한국초등수학교육학회지 16(3) 321-336. 2012. 12. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 16(3) 321-336. December 31. 2012.

초등수학에서 대상과 구조: 구조의 횡적 다양성과 종적 다양성

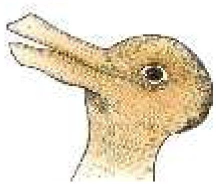
임재훈[1]

인식 주체는 자신의 경험을 바탕으로 주어진 대상에 구조를 부여하여 대상을 구조로 인식하려고 한다. 주어진 문제 맥락 속에서 주체가 대상에 부여할 수 있는 구조는 횡적, 종적으로 다양하다. 구조의 횡적 다양성의 측면에서, 한 대상 속에서 다양한 구조를 발견하는 데 초점을 맞춘 문제해결 활동은 다양한 전략 사용에 중점을 둔 문제해결 교육의 보완이 될 수 있다 또, 도형 패턴 과제에서 일반식의 발견은 문제해결의 종착점이 아닌 새로운 구조 탐구의 시발점으로 여겨져야 한다. 구조의 종적 다양성의 측면에서, 교사는 학생이 보는 구조와 교사가 보는 구조가 다를 가능성에 유의하면서, 구조의 종적 다양성에 기초하여 아동이 진보의 경험을 할 수 있도록 지도하는 방안을 모색할 필요가 있다.

주제어: 대상, 구조, 구조의 횡적 다양성, 구조의 종적 다양성, 문제해결, 패턴 일반화

Ⅰ. 서 론

칸트(1781)에 의하면, 우리는 사물 그 자체를 직접 인식할 수 없다. 우리는 있는 그대로의 사물 그 자체를 인식하는 것이 아니라, 이성의 선험적인 인식의 필터를 투과하여 형성된 현상의 세계를 인식한다. 인식 주체는 주어진 맥락 속에서 자신의 경험과 인지구조를 기초로 대상을 해석하거나 재구성하여 인식을 형성한다(김선유, 1999; 남진영, 2007; von Glasersfeld, 1995). 인식 주체는 수동적으로 대상을 모사하는 것이 아니라 자신의 경험을 바탕으로 주어진 대상의 요소들을 결합하여 나름의 구조로 인식하려고 한다.


[그림 1]
오리-토끼 그림

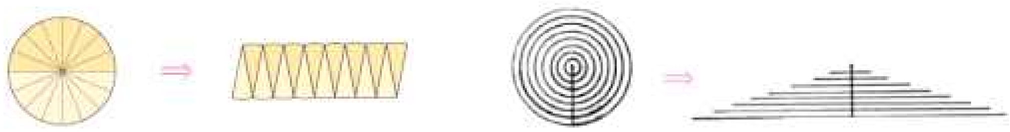
이와 같은 인식의 구조적 성격을 [그림 1]을 통해 확인할 수 있다. [그림 1]에 주어진 대상은, 주체가 대상의 구성 요소를 어떻게 결합하는가에 따라, 오리 그림이 되기도 하고 토끼 그림이 되기도 한다. 간단한 지각 현상에서 볼 수 있는 이러한 원리, 곧 동일한 대상이 주체의 해석에 따라 상이한 구조로 인식되는 원리는 더 복잡하고 차원 높은 지식의 경우에도 적용된다(장상호, 1997).

넓이 공식을 구하는 맥락에서 원이 주어졌을 때, 인식 주체는 주

1) 경인교육대학교 수학교육과

어진 대상을 단순히 동그란 모양으로 파악하는 데서 머물지 않고, 자신의 경험을 기초로 이 대상에 넓이를 구하는 데 유용한 어떤 구조를 부여하려고 한다. 원에 [그림 2](a)의 오렌지 단면과 같이 조각들이 모인 구조를 부여할 수도 있고, [그림 2](b)의 양파 단면과 같이 조각들이 모인 구조를 부여할 수도 있다. 오렌지 단면과 같은 구조를 부여하면, 평행사변형(직사각형)으로 변형하여 원의 넓이 공식을 구할 수 있다. 양파 단면과 같은 구조를 부여하면, 삼각형으로 변형하여 원의 넓이 공식을 구할 수 있다. 원 자체는 동일한 대상이지만, 주체가 문제 맥락 속에서 대상에 부여하는 구조는 이와 같이 다를 수 있다.

넓이 공식을 구하는 맥락에서 원을 오렌지 단면 구조로 보는가 양파 단면 구조로 보는가는 그 효용성 면에서 볼 때 큰 차이가 없다. 어느 구조든 간단히 원의 넓이 공식 $S=\pi r^2$ 을 구할 수 있다. 이것은 주어진 문제 맥락에서 유사한 정도의 효용성을 갖는 병렬적인 구조를 대상에 부여할 수 있음을 보여 준다. 즉, 주체가 대상에 부여하는 구조들 사이에 횡적 다양성이 있을 수 있다. 앞의 오리-토끼 그림 역시 구조의 횡적 다양성을 보여 준다.



(a) 원의 넓이 구하기 1 (b) 원의 넓이 구하기 2

[그림 2] 넓이 공식 구하기 맥락에서 원의 구조

주어진 문제 맥락에서 한 대상에 부여된 두 구조가 비슷한 정도의 효용성을 지니지 않을 수도 있다. 예를 들어, 원의 넓이 공식을 구하는 문제 맥락에서 원을 모눈 격자 조각들로 이루어진 구조로 보는 것은 그 근삿값을 구하는 데는 유용하나, 정확한 넓이 공식을 유도하는 데는 [그림 2]의 구조들만큼 유용하지 않다. 또 1에서 100까지 자연수의 합을 구하는 문제 맥락에서, 1부터 차례대로 100까지 더해 가는 구조로 보는가와 1과 100, 2와 99, 3과 98, ⋯, 50과 51의 합으로 이루어진 구조로 보는가는 그 효용성 면에서 큰 차이가 있다. 즉 대상에 부여되는 구조는 종적으로 수준이 다양할 수 있다.

구조의 횡적 다양성과 종적 다양성은 초등 수학교육 논의에 하나의 틀로 기능할 수 있다. 이 글에서는 구조의 횡적 다양성과 종적 다양성의 관점에서, 초등 수학교육의 몇 가지 이슈에 대하여 고찰함으로써 이와 같은 가능성을 확인하고자 한다. 먼저, 구조의 횡적 다양성의 측면에서 문제해결 교육에 관련된 시사점을 살펴보고, 규칙성 탐구에서 식의 해석을 통한 새로운 구조 발견을 통해 그 횡적 다양성을 강조할 필요에 대하여 논의한다. 이어서 구조의 종적 다양성의 측면에서 아동과 교사가 대상에 부여하는 구조가 다를 수 있음을 지적하고, 구조의 종적 다양성이 수학 학습 지도시 학생들이 진보와 발전의 총체적인 경험을 하도록 이끌 수 있는 바탕이 됨을 논의한다.

Ⅱ. 구조의 횡적 다양성

이 장에서는 구조의 횡적 다양성의 관점에서, 다양한 구조 발견에 초점을 맞춘 문제해결 활동이 다양한 전략 사용에 중점을 둔 현행 초등 고학년 수학 문제해결 교육의 보완 역할을 할 수 있음을 논의한다. 이어서, 도형 패턴 과제에서 일반식의 발견을 문제해결의 종착점이 아니라 새로운 탐구의 시발점으로 여기는 태도를 길러줄 필요가 있음을 논의한다.

1. 구조의 횡적 다양성과 문제해결 교육

<표 1>에는 1에서 81 사이의 자연수들이 적혀 있다. 이 표는 주체의 해석을 기다리고 있는 대상으로 볼 수 있다. 인식 주체에 의해 이 대상은 주체에게 새로운 의미를 지닌 구조로 탈바꿈한다. 주체가 대상에서 무엇을 보는가에 따라 또는 주체가 대상에 제시된 요소들을 어떻게 결합하는가에 따라, 대상은 주체에게 각각 상이한 구조로 나타난다.

문제 맥락은 주체가 단순히 대상을 수동적으로 지각하는 것을 넘어, 대상을 여러 각도에서 관찰하고 해석하여 하나의 구조로 파악하도록 자극하는 촉매의 역할을 한다. 예를 들어, <표 1>의 수표에 있는 모든 수의 합을 구하는 문제를 해결하는 맥락에서, 학생들은 다음과 같은 상이한 구조에 주목할 수 있다.

<표 1> 곱셈 구구표

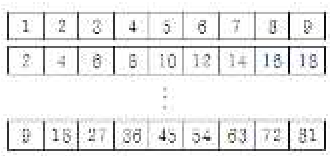
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

철수: 이 표는 9개의 줄이 차례대로 위에서부터 아래로 붙어서 만들어진 것이다.

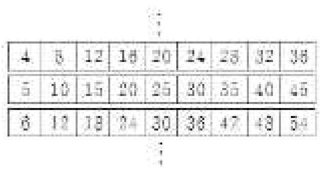
영희: 이 표는 5번째 줄을 축으로 하여 상하로 줄이 퍼져나가는 구조로 되어 있다. 이때 윗줄의 수는 5번째 줄의 수보다 얼마간 작고, 대신 아랫줄의 수는 5번째 줄의 수보다 그만큼 크다.

민수: 이 표는 한 가운데에서부터 동심원처럼 퍼져나가는 구조로 되어 있다.

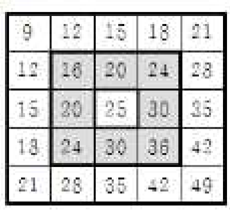
지민: 이 표에 있는 수들은 [그림 3] (d)와 같이 가장자리의 두 줄에 의해 결정된다.



(a) 철수의 구조



(b) 영희의 구조



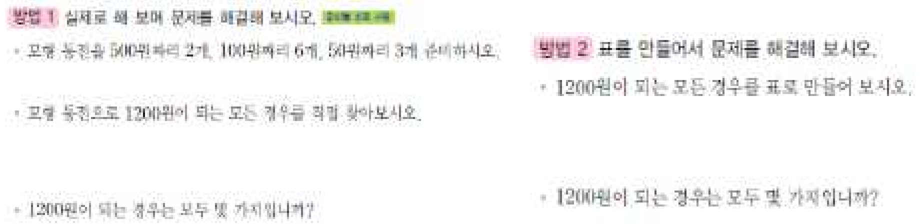
(c) 민수의 구조

(d) 지민의 구조

[그림 3] 곱셈표의 구조

주어진 대상을 어떤 구조로 파악하는가에 따라 이 수표에 있는 81개의 수의 합을 다른 방법으로 구하게 된다. 철수가 (1+2+3+⋯+9)+(2+4+6+⋯+18)+⋯(9+18+27+⋯+81)=45+2×45+⋯+9×45와 같이 합을 구한다면, 영희는 5번째 줄의 수의 합의 9배로, 민수는 25의 81배로, 지민이는 (1+2+3+⋯+9)×(1+2+3+⋯+9)와 같이 합을 구할 수 있다.

문제해결 교육을 통해 이와 같이 한 대상 속에서 상이한 구조를 발견하고 비교하는 경험을 하게 할 수 있다. 우리나라 초등학교 수학의 문제해결에서는 실제로 해보기, 표 만들기, 단순화하기, 예상과 확인, 거꾸로 풀기, 식 세우기와 같은 명시적인 여러 가지 문제해결 전략에 중점을 두고 있다(교육인적자원부, 2007). 초등학교 4학년까지 이와 같은 개개의 전략을 학습한 후, 초등학교 고학년에서는 한 문제를 두 가지 전략을 사용하여 해결하고 비교해 보는 데 중점을 두고 있다. 예를 들어, 수학 5-2 교과서에서는 “은지의 지갑에는 500원짜리 동전 2개, 100원짜리 동전 6개, 50원짜리 동전 3개가 있습니다. 은지가 문구점에서 색종이를 사려고 동전 몇 개를 꺼내었을 때 1200원이 되는 경우를 알아봅시다.” 와 같은 문제를 실제로 해보기와 표 만들기라는 두 전략을 써서 해결하고, 각 방법의 장단점을 비교해 보고 두 가지 방법 중 어느 방법이 좋다고 생각하는지 알아보게 한다.



[그림 4] 두 가지 전략을 사용한 문제해결 (수학 5-2, pp. 118-119)

두 가지 서로 다른 문제해결 전략을 사용하여 한 문제를 해결하면서 경우에 따라 학생들은 한 대상으로부터 다른 구조를 보게 될 수도 있지만, 서로 다른 문제 해결 전략이 반드시 서로 다른 구조의 발견으로 이끄는 것은 아니다. 실제로 해보고 표를 만들어 보면서, 동일한 또는 매우 유사한 구조에 주목할 수 있다. 그림 그리기 전략과 식 세우기 전략을 사용할 때에도 동일한 구조를 그림이나 식으로 표현만 달리 하여 나타낼 수 있다. 현재와 같은 전략의 다양성과 더불어, 구조의 다양성에 초점을 둔 문제해결 경험을 초등 고학년 문제해결교육에서 복합적이고 총체적으로 제공하면 아동들이 풍부한 문제해결 경험 속에 창의성을 기르게 하는 데 유익할 것이다.

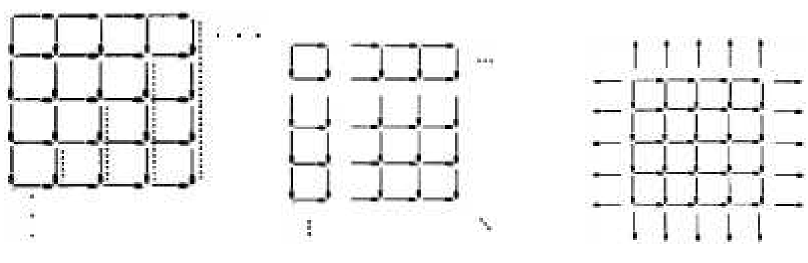
2. 패턴 일반화에서 구조의 횡적 다양성과 식의 해석

수학적 패턴 일반화와 관련하여, 수치적 접근과 시각적 접근의 병행 필요성이 논의되어 왔다. Steelee & Johanning(2004)에 의하면, 여러 경우에 대한 수치적 자료를 조사하고 그에 의존하여 문제를 해결하려 하는 아동보다 상대적으로 적은 경우의 다이어그램을 그려 그 구조를 통찰하고자 한 아동들이 문제를 잘 해결하였다. 일반화에 성공적인 학생들은 여러 수치적 자료를 조사하여 정리한 표를 발견의 용도로 사용하기보다 다이어그램이 어떻게 작동하는지를 확인하는 보조적 수단으로 사용하였다. 송상헌 외(2007)의 연구에서도 수학적으로 능력 있는 초등 수학 영재들은 표를 사용한 수치적-귀납적 접근보다 다이어그램을 사용한 구조적 통찰을 선호하였다. 임재훈(2009)은 패턴 일반화에서 귀납적 접근, 역

행적 추론, 구조적 통찰의 복합적 접근 필요성을 지적하였다. Mason(1996)은 가장 강력한 일반화는 하나의 예로부터의 일반화라고 하였는데, 구조적 통찰은 이와 같은 일반화와 밀접한 관련이 있다.

일반식을 이끌어내기 이전에 구조의 통찰은 시각적 조직화에 의존해야 하나, 일반식을 얻고 나면 이 식을 다른 구조를 발견하는 데 활용할 수 있다. 문제의 해답을 구한 다음의 학습이 중요한 것처럼(남승인, 1997), 일반식을 이끌어낸 이후의 탐구가 중요하다. Hershkowits, Arcavi, Bruckheimer(2001)는 교사들에게 $n \times n$ 정사각형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 구하는 과제를 제시하였다. 교사들은 수치적-귀납적인 접근과 더불어 다양한 시각적 접근을 시도하였다. 교사들이 시도한 시각적 접근법 중 가장 보편적인 것은 "가로에는 성냥개비 n개씩 있는 줄이 $n+1$개 있으므로 가로에 있는 성냥개비의 개수는 $n(n+1)$이고 세로로도 그만큼의 성냥개비가 있으므로 전체 성냥개비 개수는 $2n(n+1)$"과 같이 구한 것이다. 그런데 이와 같이 일반식을 구한 교사 중 한 명은 $2n(n+1)$을 $4 \times \dfrac{n(n+1)}{2}$으로 변형하고 $1+2+3+\cdots+n$ 의 4배를 그림 속에서 찾고자 하였고, 그 결과 [그림 5](a)의 구조를 발견하였다. (그림에서 점선으로 된 선분은 $1+2+3+\cdots+n$ 을 나타낸다.)

일반식이 모든 구조의 발견에 직접적인 도움이 되는 것은 아니다. 어떤 구조는 일반식의 간단한 변형으로부터 발견의 단서를 찾기 어렵다. 예를 들어, [그림 5](b), (c), [그림 6]의 구조를 일반식 자체나 일반식의 자연스런 간단한 변형을 통해 발견하기는 어렵다. 이와 같은 구조는 주어진 대상에 대한 시각적 관찰을 기초로 대상을 구성하고 있는 기본요소를 설정하고, 분해, 결합, 재구성하는 시각적 조직화를 통해 발견할 수 있다.



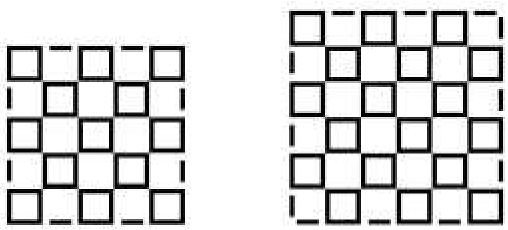
(a) (b) (c)

[그림 5] n×n 정사각형의 다양한 구조 (Hershkowits, Arcavi, Bruckheimer, 2001)

[그림 5](b)에서는 주어진 대상을 정사각형 하나에 와 가 붙어서 이루어진 구조로 보고 있다. 이 구조는 수식으로 $4+2\times3(n-1)+2(n-1)(n-1)$ 로 표현할 수 있다. [그림 5](c)에서는 을 기본단위로 보고 있다. 이 구조는 수식 $\{4(n+1)^2-4(n+1)\}\div2$로 표현할 수 있다. $4+2\times3(n-1)+2(n-1)(n-1)$ 이나 $\{4(n+1)^2-4(n+1)\}\div2$를 정리하면 간단히 $2n(n+1)$이나 $2n^2+2n$을 얻을 수 있다. 그러나 $2n(n+1)$이나 $2n^2+2n$을 $4+2\times3(n-1)+2(n-1)(n-1)$ 이나 $\{4(n+1)^2-4(n+1)\}\div2$으로 변형하여 위 그림의 구조를 찾아내기는 쉽지 않아 보인다.

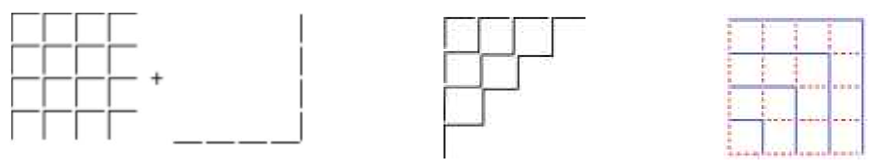
[그림 6]은 필자의 문제해결 강좌에서 한 예비교사가 발견한 것이다. (a)에서 n이 홀수

일 때 성냥개비의 개수는 $4\times\frac{n^2+1}{2}+4\times\frac{n-1}{2}=2n^2+2n$이 되고, (b)에서 n이 짝수일 때 성냥개비의 개수는 $4\times\frac{n^2}{2}+4\times\frac{n}{2}=2n^2+2n$이 된다. 이 구조 역시 수식 $2n(n+1)$이나 $2n^2+2n$의 간단한 변형으로부터 얻기는 어려운 것으로 보인다. 이와 같이 도형 패턴 일반화 과제에서 구조의 횡적 다양성은 시각적 조직화에 많이 의존하는 것이 사실이다.

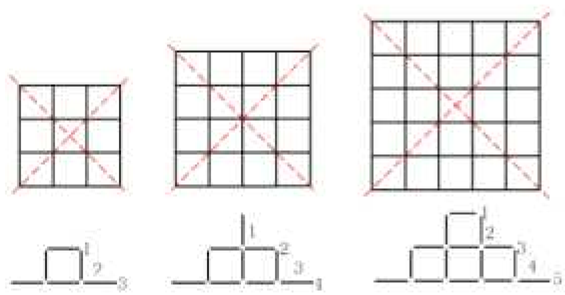


[그림 6] 한 예비교사가 발견한 $n\times n$ 정사각형의 구조

그러나 어떤 구조들은 수식의 변형을 통해 발견에 이를 수 있다. 예비교사들과 교사들에게 $2n(n+1)$이나 $2n^2+2n$을 분석, 변형하여 새로운 구조를 발견해 보도록 하였을 때, 그들은 [그림 7]에 제시된 것과 같은 구조를 발견하였다: (a) $2n^2+2n$, (b) $2\times(2+4+6+\cdots+2n)$, (c)$2\times(2+4+6+\cdots+2n)$, (d) $4\times(1+2+3+\cdots+n)$



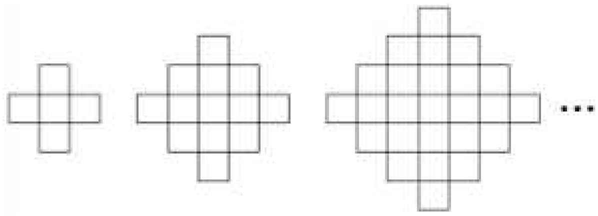
(a) (b) (c)



(d)

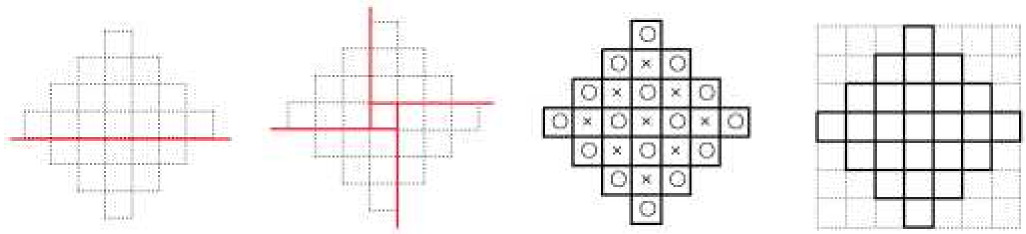
[그림 7] 일반식의 변형에 의해 발견한 $n\times n$ 정사각형의 구조

위 문제에 이어서 [그림 8]과 같은 십자모양 패턴에서 n번째 모양을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 구하는 문제를 예비교사들과 교사들에게 제시하고, 한 가지 방법으로 일반식을 찾으면 그 일반식을 분석, 변형하고 그것을 바탕으로 새로운 구조를 찾아보도록 하였다.



[그림 8] 십자모양 패턴

한 예비교사는 [그림 9](a)로부터 $\{1+3+\cdots+(2n+1)\}+\{1+3+\cdots+(2n-1)\}=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1$의 일반식을 구하였다. 그리고 이 식을 변형한 $4\times\dfrac{n(n+1)}{2}+1$로부터 [그림 9](b)의 구조를, $(n+1)^2+n^2$으로부터 [그림 9](c)의 구조를 찾아냈다. 그러나 수식의 변형에 의해 [그림 9](d)의 큰 직사각형에서 네 모퉁이를 뺀 구조 ($(2n+1)^2-4\times\dfrac{n(n+1)}{2}$)를 발견하지는 못하였다.

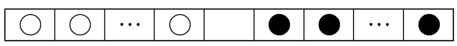


(a) (b) (c) (d)

[그림 9] 십자 모양 패턴의 구조

수식의 변형, 분석을 통해 발견할 수 있는 구조는 시각적 조직화를 통해서도 발견할 수 있다. 그러나 수식은 주체에게 시각적 조직화의 단서를 제공하여, 수식의 도움이 없이는 그 주체가 발견하지 못했을지도 모르는 구조를 발견하게 해준다. $2n^2+2n+1=4\times\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ 의 변형을 바탕으로 '정사각형 한 개(1)를 제외해 놓고 4개의 자연수의 합 $1+2+3+\cdots+n$ 을 찾겠다'는 마음을 가지고 그림을 볼 때가 이런 구체적인 의도 없이 막연히 새로운 구조를 찾아보겠다며 그림을 볼 때보다 [그림 9](b)의 구조를 발견하기 쉽다.

김민정, 이경화, 송상헌(2008)은 초등학교 5학년 수학 영재들에게, [그림 10]과 같이 흑백의 바둑돌이 좌우로 각각 n개씩 놓여 있을 때 바둑돌의 배열 상태가 반대가 되도록 하는 최소 횟수를 구하는 과제(한 번에 돌 한 개를 옆의 빈 칸으로 한 칸 밀거나, 이웃한 다른 색깔의 바둑돌 한 개를 건너 뛸 수 있다)를 가지고, 초등 수학 영재 아동들의 사고를 분석하였다. 연구에 참여한 4명의 영재 아동은 모두 과제에 내재된 복합관계를 인식하고, $(n+1)^2-1$, $n(n+2)$, n^2+2n 과 같은 식을 만들어



[그림 10] 페그 퍼즐

일반화에 도달하였다. 그런데 이 식을 얻은 후 4명의 아동의 탐구는 둘로 나누어졌다. 4명 중 한 명의 아동만이 식을 얻은 후, 바둑돌이 움직인 경로를 탐색하여 문제 상황의 구조를 인식하는 수준에 이르렀다.

이 영재 아동은 자신이 구한 일반식이 어떻게 나오게 되었는지 이동 과정을 탐색하는 가운데 문제의 핵심 구조 파악에 성공하였다. 곧 일반화된 식의 발견이 이 아동으로 하여금 더 심화된 탐구를 수행할 수 있게 하였다. 이와 같이 식은 다양한 구조를 탐색할 때뿐 아니라, 문제에서 바로 드러나 보이지 않는 그 핵심 구조를 파악하는 데도 도움이 된다. 위 문제를 예비교사들과 교사들에게 제시하였을 때, 몇몇은 n^2+2n을 구한 후 이 식을 문제의 핵심 구조를 파악하는 데 이용하였다. 예를 들어, n^2이 무엇을 나타내고 $2n$이 무엇을 나타내는지를 이동 과정과 관련하여 살펴보고 n^2은 돌을 건너뛴 횟수를 나타내고 $2n$은 돌을 옆 칸으로 민 횟수를 나타낸다는 것을 알아내었다.

패턴 일반화에서 일반식을 구하는 것을 목적으로 한다면, 탐구는 거기에서 끝나게 된다. 김민정, 이경화, 송상헌(2008)의 연구에 참여했던 세 아동은 일반식을 찾는 데서 탐구를 멈추었다. 이것은 이 아동들이 일반식을 찾아내는 데 목적을 두었음을 시사한다. 이와는 달리 다양한 구조를 파악하는 데 목적을 둔다면, 일반식의 발견은 탐구의 끝이 아니라 새로운 탐구를 촉진하고 쉽게 해주는 도구를 찾은 것으로 여겨지게 된다. 구조의 횡적 다양성의 관점에서 볼 때, 수치적인 규칙을 찾는 것을 넘어서서 시각적 조직화와 식의 분석을 오가며 다양한 구조를 발견하는 경험, 일반식의 발견을 새로운 탐구의 시작으로 여기는 태도를 강조할 필요가 있다.

Ⅲ. 구조의 종적 다양성

Krutetskii(1976)의 연구에서, 수학적으로 능력 있는 아동들은 실험자의 요구가 있을 때 다양한 풀이를 찾아낼 수 있었다. 그러나 그들은 다양한 풀이를 찾는 것 자체를 추구하지는 않았다. 수학적으로 능력 있는 아동들이 실험자의 요구가 없을 때에 스스로 다른 풀이를 찾으려고 시도하는 경우는 자신의 기존의 풀이가 만족스럽지 않아서 더 경제적이고 효율적인 또는 더 우아한 풀이를 찾으려고 할 때였다. 이것을 구조의 다양성에 관하여 바꾸어 말한다면, 단순히 횡적으로 다양한 구조를 찾는 것보다 종적으로 더 나은 구조를 찾으려는 성향, 곧 구조의 종적 다양성을 추구하는 성향을 수학적으로 능력 있는 아동들이 가지고 있다고 말할 수 있다.

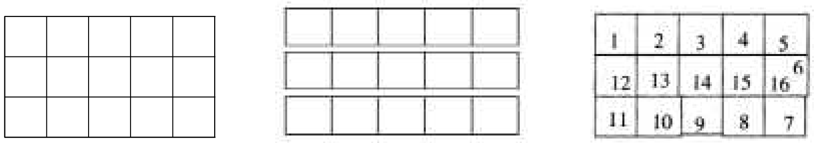
이 장에서는 구조의 종적 다양성의 관점에서, 동일한 대상에서 학생이 보는 구조와 교사가 보는 구조가 상이할 수 있음을 간단히 고찰하고, 구조의 종적 다양성이 아동으로 하여금 진보 또는 발전의 경험을 가능하게 하는 원천이 될 수 있음을 논의한다.

1. 구조의 종적 다양성과 학생과 교사의 구조

구조의 횡적 다양성의 측면에서도 학생과 교사의 구조는 차이가 있을 수 있다. 예를 들어, 앞에서 제시한 성냥개비 과제에서 학생이 1, 2개의 구조만 본다면 교사는 그보다 많은 5, 6개의 구조를 보고 있을 수 있다. 여기서 학생과 교사의 구조의 차이는 질보다는 양에 있다. 병렬적인 여러 구조들 중에서 얼마나 많은 구조를 보고 있는가의 차이이기 때문이다.

구조의 종적 다양성의 측면에서는 구조의 양적인 차이가 아니라 질적인 차이에 주목한다. 학생들은 종종 교사가 제공한 지각 자료에서 교사들이 의도하는 것과는 매우 다른 것을 본다. 교사는 특수 속에서 일반을 보지만 아동은 단순히 특수만을 보는 경향이 있다(Mason & Pimm, 1984). 마찬가지로 동일한 대상에서 학생과 교사가 보는 구조에는 수준의 차이가 있을 수 있다.

예를 들어, 직사각형 또는 직사각형 격자에서 어떤 아동들은 교사가 예상하지 못한 구조를 볼 수 있다(Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998; Battista, 2003; Schifter & Szymaszek, 2003). 교사들은 넓이를 구하는 맥락에서 [그림 11]과 같은 직사각형 격자가 주어지면 정사각형 5개로 된 3줄이라는 이차원 배열 구조를 본다. Battista와 그의 동료들(1998)은 초등학교 2학년 아동들을 인터뷰하여, 직사각형 격자에서 가장자리에서 시작하여 안쪽으로 돌아가는 일차원의 선 구조를 보는 아동들이 있음을 확인하였다([그림 11] (c)). 직사각형 격자에서 일차원의 선 구조를 보는 아동들은 정사각형 셀의 개수를 셀 때 어떤 셀을 중복해서 세는 오류를 범하기도 하였다.

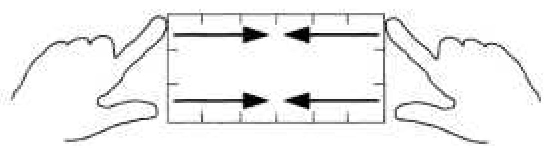


(a)직사각형 격자 (b)이차원 배열 구조 (c)일차원 선 구조

[그림 11] 직사각형 격자의 구조

일차원의 선 구조 이외에 아동들은 [그림 12], [그림 13]의 구조를 보기도 한다. Schifter & Szymaszek(2003)의 연구에서, 한 아동은 4×5 직사각형을 그리라고 하자 먼저 가로와 세로의 ㄱ자 틀을 그리고 나머지 부분을 채워 나갔다. [그림 13]은 아동이 직사각형 격자를 '위와 아래 줄'과 나머지 부분으로 보는 것을 나타낸다. 아동들이 보는 이들 구조들 사이에는 직사각형 격자를 '가장자리(의 일부)'와 나머지 부분으로 이루어진 구조로 파악한다는 공통점이 있다.

[그림 12] ㄱ자 구조 (Schifter & Szymaszek, 2003, p. 146)

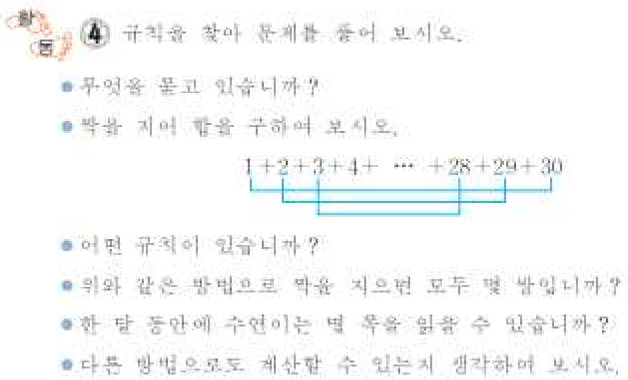


[그림 13] 상하 구조 (Battista et al., 1998, p. 511)

주체가 대상에 부여한 구조는 주체 자신에게는 마치 대상 자체가 원래부터 지니고 있던 것인 양 자연스럽게 느껴진다. 이 주관적 자연스러움은 주체로 하여금 자신이 대상에 부여한 구조가 마치 객관적으로 필연적인 것처럼 느끼게 만들 수 있다. 주체가 주관적 자연스러움을 객관적 필연성으로 여기게 되면, 그 대상이 자신뿐 아닌 누구에게나 그렇게 보일 것이며 다르게는 볼 수 없다고 생각하게 될 위험이 있다. 예를 들어, 교사가 직사각형의 넓이를 가르칠 때 아동들이, 교사가 보는 것과 마찬가지로, 당연히 직사각형 격자를 가로 줄이 차례로 줄줄이 배열된 이차원 구조로 볼 것이라고 생각할 수 있다. 교사는 아동이 교사가 보는 것과 질적으로 다른 구조를 동일한 대상에서 보고 있을 가능성에 유의하고, 아동이 보는 구조가 무엇인지 파악할 필요가 있다. 또 아동의 구조와 교사의 구조 사이의 종적 차이가 있을 경우, 아동의 구조와 교사의 구조를 발전적으로 연결하는 방안을 모색할 필요가 있다.

2. 진보의 경험의 원천으로서 구조의 종적 다양성

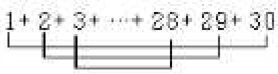
구조의 종적 다양성이 진보의 경험을 가능하게 하는 원천이 됨을 초등학교 수학 교과서에 나왔던 문제를 예로 하여 생각해 보자. 초등학교 수학 5-가 교과서의 마지막 단원인 문제 푸는 방법 찾기에는 첫째 날에는 1쪽, 둘째 날에는 2쪽, 셋째 날에는 3쪽, ... 이와 같은 식으로 책을 읽으면 한 달(30일) 동안에 몇 쪽을 읽을 수 있는지를 구하는 문제가 있다. 교과서에서는 다음과 같은 활동을 통해 이 문제를 풀도록 하였다.



[그림 14]1에서 30까지 자연수의 합(수학 5-가, p.133)

여기서  에 주목할 필요가 있다. 이와 같이 앞쪽의 수와 뒤쪽의 수를 차례로 짝지어서 합을 구하는 것은 가우스의 방법이라고 알려져 있다. 교과서에서 밑줄로 양쪽에 있는 수를 짝지어준 것은 학생들이 가우스의 방법을 쉽게 착안할 수 있도록 제시한 힌트로 보인다.

1에서 30까지 합을 구하는 문제를 다음과 같이 서로 다른 형태로 제시할 수 있다.

① 1+2+3+⋯+30 ② 1+2+3+⋯+28+29+30 ③ 

① 1+2+3+⋯+30은 30개의 자연수의 합을 1에서 시작하여, 2, 3, ... 차례로 하나씩 30까지 더하는 것으로 보는 구조를 나타낸다. ② 1+2+3+⋯+28+29+30에는 좌우대칭으로 앞에 세 개 뒤에 세 개씩 수가 제시되어 있다. ①에 비하여 ②는 1부터 차례대로 수를 하나씩 더하는 구조가 상대적으로 약하고, 학생들이 ②의 앞쪽의 수들과 뒤쪽의 수들을 번갈아 보다 보면 앞의 수와 뒤의 수를 결합하려는 생각이 ①을 볼 때보다 잘 날 수 있다. 그러므로 ①보다 ②가 상대적으로 가우스가 본 구조와 더 가깝다고 할 수 있다. ③은 직접적으로 앞쪽의 수와 뒤쪽의 수를 줄로 연결해 짝지어주고 있으며, 이와 같은 방법으로 다른 수들도 짝지어서 문제를 풀 것을 유도하고 있다.

① (또는 ②)와 같이 문제를 제시하면, 많은 아동들이 앞에서부터 하나씩 수를 더해 갈 것이다. 이렇게 수를 하나씩 더해 나가면서 아동은 목표를 향해 한발 한발 다가가고 있다는 성취감보다는 단순한 계산을 반복하는데서 오는 따분함, 어느 한 단계에서도 계산 실수를 하면 안 된다는 긴장, 실수할지도 모른다는 두려움 등 부정적인 정서를 느낄 수 있다. (②는 ①보다 가우스의 접근법을 떠올리는 데 도움이 될 듯하지만, 교과서 저자는 ②와 같이 제시하는 것만으로는 아동들이 가우스의 접근법을 생각해 내기 힘들 것으로 판단한 것으로 보인다. 그러지 않았다면, 토파즈 효과의 위험을 무릅쓰고 ③과 같이 제시하지 않았을 것이다.) 1부터 차례대로 1+2=3, 3+3=6, 6+4=10, ..., 55+11=66, 66+12=78, ..., 231+22=253과 같이 더해 가는 동안 아동에게 다음과 같은 생각이 들 수 있다. '이 문제를 이런 식으로 푸는 것은 좋은 방법이 아니다. 멈추고 더 경제적인 풀이 방법을 생각해 보아야겠다.' 계산의 따분함, 실수에 대한 두려움 등 부정적인 경험은 역설적으로 스스로 이와 같은 내면의 음성에 귀를 기울이고 가던 길을 멈추고 새로운 풀이 방법을 궁리해 보도록 이끄는 작용을 할 수 있다.

Wertheimer(1959)에 의하면, 생산적인 사고의 핵심은 주어진 상황 전체의 적절한 내적 구조를 파악하는 것이다. 자신이 파악한 기존의 구조가 좋지 않다고 느낄 때, 문제 해결자는 문제를 재구조화하여 좋은 구조를 보려고 한다. 문제를 해결한 것에 만족하지 않고 더 효율적이고 경제적인 풀이를 가능하게 해주는 구조로 문제를 파악하려는 것은 매우 중요한 수학적 성향이자 능력이다. 자신의 문제해결전략이 적절한지를 지속적으로 점검하면서 전략을 사용하고 새로운 전략을 탐색하는가 아닌가는 문제해결에 중요한 영향을 미친다(한상욱, 송상헌, 2011). 처음에 자신이 본 1부터 차례로 수를 더해 간다는 구조가 좋은 구조가 아닌 것 같다는 인식, 문제를 다시 살피면서 그 속에서 경제적이고 효율적인 더 좋은 구조를 보려고 노력하는 경험은 메타인지 능력의 신장에 도움이 될 것이다.

만일 아동이 이와 같은 자기 통제의 경험, 메타인지의 경험을 하지 못하고, 1부터 차례대로 30까지 더하여 답을 구했다고 하자. 이 아동은 문제해결 과정에서 '이 문제를 이런 식으로 푸는 것은 좋은 방법이 아니다. 다른 경제적인 풀이 방법을 생각해 봐야 한다.'는 생각이 나지 않았을 수도 있다. 또는 그와 같은 생각이 나기는 했지만, 그 반대편의 '그렇게 하면 지금까지 한 것이 헛수고가 된다. 계속 끝까지 더하자.'는 생각이 더 강했을 수도 있다. 교사는 아동이 뒤의 생각을 버리고 앞의 생각을 하고 따를 수 있도록 도와주어야 한다. 이를테면 다음과 같이 원래의 문제에서 숫자 하나를 바꾸어 주는 것도 고려할 수 있다: $1+2+3+\cdots+\overset{8}{\cancel{3}}0$. 문제에서 단지 숫자 하나가 바뀌었지만, 기존의 방법으로 이 문제를 풀려면 훨씬 많은 힘이 든다. 이러한 상황은 아동으로 하여금 1부터 차례대로 수가 더해져 가는 것 이상의 좋은 구조를 찾아보아야 한다는 마음을 갖게 할 수 있다. 아동이 문제 속에서 기존의 구조와 다른 더 좋은 구조를 찾으려는 마음을 갖게 되면, 처음에 막연

히 문제를 바라볼 때처럼 수동적인 마음으로 문제를 보지 않게 된다. 처음보다 좋은 구조를 찾으려는 마음의 자세를 가지고 문제를 분석하는 것, 처음에 본 것 이상의 무엇인가를 보려는 의도를 가지고 문제를 재차 탐구하는 경험 자체가 문제해결 교육에서 중요하다.

이 두 번째 탐구에서 어떤 구조를 보는가는 상당 부분 아동의 능력에 달려 있다. 철수가 어린 가우스와 같이 수학적으로 뛰어난 능력을 지닌 아동이라면, 가우스의 방법을 찾아낼 수 있을 것이다. 그만한 수학적인 능력이 없는 아동들은 가우스의 방법을 생각해내지 못할 것이나, 자신의 수학적 능력에 따라 다음 영희처럼 나름의 다른 구조를 찾아 문제를 해결할 수도 있을 것이다.

영희: (1+2+3+⋯+10)+(11+12+13+⋯+20)+(21+22+23+⋯+30). 이렇게 10개씩 묶어서 계산하면 처음보다 쉽고 빠르게 계산할 수 있다. 1+2+3+⋯+10=55이고, 11+12+13+⋯+20은 10×10+55=155이다. 마찬가지로 21+22+23+⋯+30=20×10+55=255이다.

이와 같이 처음보다 더 좋은 구조를 찾아 문제를 해결하였을 때, 영희는 (비록 가우스의 방법을 찾아내지는 못했지만) 자신이 진보했다고 느낄 것이다. 진보의 정서는 처음과 나중의 두 가지가 있어서 처음 것보다 나중 것이 더 나아졌을 때 느낄 수 있는 정서이다. 그러므로 처음에 아동이 본 앞에서부터 차례대로 수를 더해 가는 구조는 그 자체로는 좋은 구조가 아니었지만, 역설적으로 좋은 구조가 아니었기 때문에 이후의 진보의 경험의 기초로 기능한다. 아동이 문제 속에서 초기에 그다지 효율적이지 않은 구조를 파악하고, 메타인지적인 반성적 경험을 하고, 더 좋은 구조를 찾아내려고 시도하고, 그런 가운데 반성과 진보를 추구하는 자신의 능력에 자신감을 갖게 하는 것이, 가우스가 본 것과 같은 특정한 구조나 문제해결 방법을 알게 하는 것 이상으로, 문제해결 교육에서 중요하다. 이와 같은 경험 위에서, 영희에게 어린 가우스가 본 또 다른 구조를 제시해 주면, 영희는 자신이 처음 본 구조나 이후에 발견한 구조와 비교하면서 가우스의 방법에 내재된 구조가 지닌 더 좋은 점을 수용하면서 끊임없는 진보에 대해 열린 마음을 가질 수 있다.

어떤 아동은 문제에서 더 좋은 구조를 찾아내려 했지만 스스로 아무 것도 더 찾아내지 못할 수도 있다. 이것은 일차적으로 부정적인 경험이지만, 기존 구조의 한계를 절감하고 새로운 구조를 찾아보려는 시도 자체가 의의가 있다. 이와 같은 시도 자체가 이 아동이 영희가 본 구조의 좋음과 가우스가 본 구조의 더 좋음을 실감하게 하는 바탕이 될 수 있다. 무엇인가 더 좋은 것을 찾을 필요로 느끼고 그것을 찾으려고 해본 적이 없이는 다른 사람에 의해 더 좋은 것이 눈앞에 주어져도 그것이 더 좋은 것인지 느끼지 못한다. 실패는 그 자체로는 부정적인 것이지만, 좋은 것을 좋은 것으로 알아볼 수 있는 마음을 준비시켜 준다. 교사가 이 아동에게 처음부터 가우스 방법을 일러주었다면, 아동은 자신은 1부터 차례대로 더해 나가는 구조 이외에 다른 구조를 보지 못하는 낮은 수준에 있으면서도, 마치 자신이 가우스가 본 구조를 볼 수 있었던 것처럼 자신의 능력에 대해서 착각할 수 있다. 자신감은 착각이 아니라 자신의 현재 위치를 알고 거기서부터 진보하는 경험을 바탕으로 생기는 것이다. 자신의 접근법의 한계를 인식할 때의 자괴감, 새로운 방법을 모색할 때의 방향 상실감, 좋은 구조가 잘 보이지 않을 때의 좌절과 같은 부정적인 경험은 그것이 부정적인 것이기 때문에 역설적으로 진보의 경험의 출발점이 될 수 있다. 구조의 종적 다양성은 문제해결 과정에서 아동으로 하여금 진보의 경험을 하게 할 수 있는 바탕이 된다.

Ⅳ. 결 어

인식은 우리 앞에 주어진 대상을 있는 그대로 받아들이는 과정이라기보다, 주체가 주어진 대상의 요소들을 능동적으로 결합하여 하나의 구조를 구성하는 과정이다. 주체는 주어진 맥락 속에서 자신의 기존 경험과 현재 인지 구조를 바탕으로 대상을 구조로 해석하고 받아들이며, 이때 주체가 대상에 부여하는 구조는 횡적, 종적으로 다양할 수 있다.

이 글에서는 수학교육의 몇 가지 이슈를 구조의 횡적 다양성과 종적 다양성과 관련지어 살펴보았다. 구조의 횡적 다양성과 관련하여, 다양한 구조를 발견하게 하는 것은 두 가지 전략 사용 및 비교에 중점을 둔 초등 고학년 수학 문제해결 교육의 보완이 될 수 있다. 또 도형 패턴 일반화 과제에서 일반식의 발견은 탐구의 종착점이 아니라 새로운 구조 탐구의 시발점으로 여겨질 필요가 있다. 구조의 종적 다양성의 관점에서, 학생이 보는 구조와 교사가 보는 구조가 상이할 수 있으므로 교사는 아동이 보는 구조가 무엇인지에 유의할 필요가 있다. 구조의 종적 다양성은 아동으로 하여금 문제해결의 종합적 경험 속에서 진보 또는 발전의 경험을 가능하게 하는 원천이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2005). **수학 5-가**. 서울: 천재교육.

교육과학기술부 (2011). **수학 5-2**. 서울: 두산동아.

교육인적자원부 (2007). **교육인적자원부 고시 제2007-79호 초·중등학교 교육과정 [별책 8] 수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사.

김민정, 이경화, 송상헌 (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **학교수학, 10**(1), 23-42.

김선유 (1999). 구성주의 관점에 의한 수학 교수-학습 모델의 설정과 수업 전개. **한국초등수학교육학회지**, 3, 75-92.

남승인 (1997). 문제해결력 신장을 위한 전략 지도 방안. **한국초등수학교육학회지**, 1, 67-86.

남진영 (2007). **수학적 지식의 구성에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원 (2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구**, **17**(2), 163-177.

임재훈 (2009). 수학적 패턴 일반화 전략으로서 귀납의 한계. **경인교육대학교 교육논총**, 29, 221-239.

장상호 (1997). **학문과 교육(상)**. 서울대학교 출판부.

한상욱, 송상헌 (2011). 초등 수학 영재들이 수학 문제 해결 과정에서 보이는 메타인지 사례 연구. **한국초등수학교육학회지**, **15**(2), 67-86.

Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volumn measurement. In D. Clements and G. Bright (Eds.) *Learning and Teaching Measurement: 2003 NCTM Yearbook* (pp. 123-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 503-532

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers grades 6-10*. NH: Heinemann.

Hershkowits, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning – the case of the matches, *International journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(2), 255-265.

Kant, I. (1781). Kritik der reinen Vernunft. 백종현 역 (2006). **순수이성비판**. 서울: 아카넷.

Krutetskii V. A.. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (Kilpatrick J., Wirszup I., Trans.). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular.

Educational Studies in Mathematics, *15*, 277-289.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Schifter, D. & Szymaszek, J. (2003). Structuring a rectangle: teachers write to learn about their students' thinking. In D. Clements and G. Bright (Eds.) *Learning and Teaching Measurement: 2003 NCTM Yearbook* (pp. 143-156). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steelee, D. F. & Johanning, D. I. (2004). A schematics-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *57*, 65-90.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washington, DC: The Falmer Press.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. NY: Harper & Row.

<Abstract>

Object and Structure in Elementary School Mathematics: Horizontal and Vertical Diversity of Structure

Jaehoon Yim[2]

Cognitive subject imposes structures on an object to shape it into a structured thing. Structures that the subject imposes on an object in a given problem context can be diverse horizontally and vertically. In view of the horizontal diversity of structure, problem-solving activities focusing on various structures may enrich the present problem-solving education which emphasizes applying and comparing a couple of problem-solving strategies. Finding an algebraic formula for a figural pattern should be regarded as a new starting point of searching for more various structures. In view of the vertical diversity of structure, it should be aware that students may see different structures from the structure that their teacher expect them to see. The vertical diversity of structure enables us to provide students with experience of progress.

Kew words: object, structure, the horizontal diversity of structure, the vertical diversity of structure, problem solving, pattern generalization

논문접수: 2012. 08. 29
논문심사: 2012. 09. 21
게재확정: 2012. 12. 03

2) jhyim@ginue.ac.kr