한국소음진동공학회논문집 제 22 권 제 3 호, pp. 253~263, 2012.

http://dx.doi.org/10.5050/KSNVE.2012.22.3.253

간격이 있는 탄성 보 위를 고속 주행하는 바퀴의 Hertz 접촉을 고려한 동역학적 해석

Dynamic Analysis of a High-speed Wheel Moving on an Elastic Beam Having Gap with the Consideration of Hertz Contact

이 기 수† · 김 석 승*

Kisu Lee and Seok Seung Kim

(2011년 12월 13일 접수 ; 2012년 2월 2일 심사완료)

Key Words : Contact(접촉), 간격(Gap), Elastic Beam(탄성 보), Numerical Analysis(수치해석), Multibody Dynamics(다물체 동역학)

ABSTRACT

With the local Hertz deformation on the contact point, the dynamic contact between a high-speed wheel and an elastic beam having a gap is numerically analyzed by solving the whole equations of motion of the wheel and the beam subjected to the contact condition. For the stability of the time integration the velocity and acceleration constraints as well as the displacement constraint are imposed on the contact point. Especially the acceleration contact condition on the gap is formulated, and it is demonstrated that the contact force variation computed by the velocity contact constraint or by the acceleration contact constraint agrees well with that computed by the displacement contact constraint. The numerical examples show that, when the wheel passes on the gap, the solution is governed by the stiffness of the local Hertzian deformation.

1. 서 론

기차 레일에는 일반적으로 레일과 레일 사이에 간격이 존재하며, 이러한 레일 사이의 간격은 기차가 고속 주행하는 경우 심한 진동 및 응력을 발생시키고 구조물 피로 손상의 원인이 된다. 현재까지 다물체 동역학에서 기차 바퀴와 레일을 강체 바퀴와 탄성 보로 모델링하여 많은 연구가 이루어졌지만[1~6] 대부분 레일 사이의 간격을 고려하지 않고 바퀴가 연속적인 보 위에서 주행하는 경우를 다루었다. 더구나 실제로는 바퀴와 레일 사이의 접촉력은 바퀴가 레일 사이의 간격을 통과할 때에 크게 발생하므로 이에 대한 추가 연구가 필요하다.

다물체 동역학은 복잡한 기계 및 자동차, 기차 등에 광범위하게 응용되고 있으며 이를 위하여 많은 연구가 이루어지고 있다. 다물체 동역학은 기본적으로 독립된 물체의 운동방정식(미분 방정식)과 물체 사이의 구속조건(대수방정식)을 연립하여 시간적분에 의하여 해를 구하는 것이며, 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 수치적분의 안정성을 도모하고 있다. 현재까지 이루어진 연구에 의하여 일반적인 구속조건이 부과되는 경우 상용 프로그램에 의해서도 대단히 정확한 계산이 가능하며 차량동역학 등에 광범위하게 응용되고 있

† 교신저자; 정회원, 전북대학교 기계공학과
E-mail : kisulee@chonbuk.ac.kr
Tel : (063)270-2326, Fax : (063)270-2315
* 전북대학교 대학원 기계공학과

다. 그러나 두 물체 사이의 동적인 접촉조건이 운동방정식에 부과되는 경우 그 해법은 아직도 연구 대상이 되고 있으며 특히 접촉점에서 도입된 국부적 스프링-댐퍼 강성도가 대단히 커지면 운동방정식 시간적분의 안정성이 상실되므로 이에 대한 연구는 현재 중요한 과제이다[7~10]. 그런데 기차 바퀴가 간격이 있는 선로 위를 고속 주행하는 경우에는 본 논문에서 설명된 것처럼 바퀴와 레일 사이 접촉점에서 불가피하게 국부적인 미세한 Hertz 변형을 고려하여야 하며(즉 접촉점 스프링 강성도가 커지며) 따라서 이의 정확한 해를 위하여는 추가 연구가 필요하다.

저자는 기존 연구에서 강체 바퀴가 탄성 보 위를 고속 주행하는 경우에 속도 및 가속도 접촉조건을 고려하여야 하며 접촉점의 미끄러짐을 고려한 코리올리스(Coriolis) 가속도 및 구심 가속도를 가속도 접촉조건에 포함시켜야 정확한 시간적분 수치해가 가능함을 설명하였다[11]. 또한 접촉점의 국부적 Hertz 변형을 스프링-댐퍼를 이용하여 나타내는 경우, 스프링-댐퍼의 변형으로 인한 속도 및 가속도 접촉조건을 추가로 고려하면 스프링-댐퍼의 강성도가 대단히 큰 경우에도 운동방정식의 안정적 수치적분이 가능함을 입증하였다[12,13]. 그리고 접촉조건과 일반적인 기구학적 구속조건이 동시에 부과된 다물체 동역학 모델의 경우 및 마찰력을 고려하는 경우에도 동일한 수치해석적 해법이 가능함을 설명하였다[14,15]. 한편 보 윗면 간격을 포함한 기존 연구[15]에서는 접촉력은 항상 보 표면에 수직이라고 간주할 수 있는 짧은 간격의 경우만 고려하였으며 Hertz 변형을 고려하지 않았다.

이 논문에서는 강체 바퀴가 탄성 보 위를 고속 주행하는 동역학적 현상에 대한 위와 같은 저자의 기존 연구를 연장하여, 보 윗면에 존재하는 간격의 크기를 정확히 고려하여 바퀴와 보 사이의 접촉조건을 정확히 부과하고 운동방정식과 연립시켜 동역학적 해석을 하고자 한다. 그런데 아래의 이 논문 결과에서 보인 바와 같이 보가 고속으로 간격을 통과하는 경우에는 충격적인 접촉력이 발생하며 따라서 접촉점의 국부적 Hertz 변형으로 인한 스프링 효과가 필수적으로 고려되어야 한다. 따라서 이 논문에서는 저자의 기존 연구[11]에 보 간격 및 접촉점의 스프링을 추가하여 동역학적 해석을 수행하고자 한다. 이 논문에서는 기존 연구[11~15]와 중복되는 부분은 최소한으로 줄이고, 보 간격 및 접촉점의 스프링 존재로 인하여 추기되는 사항만 집중 설명한다.

2. 운동방정식, 구속조건 및 해법

이 논문에서는 강체 바퀴와 탄성 보 사이의 해석을 위하여 2차원 모델을 생각한다. 특히 계산 결과를 신뢰성 있는 기존 연구 결과와 비교하여 타당성을 점검하고 모델의 복잡성을 피하기 위하여, 보의 윗면에 작은 간격이 존재하며 보의 운동방정식 자체는 간격의 존재로 인하여 변하지 않는다고 가정한다. 이 논문에서는 마찰력은 무시하며, Fig. 1에서 보인 바와 같이 접촉력 p는 보와 바퀴 표면에 수직 방향으로 작용한다. 이 논문에서 바퀴와 보의 모든 운동방정식은 x, y절대좌표계를 이용하여 만들어지고, 모든 접촉조건은 접촉면에 수직 (법선)인 n방향에 대해서 계산한다. 한편 각도 θ는 바퀴의 접선방향과 x축이 이루는 각도를 의미한다.

이 논문에서는 Fig. 2와 같이 보 위에 간격이 존재하는 경우를 고려하며, 편의상 간격의 모서리 각도는 직각이라고 가정한다. 이 경우 바퀴가 보 윗면 간격을 통과하는 경우 바퀴는 보 윗면 간격의 왼쪽 또는 오른쪽 코너와 접촉하게 된다. 이 논문에서 마찰력은 고려하지 않으므로 예로써 바퀴가 보 간격의 왼쪽 코너와 접촉하는 경우 접촉력은 Fig. 2와 같은 방향으로 발생하게 된다. 바퀴가 보 간격의 오른쪽 코너와 접촉하는 경우에도 동일한 방법이 적용된다.

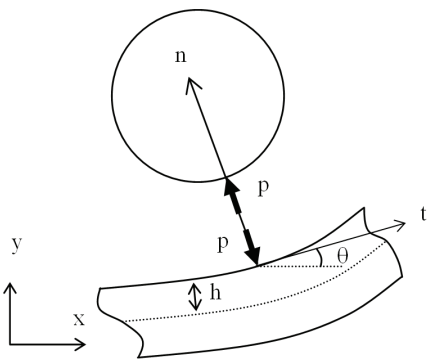

Fig. 1 Contact model for a rigid wheel and an elastic beam

Fig. 2에서 접촉력 방향을 나타내는 각도를 γ라고 하면 접촉점에서 바퀴의 접선 방향을 나타내는 각도 θ는 다음과 같다.

$$\theta = \gamma - \pi/2 \tag{1}$$

식 (1)에서 계산된 각도 θ는 Fig. 1의 접선방향 각도 θ와 마찬가지로 아래의 접촉조건을 나타내는 식들에서 사용된다.

강체 바퀴의 2차원 운동방정식 및 탄성보의 운동방정식은 뉴톤 제2법칙 및 유한요소법에 의하여 간단히 유도되며, 2차원 x, y좌표계에서 다음 형식을 취한다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}^w\ddot{\mathbf{u}}^w = \mathbf{f}^w + p\mathbf{N}^w \\ &\mathbf{M}^b\ddot{\mathbf{u}}^b + \mathbf{K}^b\mathbf{u}^b = \mathbf{f}^b - p\mathbf{N}^b \end{aligned} \tag{2}$$

위에서 상첨자 w와 b는 각각 바퀴와 보를 표시하고, M은 질량 행렬, K는 보의 강성도 행렬, u는 바퀴 중심 또는 보 절점 변위, p는 Fig. 1 및 Fig. 2의 접촉력, N은 접촉력을 바퀴의 운동방정식 좌표성분 또는 보의 유한요소 절점 성분으로 변환하는 열 벡터, f는 중력 등 외력을 나타낸다. 위의 운동방정식에서 접촉력 p이외의 모든 힘은 해 이전에 주어진 힘이다. 따라서 바퀴와 보 사이의 접촉력 p가 주어진다면 바퀴와 보의 운동방정식 (2)는 간단한 상미분 방정식의 시간적분법에 의하여 그 해가 구해진다.

바퀴와 보 사이의 Hertz 접촉으로 인한 식은 바퀴와 보의 기하학적 모양, 재질, 두께 등에 의하여 탄성학 기본식(예로써 참고문헌 (16))에 의하여 유도

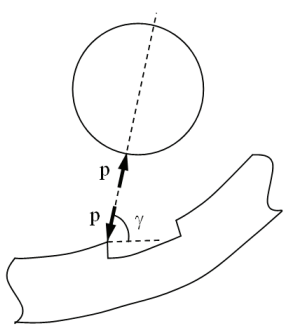

Fig. 2 Contact force and normal direction on the corner point of the gap

가능하며, 간격 모서리와 접촉하는 경우에도 간격 부위의 자세한 설계 자료가 있으면 정확한 Hertz 변형에 관한 식을 쓸 수 있다. 그런데 대부분의 경우 바퀴와 보 사이의 접촉점에서 국부적인 Hertz 변형으로 인한 침입 거리 δ와 접촉력 p사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p = k\delta^n \tag{3}$$

위 식의 k는 편의상 스프링 상수라고 부르기로 한다.

이 논문에서는 바퀴의 중심에서 원칙적으로 탄성변형이 된 보에 Fig. 1처럼 수직선을 그어서 접촉점 위치 및 접촉력 방향을 결정한다. 추가로 만약 바퀴가 Fig. 2처럼 간격을 통과하는 경우에는 Fig. 2처럼 바퀴 중심과 간격 모서리를 연결하는 선에 의하여 접촉력의 방향을 계산하며, 편의상 바퀴는 보와 1점에서만 접촉한다고 가정한다. 이 경우 바퀴와 보 사이에서의 접촉력을 p, 그 사이 접촉점 사이의 수직간격(Fig. 1및 Fig. 2의 접촉력 방향으로의 접촉점 사이 거리)을 s, 접촉점의 Hertz 변형으로 인한 침입 거리를 δ라고 할 때에 시간 $t+\Delta t$에서의 변위 접촉조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &p^{t+\Delta t} \geq 0 \\ &s^{t+\Delta t} + \delta^{t+\Delta t} \geq 0 \\ &p^{t+\Delta t} = 0 \ \text{ if } \ s^{t+\Delta t} + \delta^{t+\Delta t} > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

그런데 바퀴 및 보의 운동방정식은 미분방정식이지만 접촉조건은 대수 부등식으로 이루어지므로, 다물체 동역학에서 잘 알려진 바와 같이, 시간적분의 수치 안정성을 위하여 접촉점에서 접촉점의 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 추가로 부과하여야 한다. 이러한 접촉점에서의 속도 및 가속도 구속조건은 저자의 기존 연구 결과[12,13]를 요약하여 부록에 약술되어 있으며, 아래에서 이에 필요한 접촉점 사이의 상대 속도와 상대 가속도만 간단히 설명한다. Fig. 1과 2에서처럼 바퀴의 접선 방향을 θ라고 하고(Fig. 1의 경우 θ는 보의 접촉점에서의 기울기와 일치함), 바퀴의 접촉점 속도를 v_w, 보 접촉점의 속도를 v_b라고 하면 접촉점에서 바퀴와 보 사이의 상대 속도(즉 접촉력 방향 상대속도)는 다음과 같다.

$$\dot{s} = -(v_{wy} - v_{by})\cos\theta + (v_{wx} - v_{bx})\sin\theta \tag{5}$$

또한 접촉점에서 바퀴의 접촉점 가속도를 a_w, 보 접촉점의 가속도를 a_b, Fig. 1에 보인 것처럼 보의 중심선에서 보의 상단까지의 거리를 h라고 하면, Fig. 1과 같은 접촉의 경우, 접촉점에서 바퀴와 보 사이의 상대 가속도(변형된 보에서의 법선 방향 상대 가속도)는 다음과 같다.

$$\ddot{s} = -(a_{wy} - a_{by})\cos\theta + (a_{wx} - a_{bx})\sin\theta - \dot{\beta}^2/r_w - h\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2/r_b + 2\dot{\alpha}\dot{\theta} \tag{6}$$

위에서 r_w는 바퀴 반경, r_b는 접촉점에서 보 윗면의 곡률반경, $\dot{\alpha}$와 $\dot{\beta}$는 접촉점이 바퀴 및 보에서 미끄러지는 속도로서 참고문헌 (11)에서 설명된 수식에 의하여 계산이 가능하다. 특히 식 (6)에서 오른쪽 3번째 항 이후는 접촉점의 코리올리스 가속도 및 구심 가속도이다.

한편 바퀴가 보의 윗면에 있는 간격을 통과하는 경우 Fig. 2에서 보인 바와 같이 바퀴는 간격의 코너 점과 접촉하게 되며, 이 경우 바퀴와 보 사이의 접촉점 상대 가속도(접촉력 방향의 상대 가속도)는 다음과 같이 계산된다.

$$\ddot{s} = -(a_{wy} - a_{by})\cos\theta + (a_{wx} - a_{bx})\sin\theta - \left(v_{by}\sin\theta + v_{wx}\cos\theta - v_{by}\sin\theta - h\dot{\varphi}\right)^2 / r_w - h\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$

위에서 $\dot{\phi}$는 접촉점이 있는 보 단면의 회전 각속도이다($\dot{\phi}$는 Euler 보를 사용한 유한요소의 경우 형상함수 행벡터와 절점 속도 열벡터의 곱에 의하여 간단히 계산됨).

한편 속도 및 가속도 접촉오차에 포함된 $\dot{\delta}^{t+\Delta t}$ 및 $\ddot{\delta}^{t+\Delta t}$은, 식 (3)에 의하여 $\delta^{t+\Delta t}$가 계산된 후, 다음의 Newmark 시간적분법을 사용하여 계산한다.

$$\ddot{\delta}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_1 \Delta t^2}\left(\delta^{t+\Delta t} - \delta^t\right) - \frac{1}{\beta_1 \Delta t}\dot{\delta}^t - \left(\frac{1}{2\beta_1} - 1\right)\ddot{\delta}^t \tag{8}$$

$$\dot{\delta}^{t+\Delta t} = \dot{\delta}^t + \Delta t\left(1 - \beta_2\right)\ddot{\delta}^t + \beta_2 \Delta t\, \ddot{\delta}^{t+\Delta t} \tag{9}$$

위에서 β_1 and β_2는 Newmark 시간적분을 위한 상수이며, 이 논문에서는 시간적분 안정성을 위하여 β_1은 0.25, β_2는 0.5로 하여 계산한다.

바퀴와 보가 접촉하는 경우(즉 접촉력이 0이 아닌 경우) 바퀴와 보의 점촉점에서 변위, 속도, 가속도 구속조건이 만족되려면 $s+\delta$, $\dot{s}+\dot{\delta}$, $\ddot{s}+\ddot{\delta}$가 각각 0이 되어야 한다. 이 논문에서는 저자의 기존 논문[12,13]에서와 마찬가지로 이상의 3가지 구속 조건이 부과된 운동방정식의 해를 구하기 위하여, 부록에서 요약된 바와 같이 변위 오차, 속도 오차, 가속도 오차를 사용하여 이들을 각각 반복계산법을 사용하여 0으로 수렴시키는 방법을 사용하며, 시간 t+Δt에서의 기본적인 계산 과정을 다음에 요약한다 (아래에서 m은 반복횟수임):

Step 1.1 처음에 m=0으로 하고, 시간 t에서의 해를 $p^{t+\Delta t,0}$으로 하여 step 1,4로 간다.

Step 1.2 m을 m+1로 하고, $\alpha = 1/(\partial(s+\delta)/\partial p)^{t+\Delta t}$로 한다.

Step 1.3 반복계산법 (A.3)에 의하여 $p^{t+\Delta t,m}$를 계산한다.

Step 1.4 Fig. 1과 Fig. 2처럼 바퀴 중심에서 변형된 보에 수직선을 긋고 또한 보 윗면의 간격 코너점을 이용하여 보 위의 접촉점 위치를 결정한다. 접촉력 $p^{t+\Delta t,m}$를 바퀴와 보의 양쪽 접촉점에 가하고, 바퀴 및 보의 운동방정식 (2)의 해를 상미분 방정식 수치 적분에 의하여 구한다(예로써 Runge Kutta method 등 사용). 이렇게 구한 바퀴 및 보 운동방정식 해로부터 식 (A.1)에 의하여 변위 접촉 오차 $e^{t+\Delta t,m}$를 계산한다. 만약 $\left|e^{t+\Delta t,m}\right|$이 허용 오차보다 작으면 시간 t+Δt에서 운동방정식 (2)의 변위 $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$는 여기에서 결정된다. 또한 시간 t에서 접촉이 이루어지지 않은 경우(즉 $p^t = 0$), 시간 t+Δt에서의 침입 거리 $\delta^{t+\Delta t}$ 역시 여기에서 결정된다. 만약 $\left|e^{t+\Delta t,m}\right|$이 허용 오차보다 크면, $\left|e^{t+\Delta t,m}\right| < \left|e^{t+\Delta t,m-1}\right|$ 또는 m=0이면 to step 1.2로 가고, 그 외의 경우 α =α/2로 하여 step 1.3으로 다시 가서 m번째 반복계산을 다시 수행한다.

Step 2. 속도 접촉조건 (A.5)를 운동방정식에 적

용시키기 위하여, 변위접촉 오차 대신 속도 접촉 오차 (A.4)를 사용하여, 위의 steps 1.1~1.4 과정에 준하여 반복계산법 (A.6)을 사용한 계산을 수행한다. 시간 $t+\Delta t$에서의 속도 $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$와 침입 속도 $\dot{\delta}^{t+\Delta t}$는 여기에서 결정된다.

Step 3. 가속도 접촉조건 (A.8)을 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위접촉 오차 대신 가속도 접촉 오차 (A.7)을 사용하여, 위의 steps 1.1~1.4과정에 준하여 반복계산법 (A.9)을 사용한 계산을 수행한다. 시간 $t+\Delta t$에서의 가속도 $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$와 침입 가속도 $\ddot{\delta}^{t+\Delta t}$는 여기에서 결정된다. 가속도 조건을 사용한 계산이 시간적분 오차를 포함하지 않아서 제일 정확하므로, 시간 t에서 접촉이 이루어진 경우 (즉 $p^t > 0$),시간 $t+\Delta t$에서의 침입 거리 $\delta^{t+\Delta t}$ 역시 여기에서 결정된다. 계속 다음 시간의 해석이 필요한 경우 시간을 Δt만큼 증가시켜 step 1.1로 가서 다음 시간의 계산을 시작한다.

3. 예제 계산

여기에서는 Fig. 3과 같이 보의 중간 지점 윗면에 간격이 존재하는 경우에 바퀴가 왼쪽 끝에서 출발하여 고속 주행하는 문제를 풀려고 한다. 특히 해의 타당성 및 정확도를 점검하기 위하여 Vu Quoc과 Olsson[17,18]이 사용한 것과 동일한 보를 사용하며, 보의 윗면에 작은 간격이 존재하지만 보의 운동방정식 자체는 작은 간격의 존재로 인하여 변하지 않는다고 가정한다. 물론 Vu Quoc과 Olsson[17,18]은 윗면에 간격이 없는 완전한 보를 사용하고 접촉점에서의 Hertz 변형을 고려하지 않았지만, 이 논문과 같이 Hertz 변형을 도입한 경우의 수치 해와 그 결과 및 경향을 비교해 볼 수 있다. 참고로 Vu Quoc과 Olsson[17,18]은 바퀴가 탄성 보 위에서 주행하는 예제를 풀기 위하여 보의 운동방정식과 바퀴의 운동방정식을 직접 연립시킨(즉 접촉조건을 소거시킨) 복잡한 미분대수 방정식의 수치해를 구하였다. 예제로 사용하는 보의 전체 길이는 24 m, 보의 중심선과 윗면 사이의 거리 h는 0.6 m, 단위 길이당 질량은 1250 kg/m, 그리고 굽힘 강성도 EI는 10^9 Nm^{2}이다. 바퀴의 질량은 3000 kg이고 반경은 0.3 m이다. 바퀴 중심에는 수직 하향 방향 하중 600 kN이 작용하고 있다.

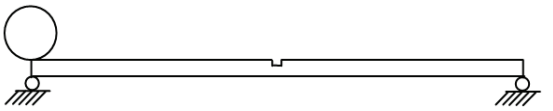

Fig. 3 The model for the computation

이 논문에서 보는 Hermitian interpolation을 이용한 10개의 Bernoulli-Euler보 요소를 사용하고, 보 윗면에 있는 작은 간격의 존재로 인하여 보 운동방정식 자체는 영향을 받지 않는다고 가정하며, 시간적분은 Δt=0.005 msec인 4차 Runge Kutta method를 사용한다. 바퀴와 보 사이의 국부적 Hertz 접촉으로 인하여 유도되는 식 (3)에서 스프링 상수 k와 지수 n은 바퀴와 보의 재질, 두께 등에 의하여 탄성학 기본식에 의하여 유도되며, 특히 간격 코너와 접촉하는 경우 역시 간격 부위의 자세한 설계 자료에 의하여 Hertz 변형에 관한 식을 쓸 수 있다(예를 들어 반경 0.3 m인 강철 구가 강철 평면과 접촉하는 경우 탄성학 이론[16]에 의하여 식 (3)의 k는 8×10^{10} N/m$^{3/2}$, n은 3/2이 되며, 횡방향으로 음의 반경을 가진 실린더 형태의 바퀴가 평평한 보와 접촉하는 경우 k는 이보다 훨씬 커지게 된다). 이 논문의 목적이 바퀴와 보 사이의 접촉점에서 Hertz 접촉 변위의 동역학적 영향을 검토하는 것이므로, 다음에서는 식 (3)의 지수 n은 3/2로 하고 스프링 상수 k 및 바퀴 초기속도를 변경시켜가며 그 결과를 검토하기로 한다. 그리고 아래에서 계산 결과를 나타내는 그림에서 접촉력은 정역학 상태의 접촉력(즉 바퀴에 작용하는 수직방향 힘 600 kN과 바퀴 중력)으로 나눈 값(normalized contact force)으로 표준화시켜 표시한다.

먼저 Hertz 변형을 고려한 이 계산방법의 타당성을 점검하기 위하여, 보 윗면에 간격이 없는 완전한 보라고 가정하여, 식 (3)의 스프링 상수 k를 변경시켜가며 해를 구하였다. 예로써 바퀴의 초기 속도가 100 m/s인 경우에 k가 10^{12} N/m$^{3/2}$ N/m 경우와 10^{13} N/m$^{3/2}$인 경우의 해가 각각 Fig. 4와 Fig. 5에 나타나 있으며, Figs. 4, 5해는 Vu Quoc과 Olsson[17,18]의 해와 일치한다. 이것은 접촉점의 최대 스프링 변형이 k가 10^{13} N/m$^{3/2}$경우와 10^{12} N/m$^{3/2}$인 경우에 각각 0.0227 mm와 0.106 mm로서, 최대 19.1 cm에 달하는 접촉점에서의 보 처짐에 비하여 무시될 수 있는 수준이기 때문이며 이 계산의 타당성이 인정

된다고 볼 수 있다(즉 접촉점에서 국부적인 Hertz 변형이 매우 작아서, Hertz 변형은 전체적인 해에 영향을 주지 못함).

다음으로 보의 왼쪽 끝에서 12 m되는 지점의 윗면에 길이 2 cm의 간격이 존재하는 보 위에서 바퀴가 이동하는 경우를 고려한다. 바퀴의 초기 속도가 100 m/s인 경우에 k가 10^{13} N/m$^{3/2}$경우와 k가 10^{12} N/m$^{3/2}$인 경우의 해가 각각 Fig. 6과 Fig. 7에 나타나 있다. k가 10^{13} N/m$^{3/2}$인 경우 보 윗면의 간격을 바퀴가 통과하면서 심한 진동이 발생하지만, k가 10^{12} N/m$^{3/2}$인 경우에는 그 진폭이 크게 줄어들며 전체적으로 참고문헌[17,18]과 유사한 해가 얻어진다. 바퀴가 보 간격과 초기 충돌한 이후의 접촉력 변화가 Fig. 8에 자세히 나타나 있으며 변위, 속도, 가속도 접촉 조건 모두 동일한 해가 얻어진다. 그런데 만약 바퀴가 간격을 통과하는 경우의 가속도 접촉조건 (7)에서 구심 가속도를 제외한다면 그 해는 Fig. 9처럼 되며, 따라서 바퀴가 간격 코너와 충돌하는 경우의 식 (7)에서 접촉점의 구심 가속도가 접촉조건에서 필수적임을 알 수 있다.

또 바퀴의 초기 속도가 50 m/s인 경우에 k가 10^{13} N/m$^{3/2}$경우와 k가 10^{12} N/m$^{3/2}$인 경우의 해가 각각 Figs. 10~12에 나타나 있다. k가 10^{13} N/m$^{3/2}$인 경우 보 윗면의 간격을 바퀴가 통과하면서 심한 진동이 발생하지만, k가 10^{12} N/m$^{3/2}$인 경우에는 그 진폭이 크게 줄어들고 있다. 바퀴가 보 간격과 초기 충돌한 이후의 자세한 접촉력 변화가 Fig. 11에 자세히 나타나 있으며 변위, 속도, 가속도 접촉 조건

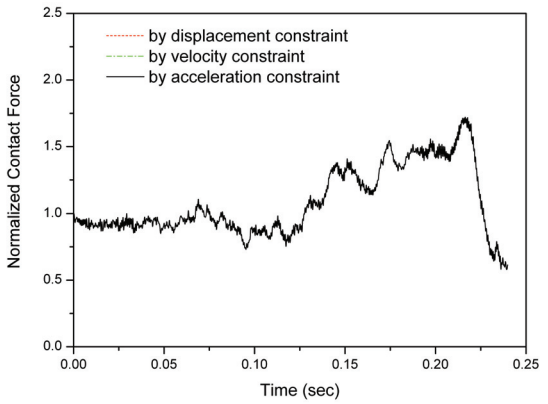

Fig. 4 Contact force computed without gap(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

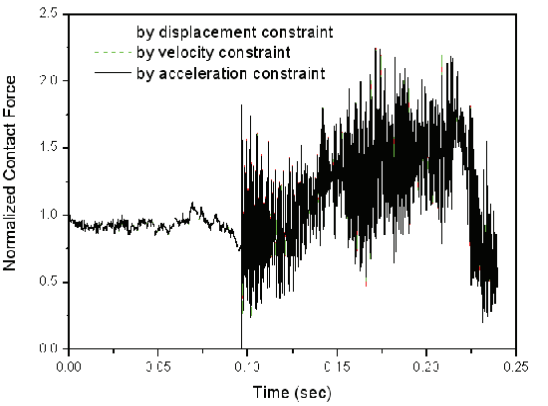

Fig. 6 Contact force computed with gap(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

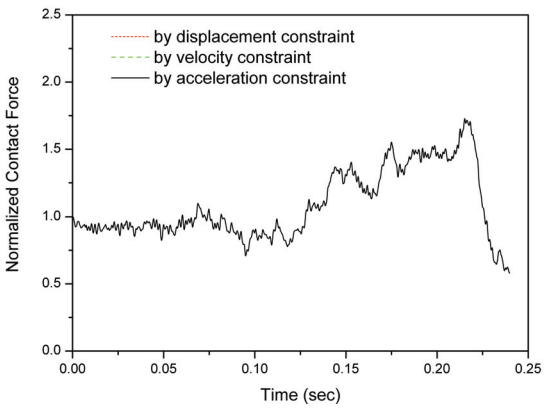

Fig. 5 Contact force computed without gap(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{12} N/m$^{3/2}$)

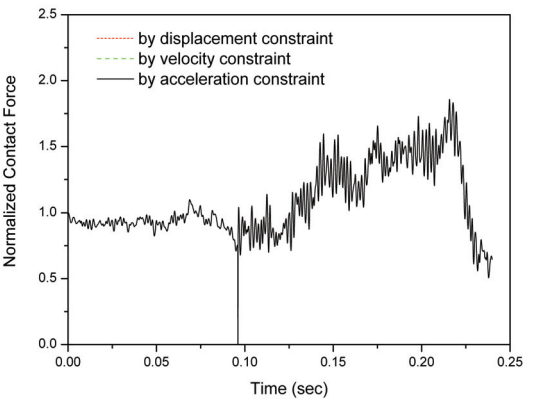

Fig. 7 Contact force computed with gap(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{12} N/m$^{3/2}$)

모두 동일한 해가 얻어진다. Figs. 10~12결과는 초기 주행속도가 100 m/s인 Figs. 6~9보다 높은 접촉력을 보이고 있는데, 이것은 바퀴가 긴 간격을 통과하는 시간이 길어져 바퀴가 보 윗면의 간격을 통과하면서 바퀴가 더 밑으로 내려가게 되어 간격 오른쪽 모서리와 다시 충돌하는 경우에 접촉력이 커지기 때문으로 보인다. 추가적인 예로써 Figs. 7 및 12와 동일한 조건에서 바퀴 초기 속도를 25 m/s로 낮추면 바퀴에 작용하는 접촉력은 Fig. 13 처럼 증가한다(이 예제의 경우 하나의 연속된 보 위에 간격이 존재하지만, 분리된 보가 불완전하게 연결된 기차 레일의 경우는 앞 레일 탄성변형으로 간격 통과시 앞/뒤 레일 높이가 다르므로 속도가 크면 충격

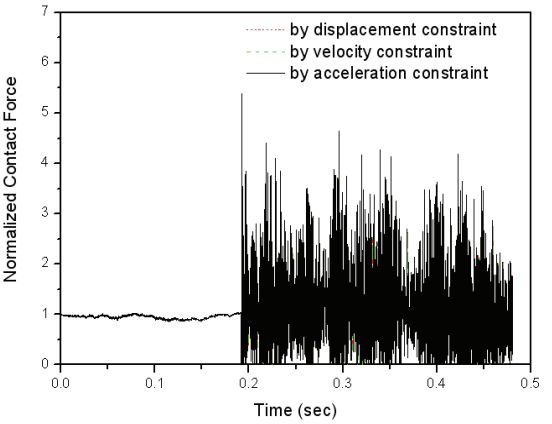

Fig. 10 Contact force computed with gap(initial wheel speed : 50 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

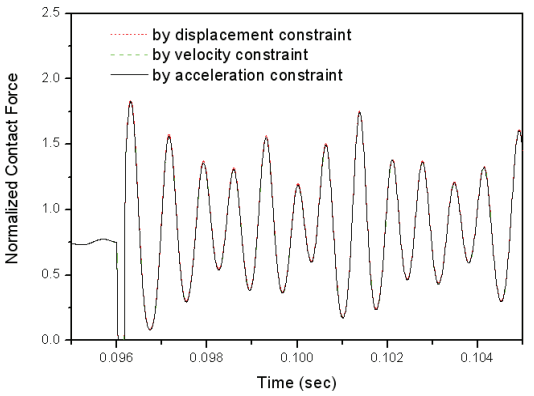

Fig. 8 Detail of the contact force of Fig. 6 after impact on the gap(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

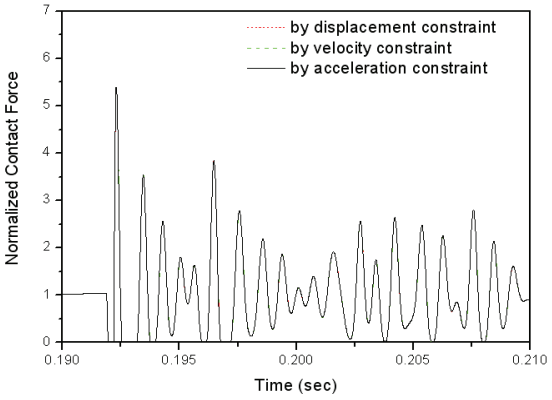

Fig. 11 Detail of the contact force of Fig. 10 after impact on the gap(initial wheel speed : 50 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

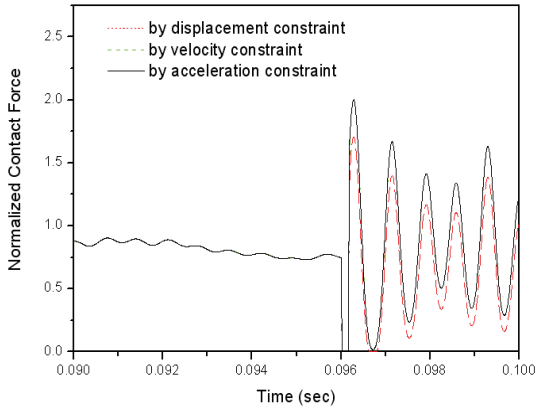

Fig. 9 Contact force computed without considering centripetal acceleration in Eq. (7)(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

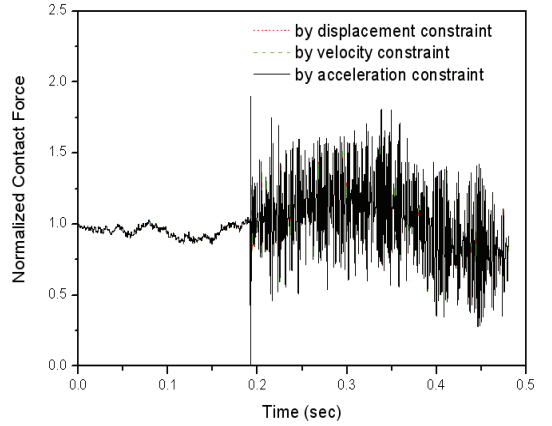

Fig. 12 Contact force computed with gap(initial wheel speed : 50 m/s, k=10^{12} N/m$^{3/2}$)

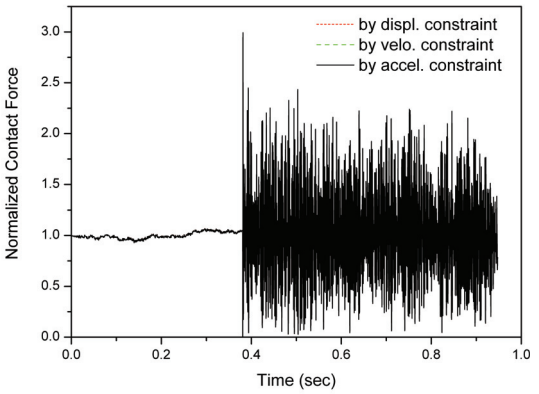

Fig. 13 Contact force computed with gap(initial wheel speed : 25 m/s, k=10^{12} N/m$^{3/2}$)

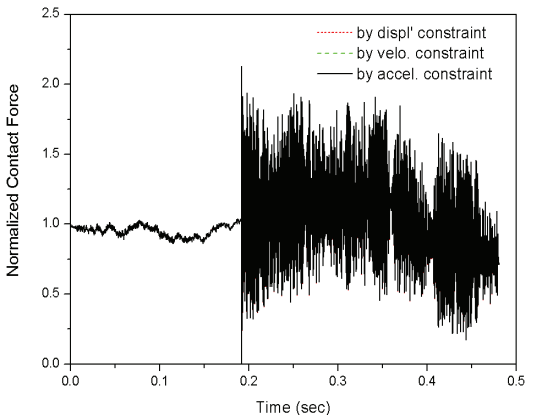

Fig. 14 Contact force computed with a short gap length of 1 cm(initial wheel speed : 50 m/s, k=1013 N/m$^{3/2}$)

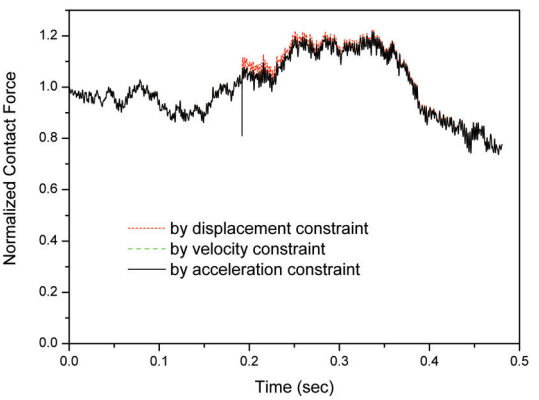

Fig. 15 Contact force computed with a short gap length of 0.5 cm(initial wheel speed : 50 m/s, k=10^{12} N/m$^{3/2}$)

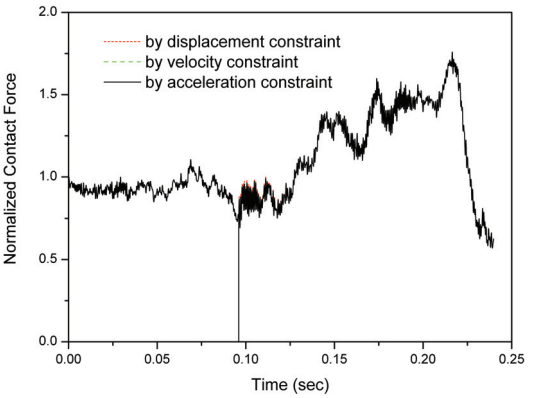

Fig. 16 Contact force computed with a short gap length of 0.5 cm(initial wheel speed : 100 m/s, k=10^{13} N/m$^{3/2}$)

현상이 더 커질것임).

물론 보 윗면 간격 길이가 짧아지면 충격적인 접촉력은 크게 감소하며, 예로써 간격 길이가 1 cm로 줄어들면 k가 10^{13} N/m$^{3/2}$인 경우에 Fig. 14와 같이 충격적인 접촉력은 Fig. 10에 비하여 크게 감소한다. 추가적인 예로써 보 윗면 간격이 0.5 cm, 바퀴 초기속도가 50 m/s, k가 10^{12} N/m$^{3/2}$인 경우에는 접촉력이 Fig. 15처럼 되며, 보 윗면 간격이 0.5 cm, 바퀴 초기속도가 100 m/s, k가 10^{13} N/m$^{3/2}$인 경우에는 접촉력이 Fig. 16처럼 되어 보 윗면에 간격이 없는 경우의 Figs. 4, 5 및 참고문헌[17,18]과 거의 비슷한 충격력이 미미한 결과가 얻어진다(Figs. 15, 16의 경우 간격 통과시 바퀴가 간격 양쪽 모서리와 동시에 접촉하는데 여기에서는 하나의 접촉점만 가정하였으므로 변위 접촉조건을 부과한 결과와 속도 및 가속도 접촉조건을 부과한 결과는 간격 통과후 약간의 차이가 남).

4. 결 론

이 논문에서는 간격이 있는 보 위에서 고속 주행하는 바퀴의 접촉조건을 바퀴 및 보의 운동방정식에 부과하여 정확한 해를 구할 수 있음을 설명하였다. 특히 보에 간격이 존재하는 경우에 바퀴와 보 사이의 접촉점에서의 Hertz 변형이 해에 결정적인 영향을 주는 것을 입증하였다. 접촉조건에는 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 대수 부등식이 포함된 미분방정식 수치적분의

안정성을 도모하였으며, 특히 고속 이동하는 접촉점의 가속도 계산시 코리올리스 가속도 및 구심 가속도를 고려하였다. 이 논문 계산 결과의 정확성을 점검하기 의하여 Vu Quo과 Olsson[17,18]의 경우와 동일한 모델을 사용한 계산을 통하여 그 결과를 비교하고 계산 결과의 타당성을 입증하였다. 또한 접촉점에서 변위 접촉조건, 속도 접촉조건, 가속도 접촉조건을 사용하여 얻어진 계산 결과가 모두 동일하다는 사실도 이 논문 계산 결과의 타당성을 입증한다(만약 해가 정확하지 못하면 구속조건으로 변위, 속도, 가속도를 독립적으로 부과하여 얻어진 결과가 우연히 일치하지는 못할 것임).

이 논문에서는 Vu Quoc과 Olsson[17,18]의 결과와 비교하기 위하여 연속 보 윗면에 큰 길이의 간격이 있다고 가정하여 해의 타당성을 점검하였다. 그런데 실제 기차 레일의 경우 레일과 레일은 그 사이의 연결판에 의하여 상당히 불완전하게 연결되어 있으며, 레일 사이의 간격은 대단히 작다. 따라서 이러한 레일 및 연결부위를 서로 분리된 보를 사용하여 좀더 정확히 동역학적으로 모델링 하고 바퀴가 좁은 간격의 양쪽 2점에서 동시에 접촉하는 경우도 포함하면 현실적인 기차 레일을 모델로 하는 계산이 가능할 것이다. 그런데 이 논문의 방법은, 기존 참고문헌[15]에서 설명된 것처럼 일반적인 다물체 동역학 및 유한요소 모델을 사용하여 다수의 접촉점 및 구속조건을 가진 복잡한 경우에도 적용 가능하므로, 레일과 바퀴의 접촉은 물론 현수장치, 차체 등 복잡한 부분을 정확히 모델링하여 계산하는 것이 가능하다고 예상되며 이에 대한 연구가 추후 요망된다.

참 고 문 헌

(1) Shabana, A. and Sany, J. R., 2001, A Survey of Rail Vehicle Track Simulations and Flexible Multibody Dynamics, Nonlinear Dynamics, Vol. 26, pp. 179~210.

(2) Rathod, C. and Shabana, A., 2007, Geometry and Differentiability Requirements in Multibody Rail Road Vehicle Dynamic Formulations, Nonlinear Dynamics, Vol. 47, pp. 249~261.

(3) Sinokrot, T., Nakhaeinejad, M. and Shabana, A., 2008, A Velocity Transformation Method for the Nonlinear Dynamic Simulation of Railroad Vehicle Systems, Nonlinear Dynamics, Vol. 51, pp. 289~307.

(4) Shabana, A., Zaazaa, K., Escalona, J. L. and Sany, J. R., 2004, Development of Elastic Contact Model for Wheel/Rail Contact Problems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 269, pp. 295~325.

(5) Shabana, A., Tobaa, M., Sugiyama, H. and Zaazaa, K., 2005, On the Computer Formulations of the Wheel/Rail Contact Problems, Nonlinear Dynamics, Vol. 40, pp. 169~193.

(6) Shabana, A., Zaazaa, K. E. and Sugiyama, H., 2008, Railroad Vehicle Dynamics A Computational Approach, CRC Press, BocaRaton.

(7) Ambrosio, J. and Verissimo, P., 2009 Improved Bushing Models for General Multibody Systems and Vehicle Dynamics, Multibody System Dynamics, Vol. 22, pp. 341~365.

(8) Tian, Q., Zhang, Y., Chen, L. and Flores, P. 2009, Dynamics of Spatial Flexible Multibody Systems with Clearance and Lubricated Spherical Joints, Computers and Structures, Vol. 87, pp. 913~929.

(9) Flores, P. and Ambrosio, J., 2010, On the Contact Detection for Contact-impact Analysis in Multibody Systems, Multibody System Dynamics, Vol. 24, pp. 103~122.

(10) Flores, P., Leine, R. and Glocker, C., 2010, Modeling and Analysis of Planar Rigid Multibody Systems with Translational Clearance Joints Based on the Non-smooth Dynamics Approach. Multibody System Dynamics, Vol. 23, pp. 165~190.

(11) Lee, K., 2008, Dynamic analysis of a Wheel Moving on an Elastic Beam with a High Speed, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration, Vol. 18, pp. 541~549.

(12) Lee, K., 2010, A Stabilized Numerical Solution for Dynamic Contact of Bodies Having Very Stiff Constraint on the Contact Point. Computational Mechanics, Vol. 46, pp. 533~543.

(13) Lee, K., 2011, A Short Note for Numerical Analysis of Dynamic Contact Considering Impact

and a Very Stiff Spring-damper Constraint on the Contact Point, Multibody System Dynamics, Vol. 26, pp. 425~439.

(14) Lee, K., 2009, Numerical Analysis for Dynamic Contact between High-speed Wheel and Elastic Beam with Coulomb Friction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 78, pp. 883~900.

(15) Lee, K., 1997, A Numerical Method for Dynamic Analysis of Vehicles Moving on Flexible Structures Having Gaps, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp. 511~531.

(16) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1982, Theory of Elasticity, McGraw Hill, Singapore.

(17) Vu-Quoc, L. and Olsson, M., 1989, Formulation of a Basic Building Block Model for Interaction of High Speed Vehicles on Flexible Structures, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 56, pp. 451~458.

(18) Vu-Quoc, L. and Olsson, M., 1989, Computational Procedure for Interaction of High-speed Vehicles on Flexible Structures without Assuming Known Vehicle Nominal Motion. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 76, pp. 207~244.

부록: 접촉 오차, 접촉조건 및 반복계산법

이 논문에서는 참고문헌[12,13]에서 정의한 접촉오차를 이용한 접촉조건을 반복계산법에 의하여 운동방정식에 부과하고 있으며, 그 요점을 다음에 약술한다. 시간 $t+\Delta t$에서 반복계산법에 의하여 접촉력 $p^{t+\Delta t}$가 주어지면 운동방정식 (2)의 해에 의하여 물체의 기하학적 모양이 결정되고, 이를 이용하여 접촉점 사이의 최소간격 $s^{t+\Delta t}$이 계산된다. 물론 바퀴와 보의 접촉점 사이가 분리되면 $s^{t+\Delta t}$는 양이 되고, 침입이 발생하는 경우에 $s^{t+\Delta t}$는 음의 값을 취한다. 한편 접촉점에 부착된 스프링의 변형 $\delta^{t+\Delta t}$는 방정식 (3)에 의하여 계산되며, 변위 접촉오차 $e^{t+\Delta t}$는 다음과 같이 정의된다.

$$e^{t+\Delta t} = s^{t+\Delta t} + \delta^{t+\Delta t} \text{ if } p^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } s^{t+\Delta t} + \delta^{t+\Delta t} < 0$$
$$e^{t+\Delta t} = 0 \text{ otherwise} \tag{A.1}$$

변위 접촉조건 (4)는 다음과 같이 표현된다.

$$p^{t+\Delta t} \geq 0 \text{ and } e^{t+\Delta t} = 0 \tag{A.2}$$

이 논문에서는 변위 접촉오차 (A.1)를 운동방정식 (2)에 부과하기 위하여 다음과 같은 반복계산법에 의하여 변위 접촉오차 (A.1)을 0으로 수렴시키는 방법을 사용한다.

$$p^{t+\Delta t,m} = \max\left(p^{t+\Delta t,m-1} - \alpha\, e^{t+\Delta t,m-1}, 0\right) \tag{A.3}$$

위에서 m은 반복 회수를 표시하고 α는 2장에서 설명된 상수이다.

속도 접촉조건을 부과하기 위하여 식 (5)에 의하여 $\dot{s}^{t+\Delta t}$를 계산하고, 식 (9)에 의하여 $\dot{\delta}^{t+\Delta t}$를 계산하며, 이를 이용하여 속도 접촉오차 $\hat{e}^{t+\Delta t}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{e}^{t+\Delta t} = \dot{s}^{t+\Delta t} + \dot{\delta}^{t+\Delta t} \text{ if } \left\{p^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \dot{s}^{t+\Delta t} + \dot{\delta}^{t+\Delta t} < 0\right\} \text{ and } \left\{p^{t} > 0 \text{ or } \left(p^{t+\Delta t}\right)_{disp} > 0\right\}$$
$$\hat{e}^{t+\Delta t} = 0 \text{ otherwise} \tag{A.4}$$

위에서 $(p^{t+\Delta t})_{disp}$는 변위 접촉조건을 사용하여 반복계산법 (A.3)에 의하여 계산된 접촉력을 나타내며, 속도 접촉조건은 다음과 같이 표현된다.

$$p^{t+\Delta t} \geq 0 \text{ and } \hat{e}^{t+\Delta t} = 0 \tag{A.5}$$

이 논문에서는 속도 접촉오차 (A.4)를 운동방정식 (2)에 부과하기 위하여 다음과 같은 반복계산법에 의하여 속도 접촉오차 (A.5)를 0으로 수렴시키는 방법을 사용한다.

$$p^{t+\Delta t,m} = \max\left(p^{t+\Delta t,m-1} - \alpha\, \hat{e}^{t+\Delta t,m-1}, 0\right) \tag{A.6}$$

가속도 접촉조건을 부과하기 위하여 식 (6)과 (7)에 의하여 $\ddot{s}^{t+\Delta t}$를 계산하고, 식 (8)에 의하여 $\ddot{\delta}^{t+\Delta t}$

를 계산하며, 이를 이용하여 속도 접촉오차 $\tilde{e}^{t+\Delta t}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{e}^{t+\Delta t} = \ddot{s}^{t+\Delta t} + \ddot{\delta}^{t+\Delta t} \left\{ \text{if } p^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \ddot{s}^{t+\Delta t} + \ddot{\delta}^{t+\Delta t} < 0 \right\} \text{ and} \left\{ p^{t} > 0 \text{ or} \left(p^{t+\Delta t} \right)_{disp} > 0 \right\}$$

$$\tilde{e}^{t+\Delta t} = 0 \text{ otherwise} \tag{A.7}$$

위에서 $\ddot{s}$ 를 계산하기 위하여는 반드시 본문에서 언급된 Coriolis 가속도 및 원심 가속도가 포함되어야 하며, 가속도 접촉조건은 다음과 같이 표현된다.

$$p^{t+\Delta t} \geq 0 \text{ and } \tilde{e}^{t+\Delta t} = 0 \tag{A.8}$$

이 논문에서는 가속도 접촉오차 (A.7)을 운동방정식 (2)에 부과하기 위하여 다음과 같은 반복계산법에 의하여 가속도 접촉오차 (A.7)을 0으로 수렴시키는 방법을 사용한다.

$$p^{t+\Delta t,m} = \max\left(p^{t+\Delta t,m-1} - \alpha\, \tilde{e}^{t+\Delta t,m-1}, 0 \right) \tag{A.9}$$