한국초등수학교육학회지 16(3) 427-450. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 16(3) 427-450.
2012. 12. 31 December 31. 2012.

수학적 문제해결에서 상호작용을 통한 표상의 변환 과정 분석

이민애[1) · 강 완[2)

학생들이 사고를 조직하고 문제를 해결하며 의사소통을 하는 데 표상의 사용은 필수적이다. 본 연구는 초등학교 6학년 학생들이 수학적 문제를 해결하는 과정에서 나타내는 표상과 상호작용을 통한 표상의 변환과정을 분석함으로써, 학생들의 수학적 표상을 바르게 이해하고 올바른 표상 지도를 위한 시사점을 얻으려 하였다. 분석 결과 학생들은 한 가지 표상 방법보다는 두세 가지의 표상 방법을 사용하며, 학생-학생 간, 교사-학생 간의 상호작용은 표상의 정교화에 긍정적으로 영향을 주는 것으로 나타났다.

주제어: 표상, 상호작용, 변환

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학생들이 사고를 조직하고 문제를 해결하며 의사소통을 하는 데 표상의 사용은 필수적이다. 학생들은 표상을 통하여 문제에 제시된 정보나 상황을 알기 쉽게 나타내고, 체계적으로 조직하고 추론해간다. 그렇기 때문에 Izsák & Sherin(2003)은 수학적 내용이나 문제해결 전략, 학생의 사고에 관한 연구는 학생의 표상을 분석함으로써 이루어져야 한다(p. 18)고 했다. 또한, 교사는 학생의 표상을 통해 그들의 이해 수준과 사고 과정을 보다 잘 이해할 수 있으며 학생의 표상에 영향을 미칠 수도 있다. 이처럼 수학 교육에서 표상은 교사와 학생 모두에게 매우 중요한 요소이다. 그러나 수업 시간에 교사나 교과서에 의해서 표준화된 표상이 주어지고, 학생들이 자신의 표상을 구성하거나 탐구할 기회는 거의 없다.

따라서 표상의 중요성을 인식하고, 학생들이 의미 있는 표상을 하도록 바람직한 지도 방안을 생각해 볼 필요가 있다. 이를 위해서는 먼저 학생의 표상을 구체적으로 바르게 이해할 필요가 있다. 그래야 학생의 수준이나 상황에 맞는 올바른 표상 지도를 할 수 있기 때문이다. 하지만, 표상의 중요성에 비하여 수행된 연구는 많지 않으며, 특히 초등학교 고학년의 표상을 구체적으로 이해하기 위한 연구는 더욱 미흡한 실정이다.

이에 본 연구에서는 6학년 여러 학급에서 나타나는 다양한 표상에 대해 알아보고, 소집단을 대상으로 상호작용 속에서 나타나는 표상을 구체적으로 살펴보기 위한 질적 사례 연

1) [제1저자] 서울 남정초등학교
2) [교신저자] 서울교육대학교 수학교육과

구를 병행하였다. 본 연구의 목적은 초등학교 6학년 학생들이 수학적 문제를 해결하는 과정에서 나타내는 표상과 소집단 상호작용을 통한 표상의 변환과정을 구체적으로 살펴봄으로써, 학생들의 수학적 표상을 바르게 이해하고 올바른 표상 지도를 위한 시사점을 얻는데 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제해결

문제란 목표, 주어진 상태, 장애 요인이 포함되어 있고 해결방법이 즉각적으로 얻어지지 않는 것을 말한다. 수학적 문제 해결은 수학 교육에서 상당히 중요한 부분으로 강조되고 있는데, 수학적 문제 해결에 관한 그동안의 관점은 크게 3가지로 정리해 볼 수 있다. 첫째, Polya의 문제해결 단계나 이와 비슷한 문제 해결 과정으로 보는 관점이다. 둘째, 문제 해결에서 메타인지를 강조하는 과점이다. 셋째, 최근의 실생활 문제 해결과 역동적인 상호작용을 강조하는 모델링 관점이다. 여러 문제 해결 과정이나 전략에서 공통적으로 강조한 것은 '문제 표상'이다. 표상에 관한 여러 연구가 문제 해결 맥락에서 이루어지는 것도 표상이 수학적 개념이나 문제 해결 전략과 깊이 연관되어 있기 때문이다.

여러 문제 해결 전략에 따라 문제 유형을 분류하기도 하는데, Lenchner(1983)는 다음과 같은 12가지 전략 유형을 제시했다: (1)그림이나 다이어그램 그리기, (2)패턴 찾기, (3)체계적인 목록 만들기, (4)표 만들기, (5)문제를 단순화하여 풀기, (6)시행착오(추측하고 확인하기), (7)실험하기, (8)문제를 실행해보기, (9)거꾸로 풀기, (10)식 세우기, (11)연역법 사용하기, (12)관점 바꾸기이다(이양미 2005, p. 631, 재인용). 본 연구에서는 이들 유형과 초등학교에서 다루는 표상 체계를 고려하여 6가지 유형으로 범주화하여 활동 문항을 개발하였다.

2. 표상

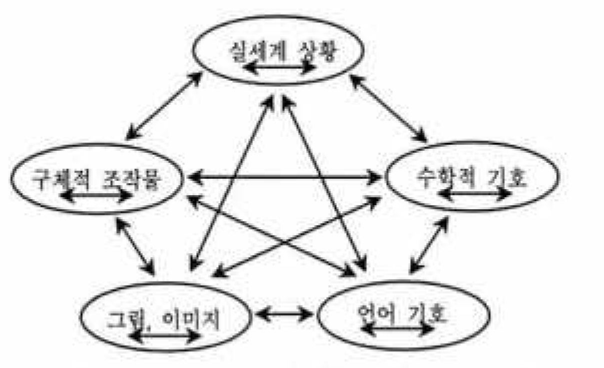
가. 표상의 개념

Goldin(2002)은 표상의 일반적인 의미로, "어떤 방식으로 다른 어떤 것을 나타낼 수 있는 것(p. 208)" 이라고 하였다. 실세계의 물건을 표현하는 단어, 집합의 순서를 표현하는 수, 수직선 위의 위치를 나타내는 수, 물건의 양을 수로 나타내는 것 등이 수학교육에서 사용하고 있는 표상의 예이다. 일반적으로 표상은 내적표상과 외적표상으로 구분하여 생각한다.

외적 표상은 수학의 형식적인 상징체계로 주로 기호와 형식화에 관한 것들이며 구어와 문어에서 사용되는 언어와 문장도 외적 표상이다. 내적 표상은 수학적 개념이나 문제 해결법의 발견에 대해 스스로 구축하는 과정으로 다른 사람과 공유하지 않고 학생 안에서 일어나는 작용으로 보고, 이를 인지적 표상이라 부른다. 본 연구에서는 표상이라는 용어를 내적 표상과 외적 표상, 그리고 상호작용 속에서 협상되어 나타나는 공유된 표상을 모두 포함하는 의미로 사용하였다.

나. 표상 양식과 표상 체계

표상은 하나씩 독립적으로 존재하는 것이 아니라 하나의 체계를 이루고 서로 연관되어 있다. 동일한 개념이 여러 형식으로 표현될 수도 있으며, 한 가지 표현이 여러 가지 의미로 해석될 수도 있다. 따라서 표상 체계에 관한 이해와 이들 간의 변환을 고려해 볼 필요가 있다. Lesh(1987)는 Bruner(1967)의 EIS이론의 세 단계를 확장시켜 표상 양식을 다섯 가지로 분류하였고, 이들 사이의 관계를 [그림 1]과 같이 나타내었다. 각각의 타원은 표상 양식을 뜻하고 전체는 표상 체계이다.



[그림 1] Lesh의 표상 변환 모델 (김민경 2010, p. 482, 재인용)

Lesh(1987, p. 364)는 이 표상 체계 자체도 중요하지만, 표상 체계들 간에 전환이 한 방향이 아닌 각 표상 양식들 사이의 상호작용이 이루어지고 있으며 더 나아가 표상 양식 내에서도 변환할 수 있다는 점을 강조하고 있다. 장혜원(1996, p. 189)의 표상모델은 Bruner와 Lesh의 모델을 참고하여 표현을 실제적 표현, 조작적 표현, 시각적 표현, 언어적 표현, 기호적 표현으로 분류하였다.

본 연구에서는 지금까지 여러 연구에서 표상 양식을 구분하는 데 있어서 기반이 된 이론인 Lesh(1987)의 이론과 장혜원(1996)의 표상체계를 이용해 ① 조작적 표상, ② 그림 표상, ③ 언어적 표상, ④ 기호적 표상, ⑤ 표·그래프 표상, ⑥ 목록 표상의 여섯 가지로 표상 양식을 구분하였다.

다. 문제해결 과정과 표상의 관계

수학교육학 연구자들은 문제 해결 과정이나 문제 해결 전략에서 ‘문제 표상’을 공통적으로 강조하고 있다(심은영 2006; 이양미·전평국 2005; 장혜원 1996; Diezmann & English 2001; Goldin 1990; Izsák 2003; Lesh et al. 1983; Mayer 1987)(김민경 2010, p. 483, 재인용). NCTM(2000)에서도 지난 수년간 교수 학습의 방법으로 표상의 중요성을 제기해 왔고, 특히 학생들의 다양한 표상 사용 능력과 문제 해결과의 관계에 대해 관심을 두었다. ‘Standard 2000’에서는 문제 해결 전략을 논하는 부분에서 교사는 학습자가 효과적으로 표상을 할 수 있도록 지원해 주어야 한다고 서술하고 있다. 그리고 학생들은 수학문제를 해결하고 개념을 이해할 때 문맥적 표상, 수학적 표상, 도형적 표상, 도표식 표상과의 연계를 통해야 한다고 주장하고 있다.

라. 수학 교육에서의 변환 과정

과정이란, 하나의 표상 방식에서 다른 표상 방식으로 바꾸는 것을 포함한 심리적인 과정으로, 방정식을 그래프로 바꾸는 것이 그 예가 될 수 있다.(Janvier, C. 1987, p. 27) 이러한 “변환 능력”은 수학 학습 및 문제 해결 과정에 영향을 미치는 중요한 요소이다.(Janvier, C. 1987, p. 36) 그리고 여러 연구에서 이 변환 능력의 강화 및 개선이 초등 수학의 개념을 이해하고 그것을 사용하는 것을 촉진시킨다고 말하고 있다.(Behr, Lesh, Post, & Wachsmuth 1985; Post 1986)

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

수학적 문제를 해결할 때 나타나는 학생들의 표상을 알아보기 위하여 서울 소재 4개 초등학교 6학년 4개 학급 학생들을 대상으로 연구를 수행하였다. 상호작용에 의한 표상의 변환과정을 알아보기 위하여 위의 4개 학급 중 2개 학급을 선정하여 그 안에서 4명으로 구성된 2개의 소집단 A, B를 대상으로 질적 사례 연구를 수행하였다. 2개 소집단의 교사는 남자 1명, 여자 1명으로 각각 다른 교육청에 소속된 교사이고 연령은 여교사가 20대, 남교사는 30대이다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구는 2011년 4월 ~ 2012년 6월까지 진행하였다. 본 연구의 세부 추진 절차는 <표 1>과 같다.

<표 1> 연구 절차

연구 과정	연구 내용	기간
연구 주제 선정	* 연구와 관련된 자료 수집 * 문헌 연구 및 선행 연구 분석 * 연구 주제 설정 및 연구 설계	2011.04. ~ 2011.07.
연구 계획 수립	* 연구 실행 계획 및 세부 일정 수립 * 연구 대상자 선정	2011.07. ~ 2011.08.
연구 실행	* 수학적 문제 개발(서술형 지필검사지) * 서술형 지필 검사지 작성 및 면담 * 소집단 활동 녹화 및 활동 후 면담 * 수업 보조 자료 수집	2011.08. ~ 2011.10.
	* 서술형 지필 검사지 분석 * 프로토콜 작성 및 소집단 활동 분석 * 상호작용에 의한 표상의 변환 과정 분석	2011.11. ~ 2012.02.
결과분석 및 연구 논문 작성	* 연구 결과 정리 및 분석 * 논문 작성 및 검토	2012.02. ~ 2012.06.

3. 자료 수집

수학적 문제를 해결할 때 나타나는 학생 및 교사의 표상 양식과 표상 형태를 알아보기 위하여 학생과 교사가 문제를 해결한 서술형 지필 검사지를 수집하여 분석하였다. 2개 소집단 학생들 간의 활동 과정, 교사-학생 간 소집단 활동 시 교사의 발문, 교사가 사용한 표상 양식, 교사와 학생 간의 대화를 음성 녹음기와 캠코더로 녹음 녹화하였다. 연구자는 소집단 참여 학생들과 교사를 대상으로 연구 수행 중 사전 면담과 연구 수행 후의 사후 면담을 실시하였다.

4. 자료 분석

수학적 문제를 해결할 때 나타나는 학생의 표상 형태를 알아보기 위하여 6학년 4개 학급 학생들의 활동지를 주로 분석하였다. 학생-학생 간, 교사-학생 간 상호작용을 통한 표상의 변환 과정을 알아보기 위하여 2개 소집단의 사례 연구에서 수집한 모든 활동지와 관찰 자료, 면담 자료를 분석하였다. 소집단 상호작용을 통한 표상의 변환 과정 분석은 Bogdan & Biklen(1982, pp. 146-169)의 질적 연구 방법론을 기초로 하였다. 즉 예비 코드 만들기(developing preliminary codes), 목록화 및 코드 분류하기(listing and sorting codes), 범주화하기(reducing and categorizing codes)의 단계를 거쳐 분석하고, 질적 연구의 타당도를 높이기 위해 삼각 측정법을 이용하였다.

5. 실험 활동 문제

[1-1 원탁 문제]
여러 사람들이 같은 간격으로 원탁에 앉았습니다. 첫 번째 사람과 일곱 번째 사람이 서로 마주 보고 앉았다면 원탁에 앉은 사람은 모두 몇 명인지 구하시오.

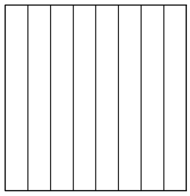
[1-2 높이 문제]
종국이네 학교 건물 앞면에 붙어 있는 시계의 높이는 학교 건물 높이의 2/3이고, 국기 게양대의 높이는 학교 건물과 시계 높이를 합한 것의 1/5이라고 합니다. 학교 건물의 높이가 15m일 때, 국기 게양대의 높이를 구하시오.

[1-3 반 학생 수 문제]
학생들을 대상으로 좋아하는 운동을 조사하였습니다. 축구를 좋아하는 학생은 29명, 야구를 좋아하는 학생은 11명, 축구와 야구를 모두 좋아하는 학생은 6명, 축구와 야구를 모두 좋아하지 않는 학생은 5명입니다. 이 반의 학생은 모두 몇 명입니까?

[2-1 놀이기구 타기 문제]
준석이네 가족과 친구들이 함께 놀이공원으로 소풍을 갔습니다. 공원의 놀이기구를 타는 데 드는 비용이 어른은 1100원, 어린이는 700원이었습니다. 5000원을 내니 표 7장을 주시며 700원을 더 내라고 하였습니다. 놀이 기구를 타는 어른과 어린이는 각각 몇 명입니까?

[2-2 대륙 맞히기 문제]
㉮, ㉯, ㉰, ㉱ 네 나라는 각각 아시아, 유럽, 아프리카, 아메리카 중 한 대륙에 있습니다. ㉮는 아시아에 있는 나라가 아니고, ㉯는 유럽에 있는 나라입니다. ㉰와 ㉱는 아프리카 대륙에 있는 나라가 아니고, ㉱는 아메리카에 있는 나라가 아닙니다. ㉱는 어느 대륙에 있는 나라입니까?

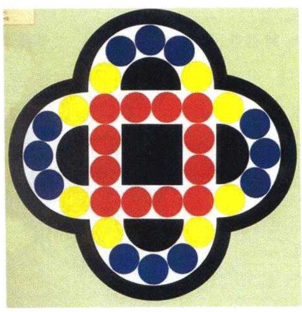
[3-1 만국기 꽂기 문제]
우리 구에서 마라톤 경기를 합니다. 42.195km인 마라톤 코드 도로 양쪽에 40m 간격으로 만국기를 달려고 합니다. 만국기는 모두 몇 개가 필요합니까? (단, 출발점에만 달고 도착점에는 달지 않습니다.)

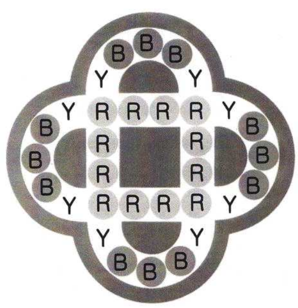


[3-2 정사각형 둘레 문제]
그림과 같이 정사각형을 합동인 직사각형 8개로 나누었습니다. 작은 직사각형 한 개의 둘레가 234cm라면, 정사각형의 둘레는 몇 cm입니까?

[4-1 동전 문제]
100원짜리 동전 20개를 수직선 위에 논은 후, 3의 배수에 놓인 동전을 10원짜리로 바꾸고, 5의 배수에 놓인 동전을 50원짜리로 바꾸고, 3과 5의 공배수에 놓인 동전을 500원짜리로 바꾸면, 놓인 동전의 금액의 합은 얼마입니까?

[4-2 구슬 움직이기 문제]
아래의 그림과 같이 길 위에 구슬이 가득 차 있습니다. 구슬들은 하나의 고리처럼 하나를 움직이면 다른 구슬들도 밀려 움직이게 됩니다. 아래의 그림에는 12개의 빨간 구슬과 12개의 파란 구슬, 8개의 노란 구슬이 있습니다. 그리고 중앙에는 빨간 구슬이 정사각형을 이루고 있습니다. 그런데 구슬을 움직여 파란 구슬들이 중앙에 정사각형을 만들게 하고 싶습니다. 한 번에 한 칸씩만 움직일 수 있다고 한다면, 최소한 몇 번을 움직여야 할까요?





[5-1 추의 무게 문제]
양팔 저울에 올려놓아 무게를 잴 수 있는 추가 5g짜리 2개, 10g짜리 2개, 20g짜리 2개가 있습니다. 이 추를 이용하여 잴 수 있는 무게는 모두 몇 가지인지 구하시오. (단, 추는 양팔 저울 한쪽에만 올려놓습니다.)

[5-2 카드 문제]

아래와 같이 다섯 장의 숫자카드가 있습니다. 숫자카드를 한 번씩만 사용하여 만3들 수 있는 네 자리 홀수는 모두 몇 개인지 구하시오.

1	8	0	2	5

[5-3 등 번호 제작 문제]

어느 대학교에서 단축 마라톤 경기에 204명이 참가하였습니다. 등 번호를 제작하려고 합니다. 숫자 2는 모두 몇 개 필요합니까?

[6-1 다이아몬드 문제]

수진이는 9개의 똑같은 무게가 나가는 소포를 포장하다가 그만 값비싼 다이아몬드 반지를 소포 꾸러미 중 하나에 떨어뜨리고 소포를 포장해 버렸습니다. 단 2번만 저울을 사용하여 소포를 뜯지 않고 반지가 어느 소포에 있는지 알아낼 수 있는 방법을 써보시오.

[6-2 구슬 색 찾기 문제]

어느 한 사람이 빨간색, 파란색, 초록색, 노란색, 오렌지색 구슬을 5개씩 주문하였습니다. 모두 100그램이고 단 하나의 색만이 110그램입니다. 어떻게 가장 적은 횟수로 저울을 달아 110그램인 구슬의 색을 찾을 수 있을까요?

Ⅳ. 분석 및 논의

1. 문제 해결 과정에서 나타난 학생들의 표상 양식

표상 양식에 대한 분류 기준을 ①그림, ②표, ③식, ④조작, ⑤목록, ⑥언어적 묘사로 통일하여 그 빈도를 정리하였다. 그 결과 유형 1에 나타난 표상 양식의 빈도는 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> 유형 1에 나타난 표상 양식의 빈도

표상 양식 / 번호	그림	표	식	조작	목록	언어적 묘사	합계
1-1	99 (67.3%)	0 (0%)	21 (14.3%)	0 (0%)	1 (0.7%)	26 (17.7%)	147 (100%)
1-2	23 (17.4%)	0 (0%)	101 (76.5%)	0 (0%)	0 (0%)	8 (6.1%)	132 (100%)
1-3	62 (39.5%)	1 (0.6%)	88 (56.1%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (3.8%)	157 (100%)

(※ 빈도는 114명의 검사지에 나타난 표상 양식을 표상의 옳고 그름에 관계없이 센 수이며, %는 빈도/합계임.)

유형 3에 나타난 표상 양식의 빈도는 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> 유형 3에 나타난 표상 양식의 빈도

표상 양식 / 번호	그림	표	식	조작	목록	언어적 묘사	합계
3-1	21 (17.2%)	0 (0%)	94 (77%)	0 (0%)	0 (0%)	7 (5.7%)	122 (100%)
3-2	7 (6.6%)	0 (0%)	94 (88.7%)	0 (0%)	0 (0%)	5 (4.7%)	106 (100%)

<표 2>과 <표 3>에서 보면 유형 1과 유형 3의 문제에서는 80%이상의 학생들이 그림과 식을 사용했다. [1-1 원탁 문제]에서는 그림이 빈번하게 사용되었는데 식으로 바로 나타내기보다 그림으로 그려서 생각해 보는 것이 이해하기 더 쉬웠기 때문인 것으로 해석할 수 있었다. 반면에 [1-2 높이 문제]의 경우는 그림보다는 식이 더 많이 사용되었는데 굳이 그림을 그리지 않더라도 식을 통해서 답을 쉽게 구할 수 있었기 때문인 것으로 보인다. [1-3 반 학생 수 문제]에서는 그림과 식이 비슷하게 사용된 것을 알 수 있다. 또한 유형 3의 [3-1 만국기 꽂기 문제]와 [3-2 정사각형 둘레 문제] 모두 식을 세워서 해결하려고 시도한 학생들이 많았으며 특히 [3-2 정사각형 둘레 문제]를 해결한 학생들 중에서는 방정식을 사용하여 문제를 해결한 학생이 많았다. 따라서 그림과 식은 6학년 학생들이 많이 사용하는 매우 익숙하고 정형적인 표상으로 여겨졌으며 식은 매우 표준화된 형태로 나타났다.

유형 2에 나타난 표상 양식의 빈도는 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 유형 2에 나타난 표상 양식의 빈도

표상 양식 / 번호	그림	표	식	조작	목록	언어적 묘사	합계
2-1	0 (0%)	34 (34.7%)	55 (56.1%)	0 (0%)	0 (0%)	9 (9.2%)	98 (100%)
2-2	4 (6.3%)	50 (79.4%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	9 (14.3%)	63 (100%)

<표 4>에서 보면 유형 2의 문제에서는 크게 표와 식으로 표현한 경우가 많았다. [2-1 놀이기구 타기 문제]에서는 표와 식이 90%이상 사용되었고, [2-2 대륙 맞히기 문제]에서는 80%의 학생들이 표를 사용하여 문제를 해결하였다. 문제의 특성상 추론의 과정을 거치기 때문에 표를 그려서 자신의 추론 과정을 명확히 하는 것이 도움이 되었다고 볼 수 있다. 그러나 [2-1 놀이기구 타기 문제]에서는 예상을 한 후 확인하는 전략이 많이 사용되기도 하였는데 문제에서 제시된 숫자를 이용하여 예상해 보는 것이 가능했기 때문으로 해석된다.

유형 4에 나타난 표상 양식의 빈도는 다음 <표 5>와 같다.

<표 5> 유형 4에 나타난 표상 양식의 빈도

번호 \ 표상 양식	그림	표	식	조작	목록	언어적 묘사	합계
4-1	65 (32.5%)	1 (0.5%)	63 (31.5%)	67 (33.5%)	1 (0.5%)	3 (1.5%)	200 (100%)
4-2	6 (6.4%)	0 (0%)	9 (9.6%)	54 (57.4%)	0 (0%)	25 (26.6%)	94 (100%)

<표 5>에서 보면 유형 4의 [4-1 동전 문제]의 경우 학생들은 먼저 그림으로 그린 후 조작의 과정을 거치고 이를 식을 세워 해결한 경우가 많았다. 학생들이 위와 같은 문제를 해결할 때 머릿속에서 추상적인 과정을 거쳐 해결하기 보다는 그림과 조작이라는 표상을 통해서 문제를 좀 더 쉽게 해결함을 알 수 있었다. 또한 그림을 그리고 조작한 다음 식을 세우는 활동을 통해 결과를 좀 더 명확하게 확인하려고 함을 알 수 있었다. [4-2 구슬 움직이기 문제]는 50%이상의 학생들이 조작을 통해서 문제를 해결하였는데 성공률이 낮았다. 이는 문제의 의미를 정확히 파악하지 못하고 공간상에서 도형의 움직임에 따른 변환과정을 유연하게 하지 못하여 답을 찾지 못한 것으로 보인다.

유형 5에 나타난 표상 양식의 빈도는 다음 <표 6>과 같다.

<표 6> 유형 5에 나타난 표상 양식의 빈도

번호 \ 표상 양식	그림	표	식	조작	목록	언어적 묘사	합계
5-1	15 (16.3%)	1 (1.1%)	16 (17.4%)	1 (1.1%)	58 (63%)	1 (1.1%)	92 (100%)
5-2	0 (0%)	1 (1.3%)	41 (52.6%)	0 (0%)	31 (39.7%)	5 (6.4%)	78 (100%)
5-3	0 (0%)	2 (2.4%)	37 (45.1%)	0 (0%)	41 (50%)	2 (2.4%)	82 (100%)

<표 6>에서 보면 유형 5에서는 80%이상의 학생들이 목록과 식을 사용했다. [5-1 추의 무게 문제]의 경우는 대다수의 학생들이 규칙을 찾아 해결하는 모습을 보였다. [5-2 카드 문제]와 [5-3 등 번호 제작 문제]의 경우 규칙을 찾아 체계적인 목록이나 수형도로 나타내기도 하였으나 [5-2 카드 문제]에서는 몇 가지 경우만 목록으로 제시하였고 [5-3 등 번호 제작 문제]에서는 어떠한 규칙을 찾아 목록으로 나열하기 보다는 단순하게 나열하는 양상을 보였다. 이는 학생들에게 [5-1 추의 무게 문제]보다 [5-2 카드 문제]와 [5-3 등 번호 제작 문제]의 문제가 더 어렵게 느껴지고 여러 경우를 빠뜨리지 않고 체계적으로 목록화하거나 조직화하는데 어려움이 있었기 때문으로 해석된다. 따라서 [5-2 카드 문제]와 [5-3 등 번호 제작 문제]에서는 많은 학생들이 가능한 모든 경우를 고려하지 못하고 즉흥적으로 몇 가지 경우만 나타냈으며, 체계적이지 않았다. 이는 동일한 유형의 문제라도 문제의 난이도에 따라서 학생의 표상에 영향을 미친 것으로 보인다.

유형 6에 나타난 표상 양식의 빈도는 다음 <표 7>과 같다.

<표 7> 유형 6에 나타난 표상 양식의 빈도

번호 \ 표상 양식	그림	표	식	조작	목록	언어적 묘사	합계
6-1	50 (52.6%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	45 (47.4%)	95 (100%)
6-2	30 (33.3%)	1 (1.1%)	4 (4.4%)	0 (0%)	0 (0%)	55 (61.1%)	90 (100%)

〈표 7〉에서 보면 유형 6에서는 90%이상의 학생들이 그림과 언어를 사용하여 문제를 해결하였다. 유형 6의 문제는 다소 생소한 유형의 문제여서 그런지 많은 학생들이 해결하지 못하였다. [6-1 다이아몬드 문제]의 경우 문제 상황과 관련 없는 표상을 하거나 전혀 엉뚱한 답을 하기도 하였다. [6-2 구슬 색 찾기 문제]에서는 대부분 언어로 설명하였는데 답은 아니었으나 자신의 생각을 논리적으로 설명하는 모습을 보였다.

〈표 2〉, 〈표 3〉, 〈표 4〉, 〈표 5〉, 〈표 6〉, 〈표 7〉을 바탕으로 유형 1부터 유형 6까지 그림, 표, 식, 조작, 목록, 언어적 묘사 각각의 표상 양식의 출현 빈도를 모두 합한 결과는 〈표 8〉과 같다.

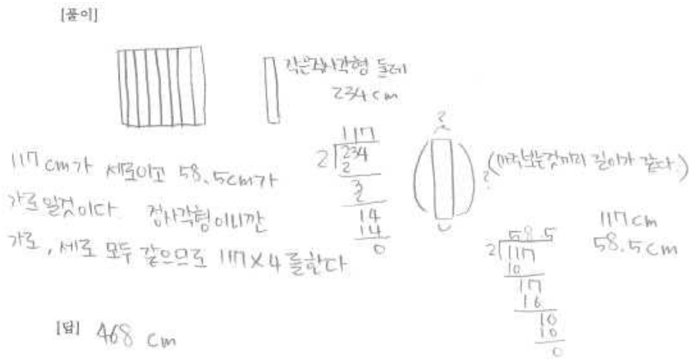
<표 8> 표상 양식의 출현 빈도

표상 양식 \ 문제	유형1	유형2	유형3	유형4	유형5	유형6	합계
그림	184	4	28	71	15	80	382
표	1	84	0	1	4	1	91
식	210	55	188	72	94	4	623
조작	0	0	0	121	1	0	122
목록	1	0	0	1	130	0	132
언어적 묘사	40	18	12	28	8	100	206
합계	436	161	228	294	252	185	1,556

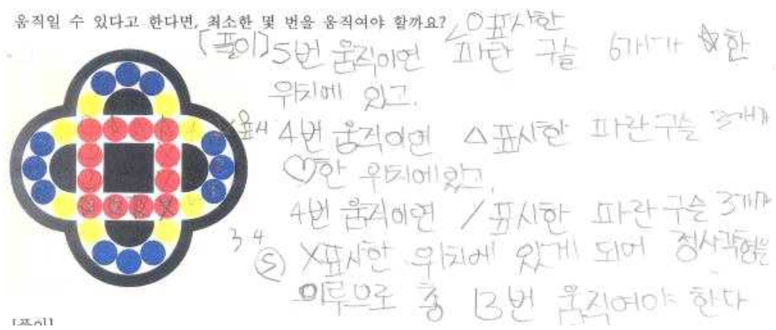
분석 결과 〈표 8〉에서 볼 수 있는 것처럼 6학년 학생들이 문제를 해결할 때 전반적으로 식(총 623회)을 많이 사용하는 것을 알 수 있었으나 학생들은 한 가지가 아닌 2~3가지 표상을 사용하여 문제를 해결한 것으로 나타났다.

다음 [그림 2]의 반 학생 수 문제에 나타난 표상이나 [그림 3]의 정사각형 둘레 문제에 나타난 표상, [그림 4]의 구슬 움직이기 문제에 나타난 표상에서 볼 수 있는 것처럼 문제를 해결하지 못하였으나 미숙하게나마 여러 가지 표상 양식을 사용하여 문제를 해결하려고 시도하는 모습을 볼 수 있었다.

[그림 2] 반 학생 수 문제에 나타난 표상의 예



[그림 3] 정사각형 둘레 문제에 나타난 표상의 예



[그림 4] 구슬 움직이기 문제에 나타난 표상의 예

그러나 표상이 문제 상황에 적절하지 않거나 구조적으로 체계화되어 있지 않아 효율적인 문제 해결로 연결되지 못한 것으로 나타났다. 이는 각 표상 양식의 특징이나 장단점을 정확히 이해하지 못하여 다양한 표상 양식을 사용하지 못하거나, 문제의 수학적인 연결을 고려하지 않고 피상적으로 표상한 것으로 해석된다.

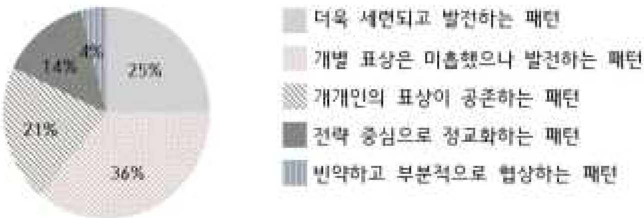
2. 학생-학생 간 상호작용을 통한 표상의 변환 과정 분석

소집단 구성원의 개별 활동지와 공동 활동지, 관찰 자료 및 면담 자료를 바탕으로 소집단 상호작용을 통한 표상의 변환 과정에서 보여지는 패턴을 ① 더욱 세련되고 발전하는 패턴, ② 개별 표상은 미흡했으나 발전하는 패턴, ③ 개개인의 표상이 공존하는 패턴, ④ 전략 중심으로 정교화하는 패턴, ⑤ 빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴의 5가지로 분류

하였다. 각 패턴이 나타난 비율은 <표 9>와 같다. 각각의 패턴에 따라 1)참여자 개개인의 표상, 2)상호작용하여 나타난 공동의 표상, 3)변환 과정에서 나타난 현상을 분석하였다.

<표 9> 상호작용을 통해 변환된 표상의 패턴별 빈도 및 비율

변환된 표상의 패턴	계(백분율)
더욱 세련되고 발전하는 패턴	7(25.0)
개별 표상은 미흡했으나 발전하는 패턴	10(35.7)
개개인의 표상이 공존하는 패턴	6(21.4)
전략 중심으로 정교화하는 패턴	4(14.3)
빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴	1(3.6)
N	28(100)



[그림 5] 상호작용을 통해 변환된 표상의 패턴별 비율의 원 그래프

가. 더욱 세련되고 발전하는 패턴(동전 문제)

1) 학습자 개개인의 표상

· 학생 K : 수직선을 그린 후 100 ~ 2000원까지 표시하였다. 3의 배수 아래에 10, 5의 배수 아래에 50, 15의 배수 아래에 500을 표시하였다.
· 학생 L : 100원, 10원, 50원, 500원짜리 동전 그림을 그려서 표상하였다. 그리고 앞에서부터 하나씩 더하였다.
· 학생 H : 해결하지 못하였다.
· 학생 M : 100원짜리 동전 그림을 그리고 3의 배수 자리의 동전 그림은 10원으로, 5의 배수 자리의 동전 그림은 50원으로, 15의 배수 자리의 동전 그림은 500원으로 순차적으로 바꿔주었다.

2) 협상되어 나타난 공동의 표상

처음에 개별 표상은 모두 그림으로만 표상했던데 반해 공동의 표상에서는 식을 함께 나타냄으로써 문제를 해결하는 과정 및 결과에서의 오류를 줄일 수 있었다([그림 6] 참조).

[그림 6] 동전 문제의 공동 표상(B소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

각자의 개별 표상을 바탕으로 서로의 표상이 갖는 장점과 단점을 자유롭게 논의하였다. 한 사람의 것을 비평이나 논의 없이 무조건적으로 따라하는 것이 아니라 문제를 효율적으로 해결하기 위한 표상을 논의하는 데 초점을 맞추고 활발한 논의가 이루어졌다. 이 과정에서 오류를 발견하고 이를 수정하면서 보완한 점, 서로의 전략이나 표상을 격려하고 지지하는 모습, 좋은 아이디어를 인정하고 칭찬하는 모습 등을 통해 구성원들 간의 긍정적인 상호작용이 중요하게 작용했음을 발견할 수 있었다.

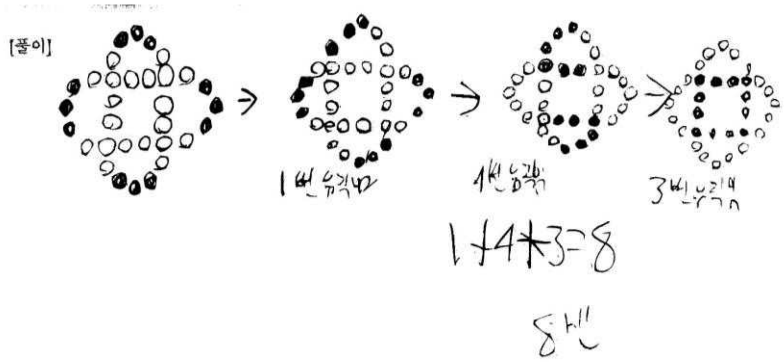
나. 개별 표상은 미흡했으나 발전하는 패턴(구슬 움직이기 문제)

1) 학습자 개개인의 표상

· 학생 Y : 해결하지 못하였다.
· 학생 N : ○와 숫자 1과 2를 사용하여 표상하였다. 그러나 제시된 표상만으로는 문제 해결 과정을 이해하는 데 어려움이 있었다.
· 학생 J : 추론한 후 이동 횟수를 식으로 표상하였다.
· 학생 S : 해결하지 못하였다.

2) 협상되어 나타난 공동의 표상

구슬 움직이기 문제의 경우 처음엔 학생들이 성공적으로 문제를 해결하지 못하였으나 구체물을 가지고 조작적 활동을 통해 표상함으로써 이해에 이르게 됨을 볼 수 있었다. 이 과정에서 바둑돌과 자석을 같이 사용하다가 크기가 같지 않아 불편함을 느끼게 되고 학생 J가 파란색 구슬을 흰 바둑돌이라 생각하고 나머지 구슬을 검은색 바둑돌로 생각하자고 하는 새로운 아이디어를 제시하게 된다. 이것이 학생들이 좀 더 쉽게 문제를 해결할 수 있는 연결 고리 역할을 하였다([그림 7] 참조).



[그림 7] 공동 학습지에 나타낸 구슬 움직이기 문제의 표상(A소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

변환 과정에서는 각자가 자신의 해결 방법이나 표상을 설명하고 의견을 교환하는 과정에서 스스로 오류를 발견하고 반성하는 것을 관찰할 수 있었다. 자기 설명과 타인과의 상호작용이 오류 발견이나 수정에 매우 중요한 활동임을 보여주는 예라 하겠다. 또한 이 패턴의 경우 개별 표상은 미흡하거나 전혀 나타내지 못한 경우가 있었는데 학생-학생 간, 교사-학생 간 상호작용을 통해서 촉진을 받고 사고의 전환이 되어 새로운 아이디어를 생산해 내거나 의미 있는 표상으로 나타내기도 하였다. 논의 시 자신의 방법을 강요하거나 한 사람이 주도하지 않았으며 동료의 학습을 돕고 동료의 제안이나 주장에 매우 긍정적으로 반응하며 발전된 표상으로 변환되었다.

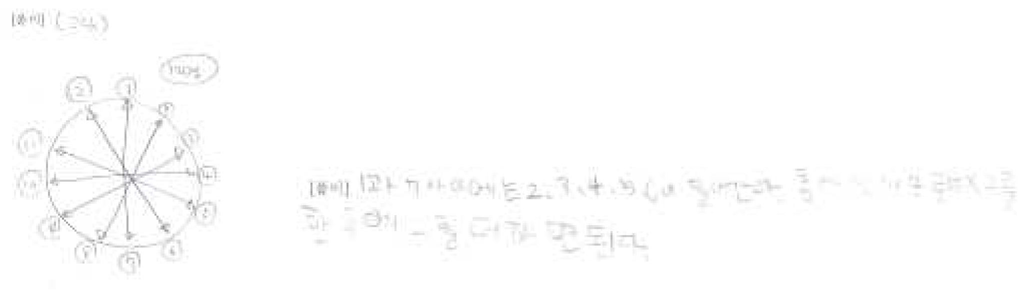
다. 개개인의 표상이 공존하는 패턴

1) 학습자 개개인의 표상

· 학생 K : 1과 7 사이에 5개의 수가 포함되고 1과 7를 더해주어야 하므로 5×2+2=12명이 나왔다.
· 학생 L : 실제적 표상으로 문제를 풀었다. 시계를 생각해 보았는데 시계의 숫자를 보면 1과 7이 마주보고 있다. 그렇다면 시계가 원탁이라 생각하고 숫자가 사람이라고 생각해서 모두 몇 명의 사람이 있을지 생각해 보았다.
· 학생 H : 원을 그리고 원 바깥쪽에 숫자를 쓴 후 선을 그어 나타내었다.
· 학생 M : 원을 그리고 원 바깥쪽에 숫자를 썼다.

2) 협상되어 나타난 공동의 표상

구성원 개개인의 표상이 공존하는 형태로 나타났다. 협의를 거쳐 공동의 표상으로 그림과 식을 선택하였다([그림 8] 참조).



[그림 8] 원탁 문제의 공동 표상(B소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

이 패턴에서 A소집단과 B소집단에서 보인 양상이 다소 차이가 있었다. A소집단과 B소집단 모두 개별 표상을 바탕으로 공동의 표상이 구성원 개개인의 표상이 공존하는 형태로 나타난 것은 같으나 B소집단의 경우 공동의 표상을 합의하는 과정에서 일부 학생은 다른 학생들의 의견을 받아들이지 않는 모습을 보였다. 반면에 A소집단은 각자의 표상이 가지는 장단점에 대해 논의해보고 정당화함으로써 구성원들을 설득하게 되고 의미 있는 표상으로 정돈시켜 나타내었다.

라. 전략 중심으로 정교화하는 패턴

1) 학습자 개개인의 표상

· 학생 Y : 2가지 방법으로 문제를 해결했다. 첫 번째는 만들 수 있는 무게를 모두 구해서 나열하였다. 두 번째는 만들 수 있는 무게는 모두 5의 배수에 해당되므로 만들 수 있는 가장 큰 무게=70, 가장 작은 무게=5를 구해서 그 사이에 있는 5의 배수를 따져보았다.

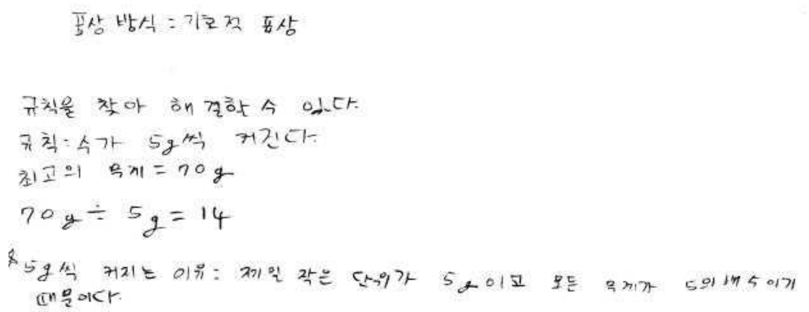
· 학생 N : 2가지 방법으로 문제를 해결했다. 첫 번째는 만들 수 있는 무게를 모두 구해서 나열하였다. 두 번째는 70÷5라는 식을 사용해서 나타내었다.

· 학생 J : 비표준화 된 표를 사용하여 나타내었다. 추를 1개 사용할 때, 2개 사용할 때, 3개 사용할 때 나올 수 있는 무게의 가지 수를 구하였다.

· 학생 S : N양과 같은 2가지 방법으로 문제를 해결했다. 첫 번째는 만들 수 있는 무게를 모두 구해서 나열하였다. 두 번째는 70÷5라는 식을 사용해서 나타내었다.

2) 협상되어 나타난 공동의 표상

이 문제의 경우 4명의 학생 모두가 성공적으로 문제를 해결하였다. 소집단 논의를 통해 개별 표상에 대해 설명을 하고 그 중에서 문제 해결에 가장 효과적인 전략을 찾아 이 전략을 중심으로 [그림 9]와 같이 정교하게 나타내었다.



[그림 9] 추의 무게 문제의 공동 표상(A소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

소집단 논의를 통해 먼저 개별 표상에 대해 설명을 하였다. 대부분은 2가지의 방법을 생각해냈는데 경우의 수를 모두 따져서 하는 방법은 시간도 많이 걸리고 힘이 든다는 결론을 내렸다. 학생 Y가 규칙을 찾아 배수로 나누는 전략에 대해 의견을 내자 다른 학생들이 동의했고 이를 식으로 나타내는 것이 가장 쉽고 편리한 방법인 것으로 의견이 모아졌다. 관찰결과 규칙을 찾는 것에는 큰 어려움을 느끼지 않았다.

마. 빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴

1) 학습자 개개인의 표상

· 학생 K : 바둑돌을 사용했으나 해결하지 못하였다.
· 학생 L : 가로 고리 방향으로 5번, 세로 고리 방향으로 4번 또는 가로 고리 방향으로 4번, 세로 고리 방향으로 5번해서 총 9번이라고 나타내었다.
· 학생 H : 네 방향에 있는 파란색 구슬을 각각 4번씩 돌려서 16번이라고 나타내었다.
· 학생 M : 첫 번째는 바둑돌을 사용했고 두 번째는 이면지에 한 장면씩 밀려나는 것을 그려본다고 답하였다.

2) 협상되어 나타난 공동의 표상

공동의 표상은 조작적 표상이라고 할 수 있으나 조작하는 과정에서 오류를 범하여 문제를 해결하지 못하였고 그 결과 B소집단 학생들은 활동지에 공동의 표상을 나타내지 못하였다.

3) 변환 과정에서 나타난 현상

구성원들은 문제에 대한 이해 과정부터 어려워했으며 각자의 미흡한 표상을 제안하고 논의하게 되었다. 이 과정에서 효율적으로 문제를 해결하지는 못했으나 각자의 표상이 미흡하거나 틀렸다는 것은 깨닫고 조작적 표상으로 접근하려고 노력하였다. 학생들이 구체물을 가지고 조작할 때 방향 선택을 잘못하여 문제를 해결하지 못한 것을 발견하긴 하였으나 다시 시도하는 과정에서 이번엔 방향이 아닌 횟수를 잘못 움직여서 결국 문제를 해결하지 못하였다.

바. 논의

<표 9>에서 볼 수 있는 것처럼 상호작용을 통해서 50%이상(25%+35.7%)이 좀 더 향상되고 발전된 표상으로 변환됨을 알 수 있었다. 더욱 세련되고 발전하는 패턴의 경우 개별 표상과 문제 해결이 대체로 성공적이었는데 학생-학생 간 상호작용을 통해 서로의 표상을 더 잘 이해하게 되고 혼자서 표상할 때는 미흡했던 부분들을 가다듬고 보완하여 세련되고 발전된 공동의 표상으로 나타내었다.

개별 표상은 미흡했으나 발전하는 패턴의 경우는 개별 표상은 미흡했거나 성공적으로 문제를 해결하지 못했는데 학생-학생 간 상호작용을 통해서 동료의 설명을 듣고 논의하는 과정을 거치면서 자연스레 자기반성을 하게 되고 스스로 오류를 수정하고 생소한 표상을 자신의 것으로 받아들일 수 있었다.

개개인의 표상이 공존하는 패턴의 경우는 각자의 표상이 공존하면서 문제 해결에 의미 있는 표상으로 나타냈는데 이 경우는 어느 한 사람의 표상이나 해결 전략이 논의없이 선택되는 위험도 있었으나 구성원들 각각의 표상이 우위를 가리지 않고 문제 해결에 기여했고 나름의 장점을 부각시켜 타당성을 인정하였다.

전략 중심으로 정교화하는 패턴의 경우는 표면적으로 깔끔하게 다듬어 나타내기 보다는 발전적인 전략에 중점을 두어 정교화 된 표상으로 나타냈는데 이 패턴에서는 여러 가지 방법들이 제기가 되고 그 중에서 문제 해결에 가장 효율적인 전략을 중심으로 의견이 모아지고 이를 정교화 된 표상으로 나타냈다.

빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴의 경우는 공동의 표상은 조작적 표상이라고 할 수 있으나 조작하는 과정에서 오류를 범하여 해결하지 못하였다.

또한 학생들이 서로 상호작용하면서 자신이 가지고 있던 개별 표상을 다른 표상으로 바꾸는 변환 능력이 수학 학습 및 문제 해결에 도움을 주는 모습을 관찰할 수 있었다. 학생들은 다양한 표상들이 가지는 이점을 파악하고 이를 바탕으로 문제 해결에 이를 수 있었다. 이는 여러 연구에서 변환 능력의 강화 및 개선이 초등 수학의 개념을 이해하고 그것을 사용하는 것을 촉진시킨다는 주장(Behr, Lesh, Post & Wachsmuth 1985; Post 1986)을 뒷받침하고 있다.

3. 교사-학생 간 상호작용을 통한 표상의 변환 과정 분석

소집단 구성원의 개별 활동지와 공동 활동지, 관찰 자료를 분석한 결과 A소집단 학생들은 대부분의 문제를 교사와의 상호작용보다는 구성원들 간의 상호작용을 통해 해결한 반면 B소집단 학생들은 상대적으로 교사와의 상호작용을 통해서 문제를 해결한 빈도가 높았다. 교사-학생 간 상호작용이 활발히 이루어진 문항을 패턴별로 분류해 보면 <표 10>과 같다.

<표 10> 교사-학생 간 상호작용이 활발히 이루어진 문항의 패턴별 분류

변환된 표상의 패턴	문항	
	A소집단	B소집단
더욱 세련되고 발전하는 패턴	·	1-3번
개별 표상은 미흡했으나 발전하는 패턴	·	3-1번, 5-2번
개개인의 표상이 공존하는 패턴	·	5-3번
전략 중심으로 정교화하는 패턴	3-1번	·
빈약하고 부분적으로 협상하는 패턴	·	·

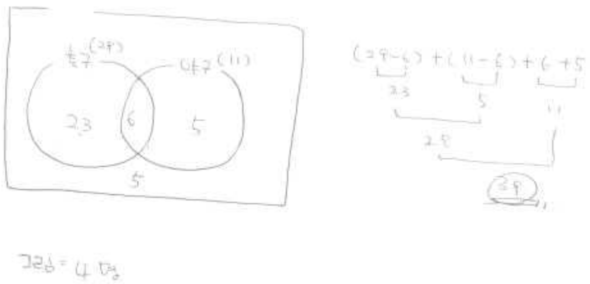
가. 더욱 세련되고 발전하는 패턴(반 학생 수 문제)

1) 교사 및 학생 개개인의 표상

· 교사 : 벤다이어그램을 그려 문제를 해결하였다.
· 학생 K : 언어로 풀어 설명하였는데 축구와 야구를 모두 좋아하는 학생을 빼주어야 하는데 빼주지 않았다.
· 학생 L : 벤다이어그램을 그려서 풀기도 하고 식을 세워 풀기도 하였는데 겹쳐지는 부분을 생각하지 못하고 모두 더해주었다.
· 학생 H : 벤다이어그램과 언어를 사용하여 해결하였다.
· 학생 M : 언어와 식을 사용하여 풀었는데 겹쳐지는 부분을 생각하지 못하고 모두 더해주었다.

2) 상호작용하여 나타난 공동의 표상

공동의 표상은 [그림 10]과 같이 그림과 식을 사용하여 나타내었다. 개별 표상에서도 그림과 식을 사용하여 문제를 푼 학생들이 있었으나 겹쳐지는 부분을 미처 생각하지 못하여 정확하지 않은 표상으로 나타냄으로써 문제해결에 이르지 못하였다. 학생들은 교사의 단계적 발문을 통해 이 부분을 깨닫게 되고 자신들의 표상을 좀 더 정확하고 세련되게 표상할 수 있었다.



[그림 10] 반 학생 수 문제의 공동 표상(B소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

반 학생 수 문제를 벤다이어그램으로 푼 학생들이 많았으나 문제를 성공적으로 해결하지는 못하였다. 그 이유는 축구와 야구를 모두 좋아하는 학생이 중복된다는 생각을 해주지 못했기 때문이다. 한 학생이 자신이 푼 방법을 친구들에게 설명하였으나 의사소통 능력이 부족하여 학생들이 잘 이해하지 못하였다. 이를 본 교사가 학생들에게 그림을 그리면서 단계적 발문을 하자 학생들이 훨씬 쉽게 이해하는 모습을 관찰할 수 있었다. 교사와의 상호작용을 통해 학생들은 자신들이 사용한 표상을 가다듬고 발전시켜 더욱 정확하게 나타낼 수 있었다.

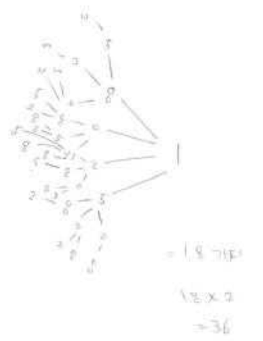
나. 개별 표상은 미흡했으나 발전하는 패턴(카드 문제)

1) 교사 및 학생 개개인의 표상

· 교사 : 수형도를 그려서 경우의 수를 알아본 다음 규칙을 발견한 후 식으로 나타냈다.
· 학생 K : 일의 자리에 1과 5가 오는 경우를 나열하였다.
· 학생 L : 천의 자리에 1, 2, 5, 8이 오면서 홀수인 경우를 나열하였다.
· 학생 H : 경우의 수를 나열하기도 하고 나눗셈으로 나타내기도 하였다.
· 학생 M : 그림을 선으로 잇고 나올 수 있는 경우의 수를 나열하였다.

2) 상호작용하여 나타난 공동의 표상

학생들은 [그림 11]과 같이 수형도와 식으로 공동의 표상을 나타냈다. 개별 표상에서는 단순히 경우의 수를 나열하는 경우가 많았는데 교사와의 상호작용을 통해 이전에 배웠던 수형도(나뭇가지 그림)를 떠올렸고 수형도를 사용하여 빠짐없이 손쉽게 표상할 수 있었다.



[그림 11] 카드 문제의 공동 표상(B소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

교사가 새로운 표상(수형도)을 제시하고 이를 문제에 활용해보도록 유도하였다. 그 결과 학생들은 모든 경우의 수를 빠짐없이 표상할 수 있었으며 자신들이 흔히 사용하지 않는 생소한 표상 또한 문제해결에 도움이 될 수 있음을 깨닫고 이를 공동의 표상으로 나타내었다.

다. 개개인의 표상이 공존하는 패턴(등 번호 제작 문제)

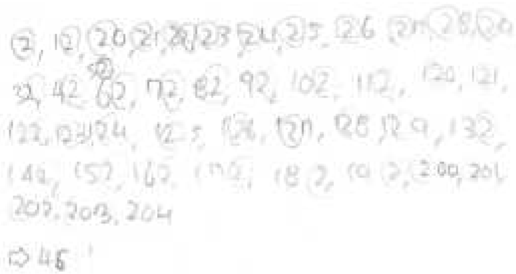
1) 교사 및 학생 개개인의 표상

· 교사 : 범위를 정해 경우의 수를 알아보았다.
· 학생 K : 2-204까지 2가 들어가는 수를 쭉 나열하였다.
· 학생 L : 1-10에서는 1개, 11-20에서는 2개,,,,201-204까지는 5개 이런 식으로 10개씩 범위를 나눠서 경우의 수를 알아본 후 더해주었다.
· 학생 H : 2-204까지 2가 들어가는 수를 쭉 나열하였다.
· 학생 M : 2-100에서는 19개, 101-199까지는 19개, 200-204까지는 5개가 나왔고 이를 모두 더해주었다.

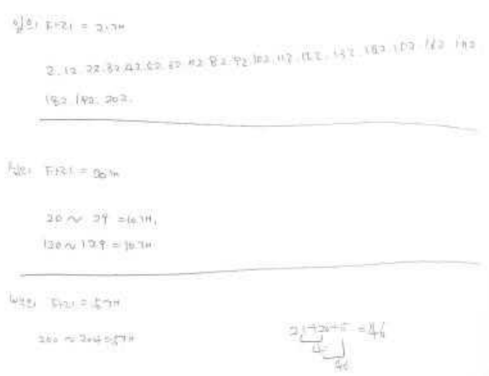
2) 상호작용하여 나타난 공동의 표상

공동의 표상은 [그림 12]와 같이 2가지로 나타내었다. 한 가지는 모든 경우의 수를 쭉 나열하였고, 다른 한 가지는 일의 자리에 2가 들어가는 경우, 십의 자리에 2가 들어가는 경우, 백의 자리에 2가 들어가는 경우로 범위를 나누어 해당되는 경우의 수를 나타내었다.

(방법 1)



(방법 2)



[그림 12] 등 번호 제작 문제의 공동 표상(B소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

구성원 및 교사와의 대화를 통해서 제시된 문제를 해결할 수 있는 다양한 표상 방법이 있다는 것을 알았지만 일부 학생들이 자신이 처음에 선택했던 개별 표상을 포기하지 않는 모습을 관찰할 수 있었다. 여학생들은 헷갈리지 않게 깔끔하게 정리하여 표상하는 것을 더 선호하였고, 반면에 남학생들은 정리되어 있지 않아도 자신이 쉽다고 생각하는 표상 방법을 택하였다. 2가지 모두 장단점이 있다고 생각하여 개별 표상을 바탕으로 구성원 개개인의 표상이 공존하는 형태로 공동의 표상이 나타났다고 할 수 있다.

라. 전략 중심으로 정교화하는 패턴

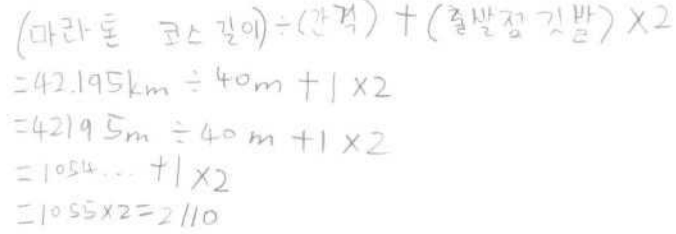
1) 교사 및 학생 개개인의 표상

· 교사 : 한 쪽 도로에 달 수 있는 만국기의 개수를 구한 다음 출발점에 단다고 했으니 1을 더한 후 양쪽 도로라고 해서 2를 곱하였다.
· 학생 Y : 한 쪽 도로에 달 수 있는 만국기의 개수를 구한 다음 출발점에 단다고 했으니 1을 더한 후 양쪽 도로라고 해서 2를 곱하였다.
· 학생 N : 도로 그림을 그리고 양쪽 도로라고 했으니 42.195에 2배를 하고 40으로 나눈 후 1을 더하였다.

· 학생 J : 42.195를 40으로 나눈 후 양쪽 도로이므로 2를 곱하였다. 출발점에 국기를 단다는 조건을 고려하지 않았다.
· 학생 S : 수직선을 그리고 42195를 40으로 나눈 후 1을 더하고 2배를 해 주었다.

2) 상호작용하여 나타난 공동의 표상

학생들은 [그림 13]과 같이 식으로 공동의 표상을 나타냈다. 개별 표상에서도 대부분의 학생들이 식으로 나타냈는데 구성원 및 교사와의 상호작용을 통해서 문제 해결에 가장 효율적인 전략을 중심으로 의견이 모아지고 이를 정교화 된 표상으로 나타냈다.



[그림 13] 만국기 꽂기 문제의 공동 표상(A소집단)

3) 변환 과정에서 나타난 현상

학생들은 개별 표상에서 식과 그림을 통해서 문제를 나타냈다. 몇몇 학생들은 표상을 하긴 했지만 문제의 조건을 충분히 고려하지 않아서 미흡한 표상을 보이기도 하였는데 교사와의 대화를 통해서 자신들이 놓쳤던 부분을 발견하고 문제 해결에 가장 효율적인 전략을 중심으로 의견을 모은 후 이를 정교화 된 표상으로 나타냈다. 공동의 표상에서는 식으로 나타낸 항목들이 무엇을 뜻하는지 먼저 기록함으로써 좀 더 쉽게 이해할 수 있도록 하였다.

Ⅴ. 결 론

첫째, 6학년 학생들은 영상적 표상보다는 상징적 표상을 더 많이 사용하여 나타내는 경향이 있지만 한 가지 표상보다는 2~3가지 표상을 사용하여 문제를 해결한다.

연구 결과 문제 해결 전반에 걸쳐 식 표상이 빈번하게 나타났으며 특히 문제에서 수가 주어질 경우 우선적으로 식으로 표상하는 경우가 많았다. 다른 연구자들은 이를 교과서나 수업에서 식을 지나치게 편중하여 강조하기 때문이라고 해석하였다. 그러나 초등학교 6학년 학생들은 수학 문제를 해결할 때 한 가지 표상보다는 2~3가지 표상을 사용하여 문제를 해결한 것으로 나타났는데 이는 학생들이 문제 해결에 효율적으로 연결하고 유창하게 변환하는 데는 능숙하지 않다고 할 수 있다. 이는 각 표상 양식의 특징이나 장단점을 정확히 이해하지 못하여 다양한 표상 양식을 적절히 사용하지 못하거나, 정확하게 표상하고도 이를 다른 표상으로 바르게 변환하지 못하여 문제를 효율적으로 해결하지 못했기 때문이다.

둘째, 학생-학생 간 상호작용은 개별 표상을 공동의 표상으로 정교화 하는 데 기여하며, 개개인의 표상에서도 발전된 변화를 가져올 수 있다.

학생들이 보여준 표상은 처음에 한 표상과 완전히 다른 표상으로 변환하기 보다는 동일 양식 내에서 수학적으로 좀 더 세련되어지고 가다듬어진 경우가 많았다. 처음 미흡했던 개별 표상이 구성원들 간의 활발한 의사소통, 긍정적인 상호작용, 다양한 표상과 전략 제안, 자기반성과 검토, 상대방의 표상에 대한 이해 등의 과정을 통하여 발전된 공동의 표상으로 변환되었으며 위의 과정이 활발히 일어날 때 더욱 의미 있고 발전된 표상으로 변환됨을 알 수 있었다.

셋째, 교사-학생 간 상호작용을 통해 교사는 학생의 표상에 긍정적인 영향을 주며, 문제를 효율적으로 해결할 수 있는 적절한 표상으로 변환하는 데 도움을 준다.

학생들 간의 상호작용만으로는 진전이 없거나 문제를 해결하지 못할 때 교사가 적절한 발문과 실마리가 될 수 있는 표상을 제시함으로써 다양하고 새로운 표상에 대해 생각해 볼 기회를 갖게 되고 성공적인 문제 해결로 이를 수 있는 표상으로 변환할 있었다.

소집단 상호작용을 통한 표상의 변환 과정은 어느 한 요소에 의해서 단순하게 이루어지지 않고, 여러 요소들이 복합적으로 작용하여 나타나는 역동적인 과정으로 나타났는데 본 연구에서 동일한 과제라도 소집단에 따라 변환 과정이 다르게 나타났으며, 동일한 소집단 내에서도 과제의 난이도나 상호작용의 정도에 따라 표상의 변환 과정에 차이가 있었다. 충분한 논의 없이 다른 사람의 표상을 따라가거나 처음에는 다른 사람의 표상을 완전히 이해하지 못하다가 상호작용을 하는 과정에서 상대방의 표상에 대해 이해하고 미흡한 점을 수정·보완하기도 하였으며 동일한 표상을 서로 다른 것으로 여기고 제안하였다가 다른 사람의 설명을 듣고 논의를 거치는 과정에서 이를 수정하기도 하였다. 따라서 소집단 상호작용을 통한 표상의 지도에서 교사는 구성원들의 표상 수준, 문제의 난이도, 수학적 용어 사용, 학생의 수학 태도와 같은 정서적인 면 등을 고려하여 활동 과정을 주의 깊고 통찰력 있게 관찰해 볼 필요가 있다.

참 고 문 헌

김남균 (2002). **초등학교 수학 교수-학습에서의 수학적 상징화에 관한 연구**. 박사학위논문 한국교원대학교.

김민경, 권혁진 (2010). 수학 문제 해결에서 학업성취도에 따른 표상 활용 능력과 특징 분석. **수학교육 24**(2), 475-502.

김선화 (1992). **표현의 문제에 대한 수학교육적 고찰**. 석사학위논문 서울대학교 .

김유정, 백석윤 (2005). 초등 수학 문제해결 과정에 사용되는 표현 방법에 대한 연구. **한국초등수학교육학회지 9**(2), 85-110.

김종백, 이성원 (2011). 시각적 스키마 프로그램이 문장제 표상과 문제해결력에 미치는 효과. **학교수학 13**(1), 155-173.

유대현, 강완 (2009). 수학 문제해결 과정에 나타난 초등학생들의 직관적 사고 분석. **수학교육 12**(1), 1-20.

이대현 (2003). 수학교육에서 시각적 표현에 관한 소고. **수학교육 42**(5), 637-646.

이양미, 전평국 (2005). 초등학교 3학년 학생의 수학적 문제 해결에서의 표상과 표상의 정교화 과정 분석. **수학교육 44**(4), 627-651.

이종희, 김부미 (2003). 문장제 해결에서 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 효과 분석. **학교 수학 5**(3), 361-384.

장혜원 (1996). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로. **수학교육학연구 6**(2), 185-196.

황현미, 방정숙 (2009). 수학 문제 해결과정에서 초등학교 6학년 학생들의 시각적 표현에 관한 연구. **수학교육 12**(2), 81-97.

Bruner, J. S. (1966). The process of education. 이홍우 역 (1966). **교육의 과정.** 서울: 배영사.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Flick, U. (2009). An introduction to qualitative research (2nd ed.). 임은미, 최금진, 최인호, 허문경, 홍경화 역 (2009). **질적 연구 방법.** 서울: 한울.

Izsak, A. & Sherin, M. G. (2003). Exploring the use of new representations as a resource for teacher learning. *School Science and Mathematics, 103*(1), 18-27.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating and mathematics.: Key components of models and modeling. In P. Cobb, K. McClain, & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (361-383). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathmetics*. Reston, VA: Author.

<Abstract>

An Analysis of the Transformation Process of Representation through Interaction in Mathematical Problem Solving

Lee, Min Ae[3]; & Kang, Wan[4]

Using representations is essential for students to organize their thinking, to solve problems and to communicate each other. Students express information or situations suggested by problems easily and organize and infer them systematically using representations. Also, teachers are able to comprehend students' levels of understanding and thinking process better through them, and influence their representations.

This study was conducted to understand mathematical representations of students uprightly and to seek implications for proper teaching of representations, by analyzing representations of students in mathematical problem solving process and the transformation process of representation via interactions.

Key words: Representation, Interaction, Transformation

논문접수: 2012. 09. 09
논문심사: 2012. 11. 19
게재확정: 2012. 12. 05

3) dream881@daum.net
4) wkang@snue.ac.kr