 거의 존재하지 않은 실정이다. 특히 평면도형의 넓이 개념을 모두 학습한 학생들이 넓이 개념에서 어떤 이해 상태에 있는가에 대한 구체적이고 상세한 자료는 거의 찾기 어렵다.

이러한 맥락에서, 본 연구는 초등학교 6학년 학생들의 넓이 개념 이해의 정도를 확인하고 학생들의 넓이 개념 이해의 여러 측면을 상세하게 조사하여 보고하고자 한다. 본 연구에서 보고되는 우리나라 초등학교 6학년 학생들의 넓이 개념 이해의 특징은 학생들에게 더욱 의미 있는 넓이 개념 관련 활동을 제공하기 위한 기초 자료로 활용될 수 있을 것이다.

Ⅱ. 선행 연구 고찰

Stephan & Clements(2003)에 따르면, 넓이 개념을 의미 있게 학습하기 위해서는 분할, 단위 반복, 배열 구성, 보존 등의 4가지 기본 개념이 필요하다고 한다. 첫째, 분할은 양을 적절한 크기로 분할하여 측정하는 방법으로서, 평면도형을 단위 도형으로 분할하는 활동을 통해 도형을 크기가 더 작은 하위 도형으로 세분하거나 넓이를 구하기 쉬운 하위 영역으로 나누는 것을 의미한다(김수환 외, 2009). 예를 들어, 사다리꼴을 한 개의 직사각형과 두 개의 직각삼각형으로 분리하여 넓이를 구하는 과정에는 분할의 아이디어가 내포되어 있는 것이다.

둘째, 단위 반복은 단위 넓이를 갖는 도형으로 넓이를 구하고자 하는 도형의 내부를 채우는 것을 의미한다(Joram, 2003). 단위 도형으로 도형의 내부를 채울 때는, 연속되는 단위 도형들을 겹치게 놓아서는 안 되며 연속되는 단위 도형들 사이에 빈틈이 있게 해서도 안 된다. 예를 들어, 직사각형을 넓이가 1㎠인 단위 정사각형들로 빈틈없이 겹치지 않게 채워서 넓이를 구하는 과정에는 단위 반복의 아이디어가 내포되어 있다.

셋째, 배열 구성은 넓이를 구하고자 하는 평면도형의 내부를 단위 넓이 도형들로 재배열하는 것을 의미한다(Lehrer, 2003). 예를 들어, 직사각형의 넓이 구하는 공식을 이끌어낼 때, 직사각형의 내부를 넓이가 1㎠인 단위 정사각형들로 채워야 한다. 이때 직사각형 내부에 단위 정사각형들을 아무렇게나 놓는 것이 아니라 단위 정사각형들의 변이 직사각형의 변(가로나 세로)에 겹치거나 평행하도록 단위 정사각형의 배열을 구성해야 한다. 이런 방식으로 직사각형 내부를 단위 정사각형들도 재배열함으로써 ‘직사각형의 넓이=(가로)×(세로)’라는 공식을 이끌어 낼 수 있다.

넷째, 보존은 넓이를 구하고자 하는 도형을 다른 도형으로 변형하여 넓이를 구하는 아이디어와 관련된다. 학생들은, 원래 도형의 일부분을 분할, 이동, 재구성하여 다른 도형으로 변형했을 때 변형한 도형의 넓이가 원래 도형의 넓이와 같음을, 즉 원래 도형의 넓이가 보존됨을 인식해야 한다. 예를 들면, 평행사변형의 일부분을 분할하고 옮겨 붙여 직사각형

으로 변형하여도 원래 평행사변형의 넓이는 보존된다. 실제로 평행사변형의 넓이 공식을 이끌어내는 과정을 살펴보면, 평행사변형을 직사각형으로 변형하여 직사각형의 넓이 공식으로부터 평행사변형의 넓이 공식을 이끌어낸다(교육과학기술부, 2011a).

한편, 평면도형의 넓이에 대한 학습자의 이해 상태를 조사한 선행 연구들에 따르면(장영은, 2003; Battista, 2003), 평면도형의 넓이와 관련된 문제해결에서 학생들은 다음과 같은 오류를 나타낸다고 한다. 첫째, 학생들은 부정확한 개념과 정의로 인해 오류를 나타낸다. 예를 들어, 넓이와 둘레에 대한 부정확한 개념이나, 수학 용어인 밑변과 높이의 의미를 명확하게 인식하지 못하여 오류를 나타낸다. 둘째, 학생들은 문제에 주어진 자료를 부적절하게 사용함으로써 오류를 나타낸다. 예를 들어, 문제해결에서 보조선을 사용해야 할 경우 학생들은 필요한 보조선을 정확하게 찾지 못하고 문제에 주어진 정보를 보조선으로 인식하고 문제를 해결하는 경우이다. 셋째, 학생들은 수학적으로 옳지 않은 부적절한 추론으로 인해 오류를 나타낸다. 예를 들어, '이등변삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 이등분하면서 수직으로 만난다'라는 성질을 일반적인 예각삼각형으로 성질로 잘못 추론하여 문제를 해결하는 경우이다. 넷째, 문제를 해결하는 데에 필요가 자료가 모두 주어져 있음에도 불구하고 문제의 자료가 불충분하다고 인지하는 오류이다. 예를 들어, 문제에 평행사변형의 밑변과 높이가 주어져 있음에도 불구하고 평행사변형의 밑변이 아닌 다른 변의 길이가 주어져 있지 않기 때문에 평행사변형의 넓이를 구할 수 없다고 생각하는 경우이다. 다섯째, 학생들은 문제에 주어진 정보를 무시하거나 왜곡하여 문제의 내용을 잘못 이해하여 오류를 나타낸다. 여섯째, 학생들은 넓이 구하는 공식을 활용하여 넓이를 구하는 과정에서 계산을 잘못하거나 잘못된 공식을 사용함으로써 오류를 나타낸다.

본 연구에서는 위에서 살펴본 선행 연구들에서 더 나아가 평면도형의 넓이 개념을 이미 학습한 초등학교 6학년 학생들의 넓이 개념 이해의 여러 측면을 상세하게 조사하고자 한다. 본 연구에서는 넓이의 의미 이해, 도형의 넓이 구하기, 도형의 넓이 공식 제시하기, 도형의 넓이 공식의 성립 이유 설명하기 등을 중심으로 하여 학생들의 이해 정도를 조사할 것이다. 본 연구에서 넓이의 의미 이해, 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기 등을 주요 분석 내용으로 설정한 이유는, 위에서 언급한 바와 같이 국내외의 교육과정에서(교육과학기술부, 2011; 교육인적자원부, 2007; NCTM, 2000) 넓이 개념과 관련하여 이러한 내용들을 학생들이 충분히 이해하는 것이 중요하다고 강조하고 있기 때문이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상 및 절차

본 연구에서는 경기도에 소재한 A초등학교와 B초등학교, 충북에 소재한 C초등학교와 D초등학교의 네 학교에서 한 학급씩을 선정하여 조사 연구를 실시하였다. 각 학교마다 성별, 학업성취도와 상관없이 초등학교 6학년 1개 학급을 임의로 선정하였으며, 총 122명의 학생들이 본 연구에 참여했다. 학교별 연구 참여 학생들에 대한 정보는 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 학교별 연구 참여 학생 수

학교	A초등학교	B초등학교	C초등학교	D초등학교	계
학생 수	31	33	32	26	122

본 연구에 참여한 학생들은 우리나라의 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서를 활용한 정규 수학 수업을 받은 학생들이다. 우리나라의 2007 개정 수학과 교육과정에 따르면, '직사각형과 정사각형의 넓이 구하는 방법을 이해하고 그 넓이 구하기'와 '평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이 구하는 방법을 이해하고 그 넓이 구하기'를 각각 4학년과 5학년에서 다루도록 하고 있다(교육인적자원부, 2007). 따라서 본 연구에 참여한 6학년 학생들은 이미 직사각형, 평행사변형, 삼각형 등의 넓이 구하는 방법과 넓이 구하기를 학교에서 형식적으로 학습한 학생들이다.

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사지는 전미정(2010)이 제시한 문항을 재구성하여 제작되었다. 본 연구의 검사지는 넓이의 의미 이해, 직사각형의 넓이, 평행사변형의 넓이, 삼각형의 넓이와 관련된 4개의 문항으로 구성되어 있다. 직사각형의 넓이, 평행사변형의 넓이, 삼각형의 넓이와 관련된 문항에는 하위 문항이 존재하며, 하위 문항은 넓이 구하기, 넓이 구하는 공식 제시하기, 넓이 구하는 공식의 성립 이유 설명하기 등으로 구성되어 있다.

본 연구에서 활용한 검사지의 4개 문항에 대한 정보는 다음의 <표 2>와 같다.

<표 2> 문항 정보

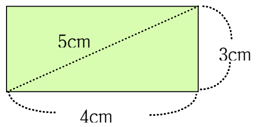
문항	내용	하위 내용	하위 문항 번호
1	넓이의 의미 이해	넓이 의미 이해	
2	직사각형의 넓이	넓이 구하기	2-1
		공식 제시하기	2-2(1)
		공식 설명하기	2-2(2)
3	평행사변형의 넓이	넓이 구하기	3-1
		공식 제시하기	3-2(1)
		공식 설명하기	3-2(2)
4	삼각형의 넓이	넓이 구하기	4-1(1), 4-1(2)
		공식 제시하기	4-2(1)
		공식 설명하기	4-2(2)

본 연구에서 활용한 검사지에 제시된 각 문항의 구체적인 내용은 다음의 <표 3>과 같다.

<표 3> 문항 내용

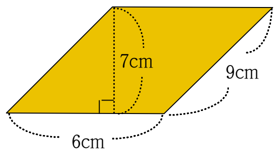
1. 어떤 도형의 넓이가 8㎠라고 합니다. '넓이가 8㎠'가 무슨 뜻인지 써보세요. (자유롭게 생각을 써보세요.)

2-1. 다음 직사각형의 넓이를 구해 보세요. 풀이과정을 자세히 적으세요.



2-2. (1) 직사각형의 넓이를 구하는 공식을 써보세요.
(2) 왜 위의 공식을 사용하면 직사각형의 넓이를 구할 수 있는지 그 이유를 설명해보세요.

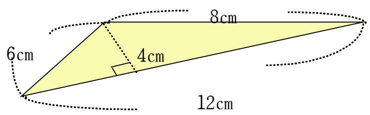
3-1. 다음 평행사변형의 넓이를 구해보세요. 풀이과정을 자세히 적으세요.



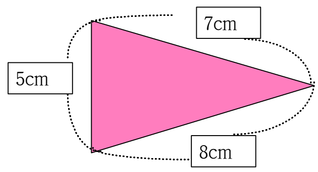
3-2. (1) 평행사변형의 넓이를 구하는 공식을 써보세요.
(2) 왜 위의 공식을 사용하면 평행사변형의 넓이를 구할 수 있는지 그 이유를 설명해보세요.

4-1. 다음 삼각형의 넓이를 구해보세요. 풀이과정을 자세히 적으세요.

(1)



(2)



4-2. (1) 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 써보세요.
(2) 왜 위의 공식을 사용하면 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 그 이유를 설명해보세요.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서 검사 시간은 초등학교 한 차시 수업 시간인 40분으로 했고, 시간이 부족하거나 추가 시간을 원하는 학생이 있을 경우 10분의 시간을 더 활용할 수 있도록 하였다. 검사는 정규 수학 수업 시간에 이루어졌으며, 검사 시간을 관리한 교사들은 담임교사들이다. 검사 시간을 관리한 교사들은 검사지의 인쇄 상태나 시간에 대한 학생들의 질문에만 응답하였으며 검사 문항의 내용에 대한 질문에는 응답하지 않았다. 주의 사항으로는, 문제 해결 과정이 매우 중요하므로 식, 그림, 말로 된 설명 등 학생들이 검사지에 적은 것은 가능한 한 지우지 않도록 학생들을 안내하였다.

본 연구에서는 자료 분석은 다음과 같은 과정으로 진행되었다. 첫째, 각 문항에 대한 학생들의 응답을 정답, 오답, 무응답으로 분류한 후 각 문항에 대한 정답, 오답, 무응답의 백

분율을 구하였다. 둘째, 각 문항에 대한 정답, 오답, 무응답의 백분율을 토대로 “넓이“의 개념적 의미 이해와 구체적인 도형의 넓이 구하기에서 나타난 학생들의 정답률을 상호 비교하였다. 셋째, 한 도형 내에서의 넓이와 관련된 여러 측면이라고 할 수 있는 도형의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기 등에서 나타난 학생들의 정답률을 상호 비교하였다. 예를 들어, 평행사변형의 넓이 구하기, 평행사변형의 넓이 공식 제시하기, 평행사변형의 넓이 공식의 성립 이유 설명하기 등에 대한 학생들의 이해 정도를 분석하였다. 넷째, 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기의 각각의 영역에서 구체적인 여러 도형들의 정답률을 상호 비교하였다. 예를 들어, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기와 관련하여, 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 구하는 공식의 성립 이유 설명하기에서 나타난 학생들의 정답률을 상호 비교하였다.

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 전체적인 경향 분석

본 연구에서 나타난 학생들의 넓이 개념 이해 정도를 표와 그래프로 나타내면 다음과 같다.

<표 4> 학생들의 넓이 개념 이해

<table>
<tr><th colspan="2">내용</th><th>응답 형태</th><th colspan="3">학생 응답</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">넓이의 의미 이해</td><td>정답</td><td colspan="3">7 (5.7)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td colspan="3">82 (67.2)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td colspan="3">33 (27.0)</td></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">내용</th><th rowspan="2">응답 형태</th><th colspan="3">학생 응답</th></tr>
<tr><th>직사각형</th><th>평행사변형</th><th>삼각형</th></tr>
<tr><td rowspan="6">넓이 구하기</td><td rowspan="3">하위 문항(1)</td><td>정답</td><td>100 (81.9)</td><td>75 (61.5)</td><td>91 (74.6)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>21 (17.2)</td><td>38 (31.1)</td><td>27 (22.1)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td>1 (0.8)</td><td>9 (7.5)</td><td>4 (3.3)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">하위 문항(2)</td><td>정답</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td>15 (12.3)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>50 (41.0)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td>57 (46.7)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">넓이 공식</td><td rowspan="3">넓이 공식 제시하기 [하위문항(1)]</td><td>정답</td><td>105 (86.1)</td><td>47 (38.5)</td><td>67 (54.9)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>14 (11.5)</td><td>62 (50.8)</td><td>43 (35.2)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td>3 (2.5)</td><td>13 (10.7)</td><td>12 (9.8)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">넓이 공식 설명하기 [하위문항(2)]</td><td>정답</td><td>32 (26.2)</td><td>40 (32.8)</td><td>61 (50.0)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>45 (36.9)</td><td>19 (15.6)</td><td>20 (16.4)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td>45 (36.9)</td><td>63 (51.6)</td><td>41 (33.6)</td></tr>
<tr><td colspan="3">계</td><td colspan="3">122 (100%)</td></tr>
</table>

[그림 1] 학생들의 넓이 개념 이해의 특징

학생들의 넓이 개념 이해에서 나타난 전체적인 특징을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 가장 낮은 수행 정도를 보인 문항은 ‘넓이의 의미 이해하기’를 다룬 1번 문항으로 나타났다. 1번 문항에서는 ‘어떤 도형의 넓이가 8㎠라고 하는 것이 무슨 의미인가’를 질문하였다. 1번 문항에서 정답을 제시한 학생들은 7명(5.7%)에 불과했으며, 오답과 무응답을 제시한 학생들은 각각 82명(67.2%)과 33명(27.0%)로 나타났다. 이와 같은 수행 정도는 매우 낮은 수준이며, 도형의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식 설명하기 등을 질문한 다른 문항들의 수행 정도에 비해서도 매우 낮은 수준이다. 학생들의 넓이의 의미 이해를 높이기 위한 교수학적 노력이 절실하게 필요하다고 할 수 있다.

둘째, 도형의 넓이를 구하는 데에 필요한 정보와 함께 다른 정보들이 추가로 주어져 있는 도형의 넓이 구하기에서, 학생들의 정답률은 ‘직사각형(100명, 81.9%)→삼각형(91명, 74.6%)→평행사변형(75명, 61.5%)’의 순서로 나타났다. 이와 관련된 문항은 2-1번, 3-1번, 4-1(1)번 등이다. 이 문항들에서는 넓이를 구하는 데에 필요하지 않은 대각선의 길이나 변의 길이를 함께 제시하였다. 2-1번 문항의 경우, 19명(15.5%)의 학생들이 문제에 주어진 직사각형의 대각선의 길이를 넓이 구하기에 활용하여 오답을 제시하였다. 3-1번 문항의 경우, 20명(16.3%)의 학생들이 문제에 주어진 밑변이 아닌 변의 길이를 평행사변형의 넓이 구하기에 사용하여 오답을 제시하였으며, 10명(8.1%)의 학생들은 ‘밑변×높이’를 계산한 후에 ‘÷2’를 하여 오답을 제시하였다(<표 7> 참고). 이러한 오답 형태로 인해 학생들의 정답률이 삼각형에서보다 평행사변형에서 낮게 나타났다. 4-1(1)번 문항의 경우, 18명(14.8%)의 학생들이 문제에 주어진 밑변이 아닌 두 변의 길이를 삼각형의 넓이 구하기에 사용하여 오답을 제시하였다. 이와 같이 문제에 주어진 필요 없는 정보에 영향을 받아서 문제에 주어진 모든 숫자(길이)들을 조합하여 계산하여 도형의 넓이 구하기에 실패한 학생들은 대부분 동일한 학생들이었으며, 18명(14.8%)의 정도의 학생들이 여기에 해당하는 것으로 확인되었다. 한편, 문제에서 주어진 정보가 도형의 넓이를 구하기에 부족한 문항인 4-1(2)번에서는 15명(12.3%)의 학생들이 옳은 답을 제시했으며 오답과 무응답을 제시한 학생들은 각각 50명(41.0%), 57명(46.7%)으로 나타났다.[3]

셋째, 도형의 넓이 공식 제시하기와 관련하여 학생들의 정답률은 ‘직사각형(105명,

---

3) 4-1(2)번 문항에서 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 넓이를 구하면 $10\sqrt{3}$이다. 그러나 초등학교 6학년 수준에서는 세 변의 길이만을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수는 없다.

86.1%)→삼각형(67명, 54.96%)→평행사변형(47명, 38.5%)’의 순서로 나타났다. 삼각형의 넓이 공식 제시하기와 평행사변형의 넓이 공식 제시하기에서 나타난 대표적인 오답 유형은 잘못된 용어 사용하기였으며, 그 다음으로는 여러 가지 용어들을 조합하여 틀린 공식 제시하기로 나타났다(<표 8>, <표 10> 참고). 잘못된 용어를 사용하여 공식을 제시한 학생들은 삼각형과 평행사변형에서 각각 30명(24.5%), 28명(22.9%)으로 나타났다. 이 학생들은 삼각형과 평행사변형에서 넓이와 관련된 중요한 용어인 ‘밑변’, ‘높이’ 등을 정확하게 알지 못한다고 할 수 있다. 우리나라의 수학과 교육과정에서는 학생들의 수학적 의사소통 능력 신장을 위해 수학적 용어를 이해하고 정확히 사용할 것을 지속적으로 강조하고 있다(교육과학기술부, 2011b; 교육인적자원부, 2007). 이러한 맥락에서 학생들이 ‘밑변’, ‘높이’ 등의 수학적 용어를 더욱 정확하게 이해하고 사용할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

한편, 불필요한 용어들을 조합하여 공식을 제시한 학생들은 삼각형과 평행사변형에서 각각 10명(8.1%), 13명(10.6%)으로 나타났다. 또한 평행사변형의 넓이 공식 제시하기에서는 불필요한 ‘÷2’를 해서 오답을 제시한 학생들이 9명(7.3%)로 나타났다. 이러한 오답을 한 학생들은 삼각형의 넓이 공식에서 나타나는 ‘÷2’를 평행사변형의 공식에도 적용한 것이라고 할 수 있다. 이 학생들은 삼각형의 넓이 공식과 평행사변형의 넓이 공식을 혼동하는 것이며, 이러한 오류로 인해 평행사변형의 넓이 공식 제시하기의 정답률이 삼각형의 넓이 공식 제시하기의 정답률보다 낮게 나온 것으로 판단된다.

넷째, 도형의 넓이 공식 설명하기와 관련하여 학생들의 정답률은 ‘삼각형(61명, 50.0%)→평행사변형(40명, 32.8%)→직사각형(32명, 26.2%)’의 순서로 나타났다. 많은 학생들이 넓이 공식 설명하기에서 오답이나 무응답을 제시했으며, 학생들이 나타낸 오답 중에서 가장 대표적인 것들은 ‘약속한 것이기 때문에’, ‘공식이기 때문에’, ‘그렇게 배웠기 때문에’ 등으로 공식을 그대로 받아들이기, 공식을 그대로 반복해서 적기 등이었다. 한편, 초등학교 교과서에서는 평면도형의 넓이를 ‘직사각형→평행사변형→삼각형’의 순서로 다룬다(교육과학기술부, 2010, 2011a). 학생들이 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식 성립 이유 설명하기에서 나타난 정답률의 순서가 학생들이 평면도형의 넓이 공식을 학습하는 순서와 반대로 나타난 것은 독특한 특징이라고 할 수 있다.

다섯째, 본 연구에서는 한 도형 내에서의 넓이 개념과 관련된 세 측면을 조사하였다. 즉, 직사각형, 평행사변형, 삼각형에서, 변의 길이가 제시된 도형의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식이 성립하는 이유 설명하기 등의 세 측면을 조사하였다. 도형의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식이 성립하는 이유 설명하기 각각에 대해, 학생들은 평행사변형에서는 75명(61.5%), 47명(38.5%), 40명(32.8%), 삼각형에서는 91명(74.6%), 67명(54.9%), 61명(50.0%)의 정답률을 나타냈다. 직사각형에서는 100명(81.9%), 105(86.1%), 32명(26.2%)의 정답률을 나타냈다. 이로부터, 학생들이 결과적 지식이라고 할 수 있는 공식을 외우고 공식에 숫자를 대입하여 넓이를 구하는 것에는 익숙하지만, 과정적 지식에 해당하는 공식이 성립하는 이유를 설명하는 것에는 미흡하다고 할 수 있다.

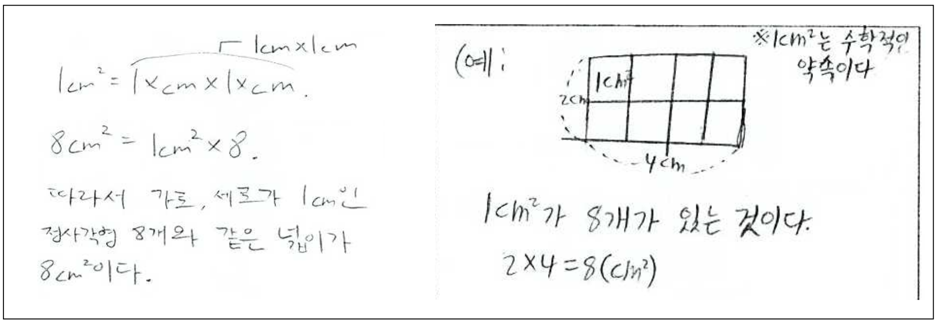
2. 문항별 응답 분석

이하에서는 각각의 문항에 대한 학생들의 이해 정도를 자세히 살펴보기로 한다.

가. 넓이의 의미 이해: 1번 문항

본 연구에서 조사한 내용 중에서 학생들의 정답률이 가장 낮게 나타난 부분은 1번 문항

에서 조사한 '넓이의 의미 이해하기'이다. 어떤 도형의 넓이가 8㎠라는 것은, 그 도형이 넓이가 1㎠인 단위 정사각형의 8배에 해당하는 넓이를 갖는다는 것을 의미한다([그림 2] 참고). 1번 문항에서 정답을 제시한 학생들은 7명(5.7%)에 불과한 것으로 나타났다. 나머지 115명(94.3%)에 해당하는 대부분의 학생들은 오답을 제시했거나 응답을 제시하지 않았다. 1번 문항에 대한 조사 결과로부터, 대부분의 학생들(115명, 94.3%)은 넓이에 대한 정확한 개념적 이해를 하지 못하고 있음을 확인할 수 있다.



[그림 2] 1번 문항에 대한 정답 예시

1번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 82명(67.2%), 무응답을 한 학생들은 33명(27.0%)으로 나타났다. 1번 문항에서 나타난 대표적인 오답 유형과 학생 수를 제시하면 다음의 <표 5>와 같다.[4]

<표 5> 1번 문항에 대한 학생들의 오답

오답 유형		학생 수
문제에 제시된 내용을 그대로 반복해서 적음	어떤 도형의 넓이가 8㎠라는 것이다	17 (13.9%)
자신이 알고 있는 용어를 사용	도형의 공간, 크기, 부피가 8㎠라는 뜻이다	18 (14.7%)
특수한 도형(직사각형, 삼각형)의 넓이만을 고려함	가로와 세로를 곱해서 구한 도형의 넓이이다	17 (13.9%)
	삼각형의 넓이를 밑변×높이÷2로 계산한 결과	3 (2.4%)
8㎠의 ㎠에서 지수 2를 고려함	cm를 2번 곱한 것	5 (4.0%)
	8cm가 2개 있는 것	3 (2.4%)
	㎠는 cm를 2개 곱한 것이고 8은 cm앞의 숫자들의 곱이다	2 (1.6%)
약속으로 정한 것임	국가에서 정한 것	2 (1.6%)

4) <표 5>~<표 10>에서는 제시된 학생 수를 모두 더해도 오답을 제시한 총 학생 수가 나오지 않는다. 예를 들어 <표 5>에 제시된 학생 수를 모두 더해도 82명(오답을 제시한 학생 수)이 되지 않는다. 이것은 2명 이상의 학생들이 나타낸 오답만을 <표 5>에 나타냈기 때문이다.

<표 5>에 나타난 대표적인 오답을 살펴보면, 17명(13.9%)의 학생들은 '어떤 도형의 넓이가 8㎠라는 것이다'라고 응답하고 있는데, 이는 문제에 제시된 내용을 그대로 반복하여 적은 것이다. 18명(14.7%)의 학생들은 공간, 크기, 부피 등의 용어를 이용하여 잘못된 설명을 제시하고 있음을 알 수 있다. 17명(13.9%)의 학생들은 '가로와 세로를 곱해서 구한 도형이다'라는 오답을 제시하였는데, 이 학생들은 일반적인 도형의 넓이를 생각하지 않고 직사각형의 넓이 구하는 공식만을 고려한 것이다. '삼각형의 넓이를 밑변×높이÷2를 계산한 결과'라고 응답한 3명(2.4%)의 학생들 또한 일반적인 도형의 넓이를 생각하지 않고 삼각형의 넓이 구하는 공식만을 고려한 것이라고 할 수 있다. 한편 '8cm가 2개 있는 것', 'cm를 2번 곱한 것', '㎠는 cm를 2개 곱한 것이고 8은 cm앞의 숫자들의 곱이다' 등의 응답을 제시한 학생들은 8㎠의 ㎠에서 지수 2를 생각하면서 응답한 것으로 판단된다.

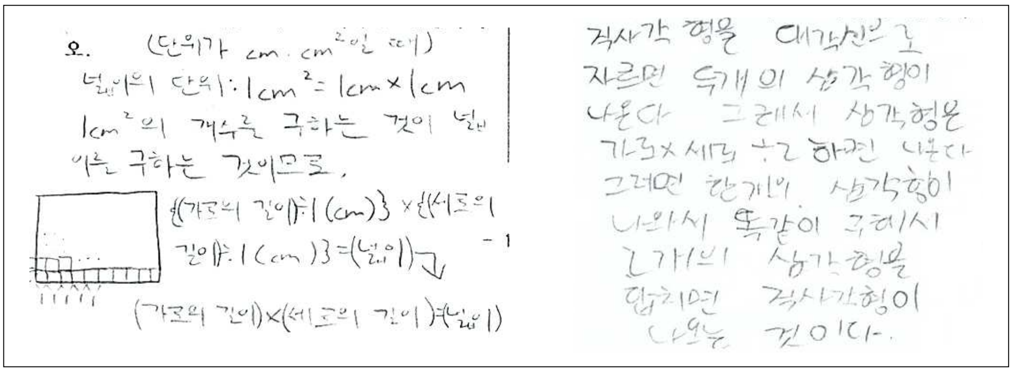
나. 직사각형의 넓이 이해: 2번 문항

2-1번 문항은 변의 길이와 대각선의 길이가 주어진 직사각형의 넓이를 구할 것을 요구하는 문항이다. 이 문항의 정답률은 100명(81.9%)로서 대부분의 학생들이 직사각형의 넓이 구하기에 성공했음을 확인할 수 있다. 2-1번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 21명(17.2%)이며, 응답을 제시하지 않은 학생은 1명(0.8%)으로 나타났다. 오답을 제시한 학생들 중에서 19명(15.5%)의 학생들은 문제에 제시된 숫자를 옳지 않은 방식으로 조합해서 여러 가지 계산을 하여 오답을 제시하였다.

2-2번 문항은 직사각형의 넓이 구하는 공식을 제시하고 그 공식이 성립하는 이유를 설명할 것을 요구하는 문항이다. 이 문항은 학생들이 직사각형의 넓이 구하기에 대해 관계적 이해(Skemp, 1987)를 하고 있는가를 확인하기 위한 문항이다. 직사각형의 넓이 구하는 공식을 제시해야 하는 2-2(1)번 문항에서는 105명(86.1%)의 학생들이 정답을 제시하였으며, 오답과 무응답을 제시한 학생들은 각각 14명(11.5%), 3명(2.5%)에 불과한 것으로 나타났다. 그러나 직사각형의 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유를 설명하는 2-2(2)번 문항에서는 32명(26.2%)의 학생들만이 정답을 제시하였으며, 각각 45명(36.9%)과 45명(36.9%)의 학생들은 오답과 무응답을 제시하였다. 이로부터 직사각형의 넓이 구하기와 관련하여 90명(73.8%)의 학생들은 관계적 이해 상태가 아닌 도구적 이해 상태에 머무르고 있다고 할 수 있다.

직사각형의 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유에 대한 옳은 수학적 설명을 제시한 학생들의 응답은 크게 두 가지로 분류되었다. 첫 번째는 직사각형을 채우고 있는 단위 정사각형들의 개수를 구하기 위해서 가로와 세로에 놓여있는 단위 정사각형의 개수를 곱해야 한다는 응답으로서, 14명(11.4%)의 학생들이 이와 같은 응답을 제시하였다([그림 3] 참고). 두 번째는 직사각형은 삼각형 2개이고 삼각형의 넓이는 '가로×세로÷2' 이므로 ÷2를 하지 않으면 직사각형의 넓이가 된다는 응답으로서, 18명(14.8%)의 학생들이 이와 같은 응답을 제시하였다.[5)]

5) 이와 같은 응답은 수학의 위계성 측면에서 보면 옳은 답이 아닐 수도 있다. 왜냐하면 수학의 위계성 측면에서 보았을 때, 직사각형의 넓이 공식으로부터 평행사변형의 넓이 공식을 유도하고 다시 평행사변형의 넓이로부터 삼각형의 넓이 공식을 유도하기 때문이다. 실제로 우리나라의 초등학교 수학 교과서에서도 이와 같은 방식으로 삼각형의 넓이 공식을 유도하고 있다(교육과학기술부, 2010, 2011a). 그러나 초등학교 학생들의 응답을 수학의 위계성과 엄밀성을 엄격하게 적용하여 판단하는 것은 학생들의 인지 발달 단계를 고려했을 때 무리가 있을 것으로 판단하였으며, 따라서 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 직사각형의 넓이 공식을 설명하는 학생들의 응답을 옳은 답으로 인정하였다.



[그림 3] 2-2(2)번 문항에 대한 정답 예시

2-2(2)번 문항에서 나타난 대표적인 오답 유형과 학생 수를 제시하면 다음의 <표 6>과 같다.

<표 6> 2-2(2)번 문항에 대한 학생들의 오답

오답 유형		학생 수
공식을 그대로 반복해서 적음	가로×세로를 하면 넓이를 구할 수 있기 때문에	13 (10.6%)
공식을 그냥 받아들임	약속한 것이기 때문에	5 (4.0%)
	공식이기 때문에	4 (3.2%)
	그렇게 배웠기 때문에	2 (1.6%)

<표 6>에 나타난 대표적인 오답을 살펴보면, 13명(10.6%)의 학생들은 직사각형의 넓이 공식이 성립하는 이유로서 '가로×세로를 해야 넓이가 나오기 때문에'라는 설명을 제시하였는데, 이러한 설명은 공식을 그대로 반복해서 적은 것에 지나지 않는다. 한편, 11명(8.8%)의 학생들은 직사각형의 넓이 공식이 성립하는 이유에 대해 '약속한 것이기 때문에', '공식이기 때문에', '그렇게 배웠기 때문에' 등의 응답을 제시하였다. 이러한 응답은 넓이 공식이 성립하는 이유를 설명한 것이라고 할 수 없으며, 단지 공식을 그냥 받아들이는 것이라고 할 수 있다.

다. 평행사변형의 넓이 이해: 3번 문항

3-1번 문항은 두 변의 길이와 높이가 주어진 평행사변형의 넓이를 구할 것을 요구하는 문항이다. 평행사변형의 넓이를 구하는 데에 성공한 학생들은 75명(61.5%)로 나타났다. 3-1번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 38명(31.1%)이며, 응답을 제시하지 않은 학생은 9명(7.47%)로 나타났다. 오답을 제시한 학생들의 응답 유형은 다음의 <표 7>에 제시되어 있다.

<표 7> 3-1번 문항에 대한 학생들의 오답

오답 유형	학생 수
문제에 제시된 불필요한 정보(밑변이 아닌 변의 길이)를 넓이 구하기에서 사용한 경우, 즉 제시된 숫자를 조합하여 계산한 경우	20 (16.3%)
넓이를 구하는 과정에서 밑변×높이를 계산한 다음에 ÷2를 계산한 경우	10 (8.1%)
넓이 구하는 식은 옳지만 계산 과정이 틀린 경우	2 (1.6%)
풀이과정 없이 틀린 답을 제시한 경우	5 (4.0%)
평행사변형을 2개의 삼각형으로 분리하여 넓이를 구했지만 틀린 경우	1 (0.8%)

3-2번 문항은 평행사변형의 넓이 구하는 공식을 제시하고 그 공식이 성립하는 이유를 설명할 것을 요구하는 문항이다. 평행사변형의 넓이 공식을 제시해야 하는 3-2(1)번 문항에서는 47명(38.5%)의 학생들이 정답을 제시하였으며, 오답과 무응답을 제시한 학생들은 각각 62명(50.8%), 13명(10.7%)로 나타났다. 3-2(1)번 문항에서 나타난 대표적인 오답 유형과 학생 수를 제시하면 다음의 〈표 8〉과 같다.

<표 8> 3-2(1)번 문항에 대한 학생들의 오답

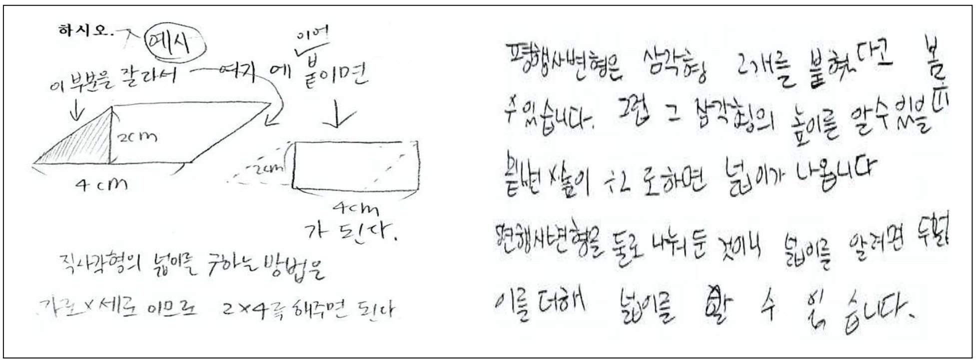
오답 유형		학생 수
잘못된 용어를 사용한 경우	- 가로×세로로 적은 경우 - 가로×높이로 적은 경우	28 (22.9%)
÷2를 한 경우	- 밑변×높이÷2로 적은 경우 - 가로×높이÷2로 적은 경우 - 가로×세로÷2로 적은 경우	9 (7.3%)
여러 가지 용어들을 조합하여 식을 제시한 경우	- (가로+세로)×높이÷2로 적은 경우 - 가로×세로×높이÷2로 적은 경우 - 가로×세로×높이로 적은 경우 - 가로+세로×높이×2로 적은 경우 - 가로×세로+높이로 적은 경우 - 가로×세로÷높이로 적은 경우 - 가로+세로×높이÷2로 적은 경우	13 (10.6%)
사다리꼴의 넓이 공식과 유사한 형태를 제시한 경우	- (윗변+ 아랫변)×높이로 적은 경우 - 아랫변×윗변×높이로 적은 경우 - 윗변+아랫변×높이÷2로 적은 경우 - 아랫변+높이로 적은 경우	4 (3.2%)

3-2(1)번 문항에서 오답을 제시한 학생들 중에서 28명(22.9%)의 학생들은 밑변 대신에 가로, 높이 대신에 세로라는 용어를 잘못 사용하여, ‘가로×세로’, ‘가로×높이’ 등을 평행사변형의 넓이 공식으로 제시하였다. 9명(7.3%)의 학생들은 평행사변형의 넓이 공식과

형태가 유사한 식에 ÷2를 하여 잘못된 공식을 제시하였다. 13명(10.6%) 학생들은 가로, 세로, 높이라는 용어를 모두 사용하여 잘못된 공식을 제시한 학생들이다. 그리고 4명(3.2%)의 학생들은 사다리꼴의 넓이 공식과 유사한 형태를 제시하여 잘못된 공식을 제시하였다.

3-2(2)번 문항에서는 평행사변형의 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유를 설명해야 한다. 3-2(2)번 문항에서는 40명(32.8%)의 학생들이 정답을 제시하였으며, 각각 19명(15.6%)과 63명(51.6%)의 학생들은 오답과 무응답을 제시하였다. 이로부터 평행사변형의 넓이 개념과 관련하여 82명(67.2%)의 학생들은 평행사변형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 설명하지 못하는 도구적 이해 상태에 머무르고 있음을 확인할 수 있다.

평행사변형의 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유에 대한 옳은 수학적 설명을 제시한 학생들의 응답은 크게 두 가지로 분류되었다([그림 4] 참고). 첫 번째는 평행사변형을 직사각형으로 변형하여 직사각형의 넓이 공식으로부터 평행사변형의 넓이 공식을 설명하는 응답으로서, 26명(21.3%)의 학생들이 이와 같은 응답을 제시하였다. 두 번째는 평행사변형을 2개의 삼각형으로 분할하고 삼각형의 넓이 공식으로부터 평행사변형의 넓이 공식을 설명하는 응답으로서, 14명(11.4%)의 학생들이 이와 같은 응답을 제시하였다.



[그림 4] 3-2(2)번 문항에 대한 정답 예시

3-2(2)번 문항에서 나타난 대표적인 오답 유형은 직사각형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 질문한 2-2(2)번 문항에서 나타난 오답 유형과 거의 동일하다(<표 6> 참고). 오답을 제시한 학생들은 공식을 그대로 반복해서 적거나(7명, 5.7%), '약속이기 때문에'(5명, 4.0%), '그렇게 배웠기 때문에' (2명, 1.6%), '공식을 알면 구할 수 있기 때문에'(5명, 4.0%) 등의 응답을 제시하였다.

라. 삼각형의 넓이 이해: 4번 문항

4-1번 문항은 변의 길이가 다양하게 주어진 삼각형의 넓이를 구할 것을 요구하는 문항이다. 4-1(1)번 문항은 세 변의 길이와 높이가 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 문항이며, 4-1(2)번 문항은 세 변의 길이만 주어지고 높이는 주어지지 않은 삼각형의 넓이를 구하는 문항이다. 4-1(1)번 문항에서는 91명(74.6%)의 학생들이 삼각형의 넓이를 옳게 구했으며, 오답을 제시한 학생들은 27명(22.1%), 응답을 제시하지 않은 학생은 4명(3.3%)으로 나타났다.

이와 대조적으로, 4-1(2)번 문항에서는 15명(12.3%)의 학생들이 옳은 답을 제시했으며,

오답을 제시한 학생들은 50명(41.0%), 응답을 제시하지 않은 학생은 57명(46.7%)으로 나타났다. 4-1(2)번 문항에서는 '높이가 제시되지 않았으므로 삼각형의 넓이를 구할 수 없다'는 응답을 정답으로 인정하였다. 정답을 제시한 15명(12.2%)의 학생들은 '현재의 변의 길이로는 삼각형의 넓이를 구할 수 없다'고 응답하였다.

4-1(2)번 문항에 대해 오답을 제시한 학생들의 응답 유형은 다음의 <표 9>와 같다.

<표 9> 4-1(2)번 문항에 대한 학생들의 오답

오답 유형	학생 수
문제에 주어진 밑변에 수직이 아닌 변을 높이로 생각하여 계산한 경우	27 (22.1%)
제시된 숫자들을 조합하여 계산한 경우	8 (6.5%)
풀이과정 없이 틀린 답을 제시한 경우	10 (8.1%)
높이를 어림해서 답을 제시한 경우	5 (4.1%)

4-2번 문항은 삼각형의 넓이 구하는 공식을 쓰고 그 공식이 성립하는 이유를 설명할 것을 요구하는 문항이다. 이 문항에서는 67명(54.9%)의 학생들이 정답을 제시하였으며, 오답과 무응답을 제시한 학생들은 각각 43명(35.2%), 12명(9.8%)로 나타났다. 4-2(1)번 문항에서 나타난 대표적인 오답 유형과 학생 수를 제시하면 다음의 <표 10>과 같다.

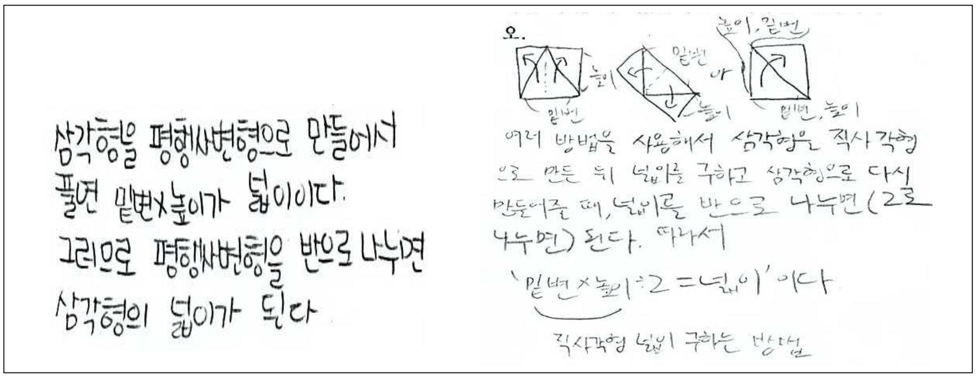
<표 10> 4-2(1)번 문항에 대한 학생들의 오답

오답 유형		학생 수
정확한 용어를 사용하지 못한 경우	- 가로×세로÷2 - 가로×높이÷2 - 밑변×옆변÷2 - 높이×세로÷2	30 (24.5%)
여러 가지 용어들을 조합하여 공식을 제시한 경우	- 가로×세로×높이 - (가로+세로+밑변)×높이÷2 - 가로×세로×높이÷2 - 가로+세로×높이÷2	10 (8.1%)

삼각형의 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유를 설명해야 하는 4-2(2)번 문항에서는 61명(50.0%)의 학생들이 정답을 제시하였으며, 각각 20명(16.4%)과 41명(33.6%)의 학생들은 오답과 무응답을 제시하였다. 이로부터 삼각형의 넓이 개념과 관련하여 61명(50.0%)의 학생들은 삼각형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 설명하지 못하는 도구적 이해 상태에 머무르고 있음을 알 수 있다.

삼각형의 넓이 구하는 공식이 성립하는 이유에 대한 옳은 수학적 설명을 제시한 학생들

의 응답은 두 가지로 분류되었다([그림 5] 참고). 첫 번째는 삼각형을 평행사변형으로 변형하여 평행사변형의 넓이 공식으로부터 삼각형의 넓이 공식을 설명하는 응답으로서, 56명(45.9%)의 학생들이 이와 같은 응답을 제시하였다. 두 번째는 삼각형을 직사각형으로 변형하여 직사각형의 넓이 공식으로부터 삼각형의 넓이 공식을 설명하는 응답으로서, 5명(4.1%)의 학생들이 이와 같은 응답을 제시하였다.



[그림 5] 4-2(2)번 문항에 대한 정답 예시

4-2(2)번 문항에서 나타난 대표적인 오답 유형은 직사각형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 질문한 2-2(2)번 문항에서 나타난 오답 유형과 거의 동일하다(<표 6> 참고). 오답을 제시한 학생들은 '공식대로 해야 답을 구할 수 있기 때문에'(8명, 6.5%), '전 세계의 약속이기 때문에'(5명, 4.0%) 등의 응답을 제시하였다.

V. 결 론

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 평면도형의 넓이 개념 이해와 관련된 다양한 측면을 조사하였다. 본 연구의 결과를 요약하고 이를 바탕으로 평면도형의 넓이 지도와 관련된 교수학적 시사점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서 조사한 문항 중에서 학생들의 정답률이 가장 낮은 문항은 1번 문항으로서 어떤 도형의 넓이가 8㎠라고 하는 것이 무슨 의미인가를 질문하는 문항이었다. 이 문항에서는 대부분의 학생들이(115명, 94.3%) 오답이나 무응답을 제시하였다. 넓이가 무엇을 의미하는가에 대한 학생들의 개념적 이해가 매우 미흡함을 확인할 수 있다. 본 연구에 참여한 학생들이 이수한 2007 수학과 교육과정에서는 '넓이를 이해하고 1㎠의 단위를 이해할 것'을 4학년에서의 성취기준으로 제시하고 있다(교육인적자원부, 2007). 그러나 2007 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에서는 넓이의 의미 이해와 관련된 활동이 다소 미흡하게 제시되어 있는 것으로 판단된다(교육과학기술부, 2010). 한편 가장 최근에 개정된 2009 수학과 교육과정에서도 넓이를 이해할 것을 강조하는 성취기준이 3-4학년군에 제시되어 있다. 따라서 교육과정에 제시된 성취기준을 교과서에서 적극적으로 구현하여 학생들의 넓이의 의미 이해를 향상시키기 위한 노력이 교과서 개발자들에게 요구된다고 하겠다. 이러한 요구는 특히 현재 2009 개정 교육과정의 수학 교과서를 개발하고 있는 개

발자들에게 더욱 요구된다고 하겠다.

둘째, 본 연구에서 학생들이 두 번째로 낮은 정답률을 보인 문항은 4-1(2)번 문항으로서, 이 문항에서는 학생들에게 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 넓이를 구하도록 요구하였다. 세 변의 길이만 주어지고 높이가 주어지지 않았기 때문에 이 문항은 삼각형의 넓이를 구하기에 정보가 부족한 문항이다. 이 문항에 대해 15명(12.3%)의 학생들만이 옳은 답을 제시하였으며, 107명(87.7%)의 학생들은 오답이나 무응답을 제시하였다. 이와 같은 정답률은 삼각형의 세 변의 길이와 높이가 주어진 4-1(1)번 문항에서 나타난 정답률(91명, 74.6%)과 큰 차이가 있다. 삼각형의 넓이를 학습한 학생들은 변의 길이나 높이가 주어지지 않은 도형에 대해서도 넓이를 구하는 데에 필요한 길이를 직접 측정하여 넓이를 구할 수 있어야 한다. 그러나 4-1(2)번 문항에서 드러난 학생들의 수행 정도는 학생들이 넓이를 구하는 데에 필요한 변의 길이나 높이를 직접 측정하여 넓이를 구하는 데에 매우 미흡함을 보여 준다. 수학 교과서를 살펴보면(교육과학기술부, 2010, 2011a), 학생들이 필요한 길이를 측정하여 넓이를 구하도록 요구하는 문제는 거의 다루어지지 않고 있음을 확인할 수 있다. 그러므로 학생들에게 직접 필요한 길이를 측정하여 넓이를 구해야 하는 다양한 맥락을 제공할 필요가 있으며, 교과서에서도 이러한 맥락을 구체적으로 다룰 필요가 있다.

셋째, 본 연구 결과, 도형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 제시하는 것과 관련하여, 학생들의 수행 정도는 ‘삼각형의 넓이→평행사변형의 넓이→직사각형의 넓이’의 순서로 나타났다. 한편, 본 연구에 참여한 학생들이 활용한 2007 교육과정의 수학 교과서에서는 직사각형의 넓이 공식으로부터 평행사변형의 넓이 공식을 이끌어내고, 평행사변형의 넓이 공식으로부터 삼각형의 넓이 공식을 이끌어낸다(교육과학기술부, 2010, 2011a). 도형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 제시하는 문항에서 학생들이 보인 수행 정도가 학생들이 학교에서 학습한 순서와 반대로 나타난 것은 매우 흥미로운 현상이다. 또한 직사각형의 넓이 공식은 다른 도형들의 넓이 공식을 이끌어내는 출발점이라는 것을 고려할 때, 학생들이 직사각형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 제시하는 것에서 상대적으로 낮은 수행 정도를 나타낸 것은 의외의 현상이라고 할 수 있다.

현행 수학과 교과서인 2007 교육과정의 수학 교과서를 살펴보면(교육과학기술부, 2010, 2011a), 직사각형의 넓이 공식을 이끌어내는 과정이 평행사변형이나 삼각형의 넓이 공식을 이끌어내는 과정에 비해 상대적으로 소홀하게 다루어지고 있음을 확인할 수 있다. 한편, 2007 교육과정에 따른 수학 교사용 지도서를 살펴보면, 귀납 추론 수업 모형에 따라 직사각형의 넓이 공식을 이끌어내는 수업 상황이 상세하게 제시되어 있다(교육과학기술부, 2009). 교사용 지도서에 제시되어 있는 귀납 추론 모형에 따른 직사각형의 넓이 공식을 이끌어내는 수업 상황을 교과서의 형식에 맞게 재구성하여, 교사와 학생들이 직사각형의 넓이 공식을 이끌어내는 과정을 적극적으로 교수·학습할 수 있도록 도움을 주는 방안을 고려할 필요가 있겠다.

넷째, 한 도형 내에서의 넓이 개념과 관련하여, 학생들은 넓이 공식이 성립하는 이유를 제시하는 문항에서 가장 낮은 수행 정도를 나타냈다. 예를 들어, 직사각형의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식이 성립하는 이유 설명하기 중에서 학생들은 넓이 공식이 성립하는 이유 설명하기에서 가장 낮은 수행 정도를 나타냈다. 넓이 공식이 성립하는 이유 설명은 도형의 넓이 구하는 방법의 이해와 관련되며, 이것은 2007 수학과 교육과정과 2009 개정 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되고 있는 내용이다(교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011b). 특히 2009 개정 수학과 교육과정에서는 넓이 구하는 방법을 다양하게 추론할 것을 강조하고 있다(교육과학기술부, 2011b). 현재 학교에서 활용되고 있

는 2007 교육과정의 수학 교과서를 살펴보면(교육과학기술부, 2010, 2011a), 평행사변형과 삼각형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 설명하는 과정이 적극적으로 다루어지고 있음을 확인할 수 있다.

그럼에도 불구하고 학생들이 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 설명하는 데서 미흡한 수행 정도를 나타낸 것은 교수·학습 방법과 더불어 평가 측면을 고려할 필요가 있음을 시사한다. 도형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 수학 수업의 교수·학습 방법 측면에서 적극적으로 다루는 동시에 평가에서도 적극적으로 다룰 필요가 있다는 것이다. 최근에 학교 현장에서 서술형 평가 문항의 활용이 증가하고 있는 상황에서, 도형의 넓이 공식이 성립하는 이유를 수학적으로 추론하는 과정은 서술형 평가에서 활용하기에 매우 좋은 수학 주제라고 할 수 있다. 따라서 도형의 넓이 공식을 이끌어가는 과정을 수학 수업에서 적극적으로 지도하는 것과 더불어 서술형 평가 문항에서 적극적으로 활용함으로써, 수학과 교육과정, 교수·학습 방법, 평가가 일관되게 이루어지도록 함으로써 상호상승 효과가 발휘될 수 있도록 해야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). **2007년 개정 수학과 교육과정.** 교육인적자원부.

교육과학기술부 (2009). **교사용 지도서 수학 2-1.** 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2010). **수학 4-2.** 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011a). **수학 5-1.** 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011b). **2009년 개정 수학과 교육과정.** 교육과학기술부.

교육부 (1997). **제7차 수학과 교육과정.** 교육부.

김수환 외 (2009). **초등학교 수학과 교재연구.** 서울: 동명사.

이경화 (2001). 활동과 직관을 강조한 측정 지도. **과학과 수학교육논문집,** 22, 99-118.

장영은 (2003). **도형과 관련된 문제해결과정에서 초등학생의 오류유형과 원인분석.** 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

전미정 (2010). **평면도형의 넓이 지도에 대한 연구-교과서 재구성을 중심으로.** 청주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Battista, M. (2003). Understanding students’ thinking about area and volume Measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: NCTM 2003 yearbook* (pp. 122-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: NCTM 2003 yearbook* (pp. 57-67). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* Penguin, Harmondsworth.

Stephan, M & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: NCTM 2003 yearbook* (pp. 3-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

<Abstract>

Examining Students' Conceptions about the Area of Geometric Figures

Na, Gwisoo[6)]

This research intends to examine how 6th graders (age 12) conceptualize the area of geometric figures. In this research, 4 problems were given to 122 students, which the 4 problems correspond to understanding area concept, finding the area of geometric figures-including rectangular, parallelogram, and triangle, writing the area formula for finding area of geometric figures, and explaining the reason why the area formula holds. As the results of the study, we identified that students revealed the most low achievement in the understanding area concept, and lower achievement in explaining the reason why the area formula holds, writing the area formula, finding the area of geometric figures in order. In based on the results, we suggested the didactical implication for improving the students' conception about the area of geometric figures.

Key words: elementary student, area of geometric figures, area concept, area formula

논문접수: 2012. 10. 22
논문심사: 2012. 11. 19
게재확정: 2012. 12. 04

6) gsna21@cje.ac.kr